

7.lk matematiikka

Geometria 1

Versio 2.6 (2023)
Janne Koponen

Geometria

Tämä moniste on tehty 7.lk. geometrian opetukseen ja olen käyttänyt sitä itse Hatanpään koulussa. Jos joku opettaja haluaa tätä kuitenkin käyttää omassa opetuksessaan, on se sallittua. Monisteen eteenpäin myyminen ja omiin nimiin ottaminen on kuitenkin kielletty.

Muokkaan ja korjailen monistetta omien tarpeideni mukaan ja julkaisen uusimman version (jos muutoksia tulee) osoitteessa:

<https://peda.net/p/joykop/mm>

Tämä moniste on suunniteltu siten, että oppilas tekee suurimman osan tehtävistä tähän monisteeseen. Osa tehtävistä on kuitenkin vihkotehtäviä.

Tämä moniste sisältää 7.lk. geometriasta noin yhden kolmanneksen, eli monisteet Geometria 2 ja Geometria 3 sisältävät loput. Arvioinnin kannalta näiden kolmen monisteen arvostelu on ollut kahden koealueen asia, eli omassa arvostelussani huomioin jokaisen monisteen sisällöt 2/3 painotuksella verrattuna tyyppilliseen koealueeseen. Tämä siis tiedoksi omille oppilailleni, joku muuhan voi arvioida toisenlaisella painotuksella.

Maaliskuussa 2018 (versiota 2.0 kirjoittaessa)

Nettisivun osoite vaihdettu joulukuussa 2018.

Janne Koponen

Sisällys

1. Koordinaatisto	4
2. Kulmien nimeäminen ja luokittelu	8
3. Kulmien mittaaminen ja piirtäminen	10
4. Ristikulmat ja vieruskulmat	14
5. Suorat, yhdensuuntaisuus ja kohtisuoruus	18
6. Samankohtaiset kulmat	22
7. Kertaus 1	25
Vastauksia	27

1. Koordinaatisto

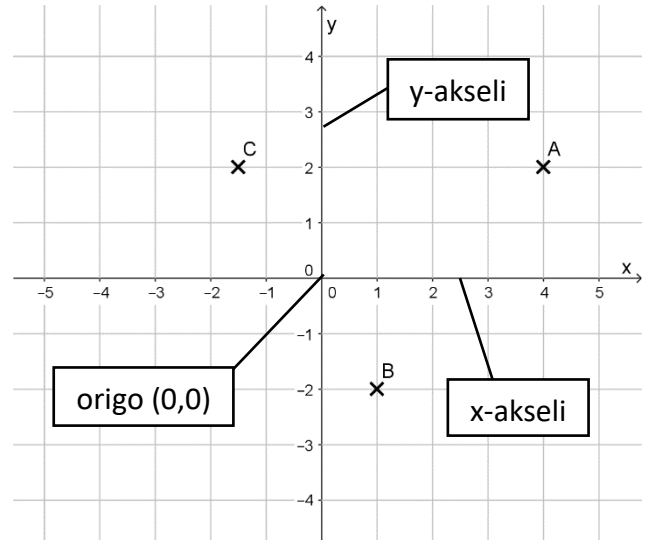
Koordinaatistossa jokaiselle pisteelle on tarkka paikka, joka kerrotaan kahden numeron avulla.

- Ensimmäinen numero kertoo vaakasuuntaisen koordinaatin x .
- Toinen numero pystysuuntaisen koordinaatin y .
- Numerot merkitään sulkeiden sisään ja erotetaan pilkulla (tai puolipisteellä, jos jompikumpi on desimaaliluku).

Viereiseen koordinaatistoon on merkitty kolme pistettä:

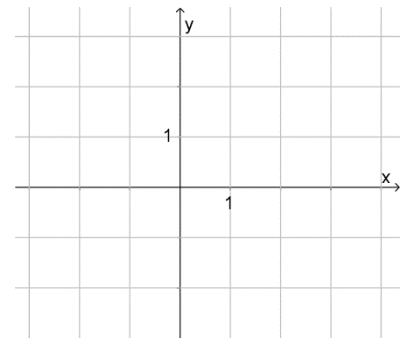
$$A(4, 2) \quad B(1, -2) \quad C(-1,5; 2)$$

Kohta jossa koordinaattiakselit leikkaavat on nimeltään origo ja sen koordinaatit ovat $(0, 0)$



Koordinaatiston minimivaatimukset (käsin piirrettäessä):

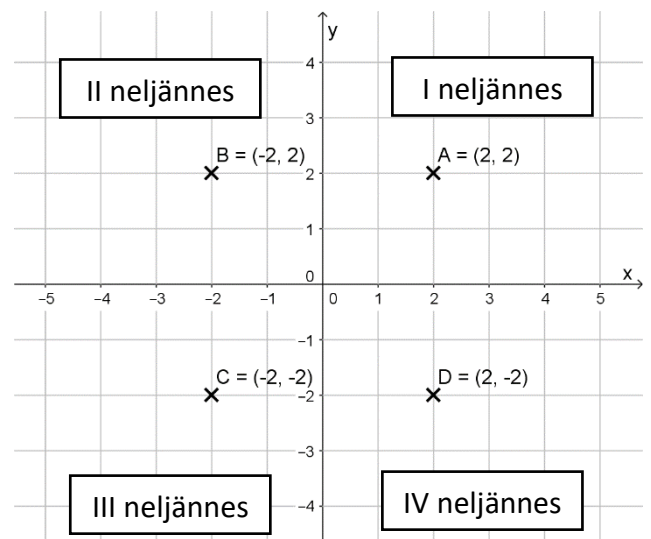
- Koordinaattiakselit
- Akselien nimet (x ja y)
- Positiivisen suunnan osoittavat nuolet
- Yhden ruudun suuruuden arvo
 - Kaikkia numeroita ei siis tarvitse kirjoittaa.



Koordinaatiston neljännekset:

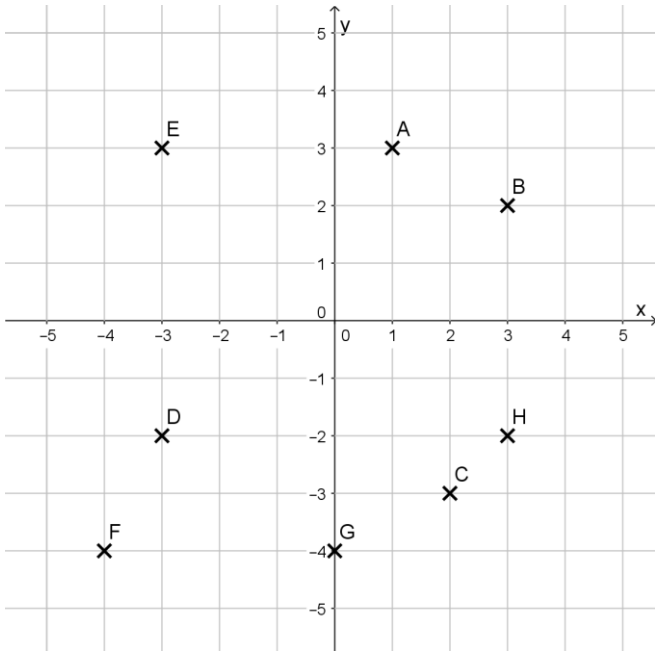
Koordinaattiakselit jakavat koordinaatiston neljään osaan, joiden nimet on lisätty viereisen kuvan koordinaatistoon. Nimillä sinällään ei ole yläkoulun matematiikassa merkitystä. Olennaista on kuitenkin huomata se, miten koordinaattien merkit menevät eri alueilla.

- 1. neljänneksessä x ja y ovat aina positiivisia.
- 2. neljänneksessä x on aina negatiivinen ja y positiivinen.
- 3. neljänneksessä x ja y ovat aina negatiivisia.
- 4. neljänneksessä x on aina positiivinen ja y negatiivinen.



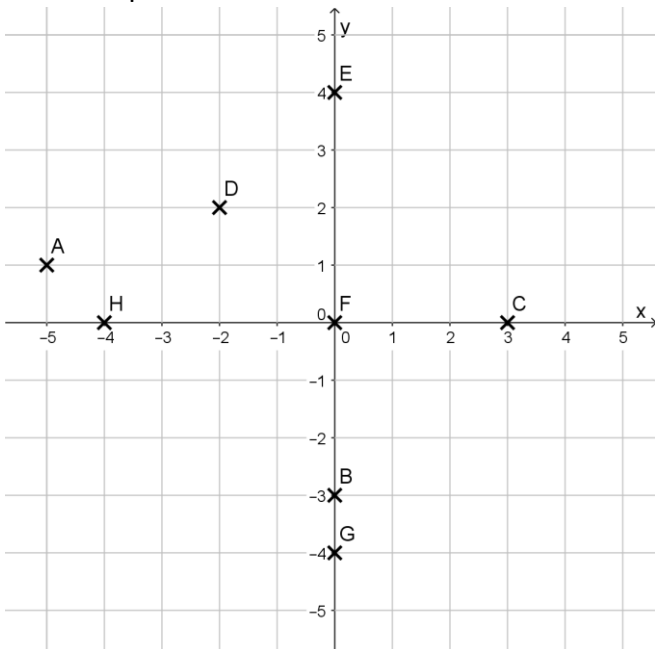
Tehtäviä

1. Merkitse pisteiden koordinaatit



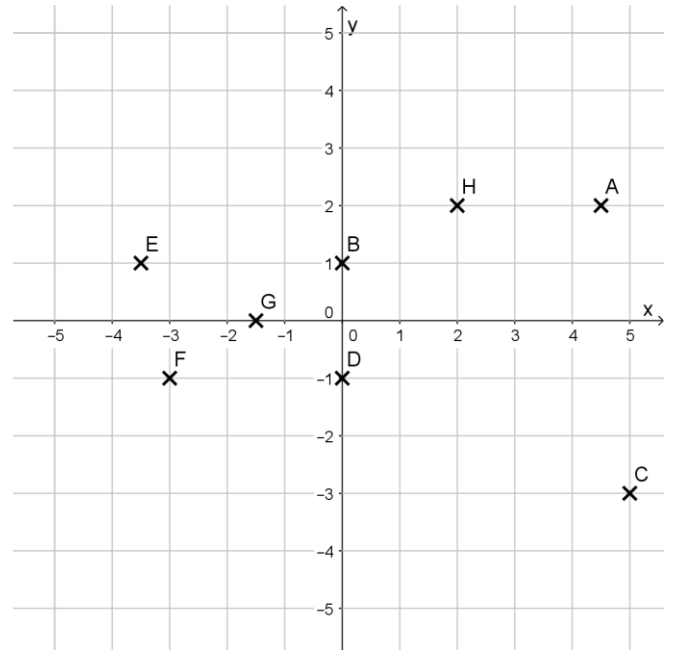
- | | |
|--------|---|
| A(,) | B |
| C | D |
| E | F |
| G | H |

2. Merkitse pisteiden koordinaatit



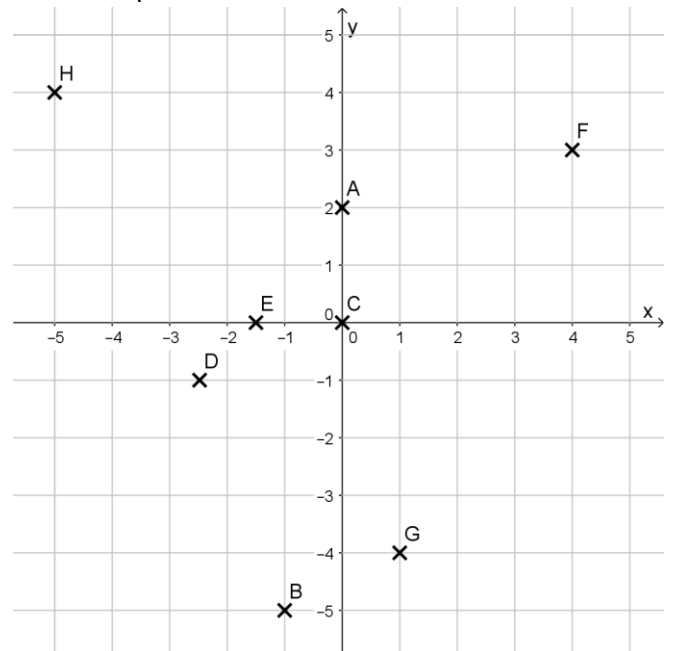
- | | |
|---|---|
| A | B |
| C | D |
| E | F |
| G | H |

3. Merkitse pisteiden koordinaatit



- | | |
|---|---|
| A | B |
| C | D |
| E | F |
| G | H |

4. Merkitse pisteiden koordinaatit

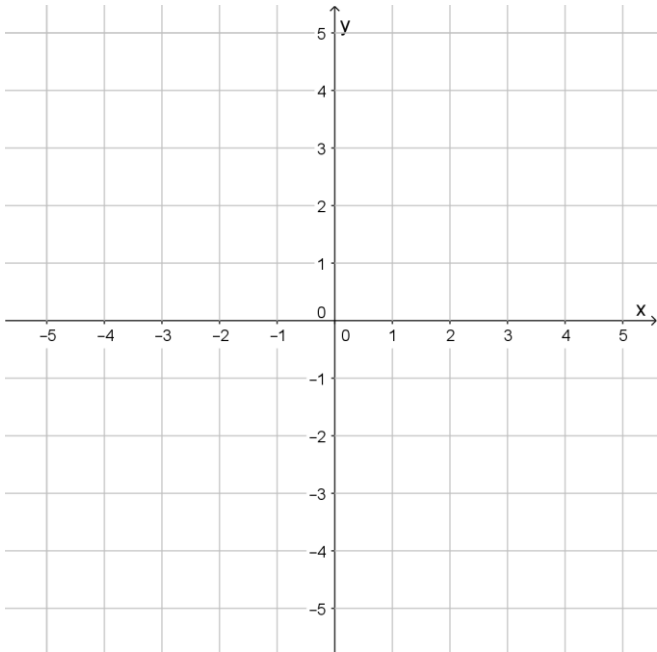


- | | |
|---|---|
| A | B |
| C | D |
| E | F |
| G | H |

Geometria

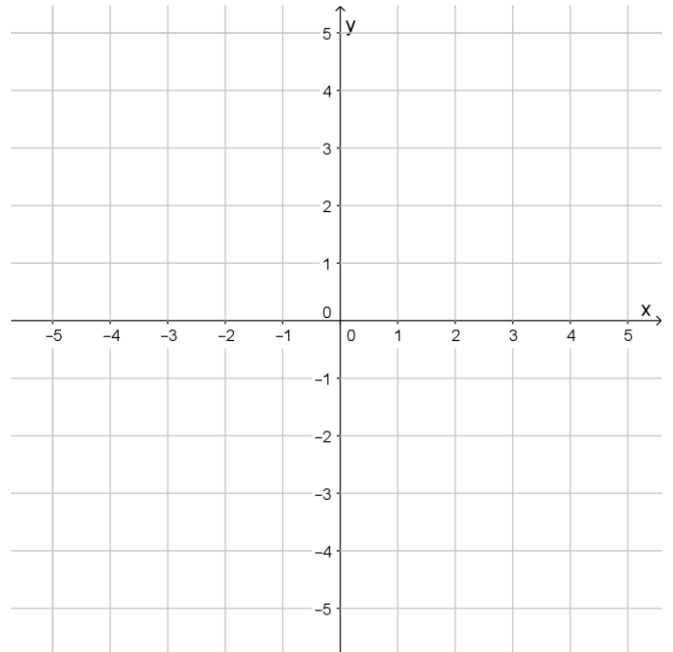
5. Merkitse koordinaatistoon seuraavat pisteet

$A(3, 4)$	$B(-2, 5)$
$C(-3, -3)$	$D(-4, 5)$
$E(3, -4)$	$F(2, -5)$
$G(-3, 0)$	$H(0, 5)$



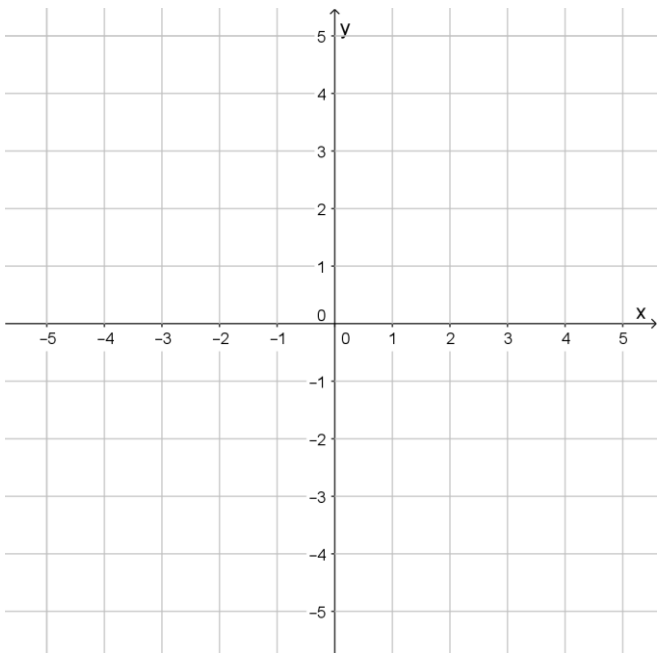
7. Merkitse koordinaatistoon seuraavat pisteet

$A(1, 1)$	$B(1,5; 1)$
$C(2, 1)$	$D(2; 1,5)$
$E(2, 2)$	$F(2,5; 2)$
$G(3, 2)$	$H(3,5; 2)$



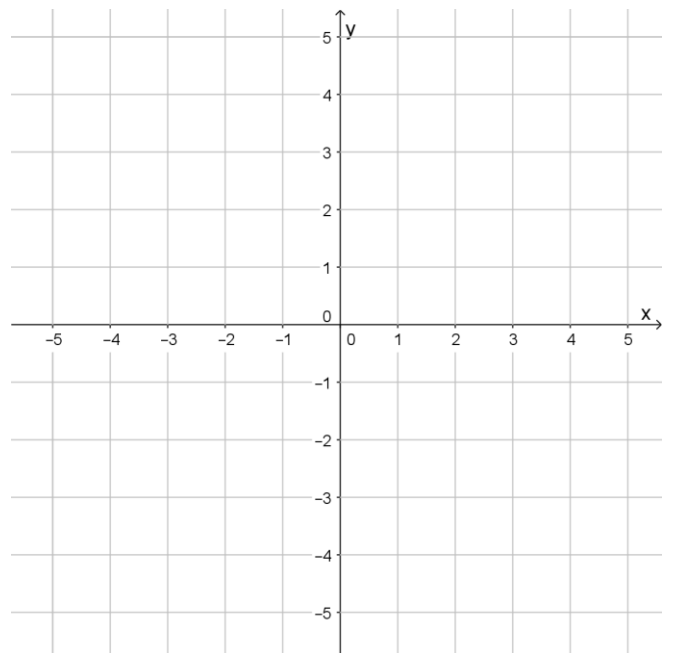
6. Merkitse koordinaatistoon seuraavat pisteet

$A(1, 2)$	$B(0, 0)$
$C(0, -2)$	$D(-4, 0)$
$E(1, -1)$	$F(0, -5)$
$G(1, 0)$	$H(2, 3)$



8. Merkitse koordinaatistoon seuraavat pisteet

$A(0; 2,5)$	$B(-1,5; 2)$
$C(3,5; -2)$	$D(\frac{1}{2}, 3)$
$E(-1,5; -1,5)$	$F(2,5; -1,5)$
$G(0; 0,5)$	$H(2\frac{1}{3}, 1)$



Tee seuraavat tehtävät vihkoosi.

9. Piirrä koordinaatisto ja merkitse siihen pisteet

$A(-3, -2)$ $B(-1, 4)$ $C(1, -2)$

$D(-2, 1)$ $E(0, 1)$

Yhdistä viivoittimella pisteet ABC ja DE.

Mikä kuvio syntyi?

10. Piirrä koordinaatisto ja merkitse siihen pisteet

$A(-1, 2)$ $B(-2, 4)$ $C(-4, 4)$

$D(-5, 2)$ $E(-1, -3)$ $F(3, 2)$

$G(2, 4)$ $H(0, 4)$

Yhdistä viivoittimella pisteet ABCDEFGHA.

Mikä kuvio syntyi?

11. Piirrä koordinaatisto ja merkitse siihen pisteet

$A(3, -3)$ $B(-3, -3)$ $C(-3, 1)$

$D(3, 1)$ $E(4, 0)$ $F(0, 4)$

$G(-4, 0)$ $H(1, -3)$ $I(1, -1)$

$J(2, -1)$ $K(2, -3)$

Yhdistä viivoittimella pisteet ABCDA, EFG JA

HIJK. Mikä kuvio syntyi?

12. Piirrä koordinaatisto ja merkitse siihen pisteet

$A(0, -2)$ $B(-3, -4)$ $C(-2; -0,5)$

$D(-5, 2)$ $E(-1,5; 2)$ $F(0, 5)$

$G(1,5; 2)$ $H(5, 2)$ $I(2; -0,5)$

$J(3, -4)$

Yhdistä viivoittimella pisteet ABCDEFGHIJA.

Mikä kuvio syntyi?

13. Piirrä koordinaatisto ja merkitse siihen pisteet

$A(0, 1)$ $B(0, -5)$ $C(1, -1)$

$D(2, -5)$ $E(2, 1)$ $F(4, 2)$

$G(-2, 2)$ $H(1,5; 2)$ $I(2, 4)$

$J(0, 4)$ $K(0,5; 2)$

Yhdistä viivoittimella pisteet ABCDEFGA ja

HIJK. Mikä kuvio syntyi?

2. Kulmien nimeäminen ja luokittelu

Nimeäminen

Kulma voidaan nimetä kolmella eri tavalla

- Kolmen pisteen avulla. Pisteet merkitään järjestyksessä: oikea kylki, kärkipiste, vasen kylki

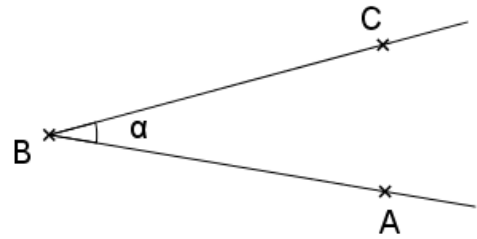
$\sphericalangle ABC$

- Kärkipisteen perusteella

$\sphericalangle B$

- Kreikkalaisilla aakkosilla

α



Lisätietoa tietokoneella kirjoittaville:

Merkki \sphericalangle on englanniksi "spherical angle".

Wordissä sen saa helpoiten ALT+ 8738.

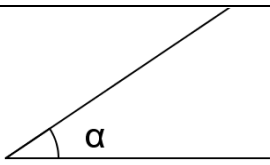
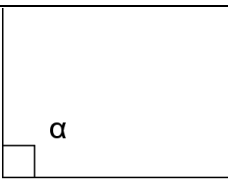
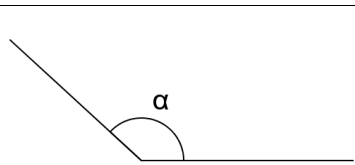
(ALT pohjassa ja numerot numeronäppäimistöä)

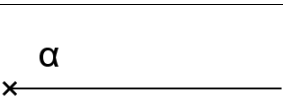
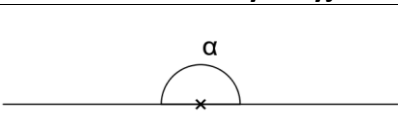
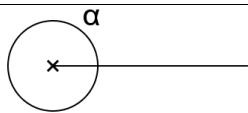
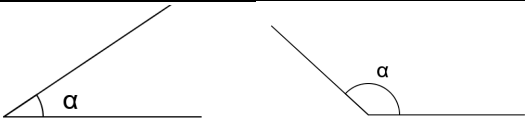
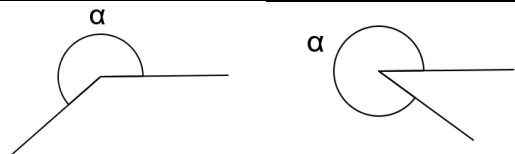
Näistä viimeisin on se eniten laskuissa käytetty ja sillä kuvataan nimenomaan kulman suuruutta, joten sitä varten pitää opetella tunnistamaan ja kirjoittamaan ainakin muutamat ensimmäiset kreikkalaiset (pienet) kirjaimet:

Tietokone	α	β	γ	δ	ϵ
Käsin (kopioi taululta)					
Kirjaimen nimi	alfa	beeta	gamma	delta	epsilon

Luokittelu

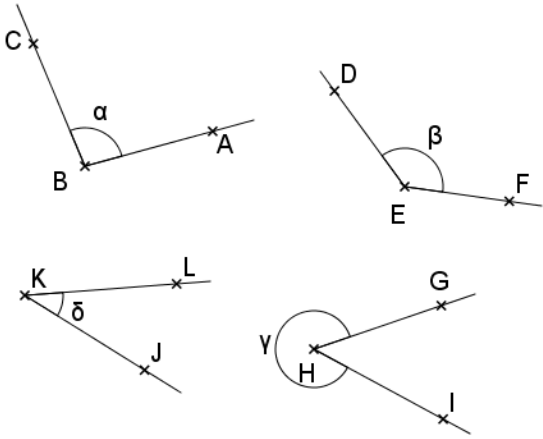
Kulmat luokitellaan niiden suuruuden mukaan.

Tärkeimmät luokittelut		
		
terävä kulma $< 90^\circ$	suorakulma $= 90^\circ$	tylppä kulma $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

Harvemmin käytettyjä		
		
nollakulma $= 0^\circ$	oikokulma $= 180^\circ$	täysi kulma $= 360^\circ$
		
kovera kulma $0^\circ < \alpha < 180^\circ$	kupera kulma $180^\circ < \alpha < 360^\circ$	

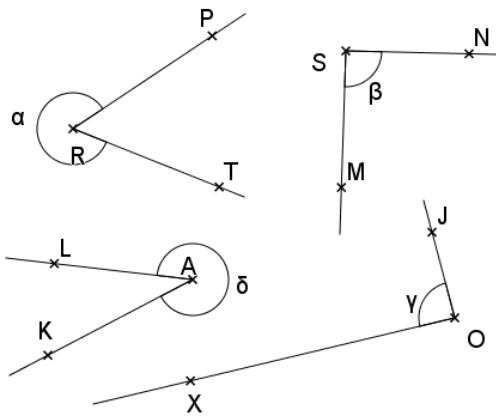
Tehtäviä

1. Nimeä kulmat kolmen pisteen avulla



$\alpha =$ $\beta =$
 $\gamma =$ $\delta =$

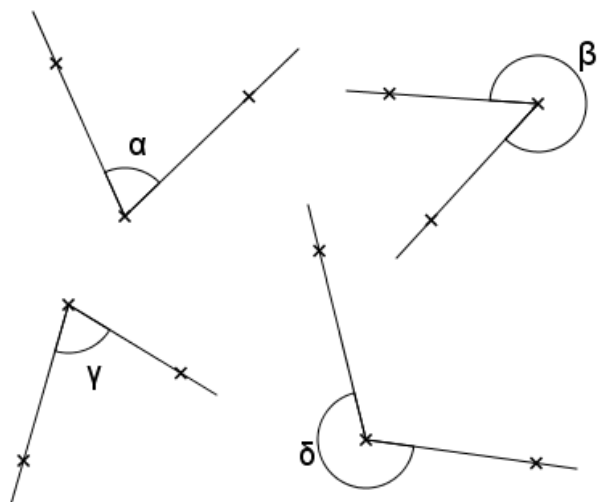
2. Nimeä kulmat kolmen pisteen avulla



$\alpha =$ $\beta =$
 $\gamma =$ $\delta =$

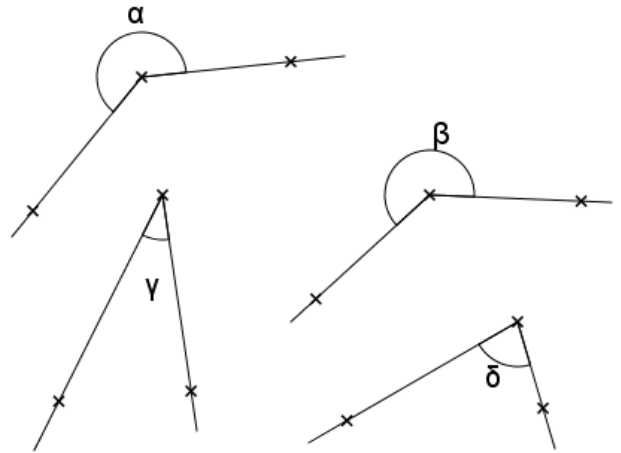
3. Merkitse kulmien pisteiden kirjaimet, kun

$\alpha = \sphericalangle ABC$ $\beta = \sphericalangle DEF$
 $\gamma = \sphericalangle GHI$ $\delta = \sphericalangle JKL$



4. Merkitse kulmien pisteiden kirjaimet, kun

$\alpha = \sphericalangle ABC$ $\beta = \sphericalangle DEF$
 $\gamma = \sphericalangle GHI$ $\delta = \sphericalangle JKL$

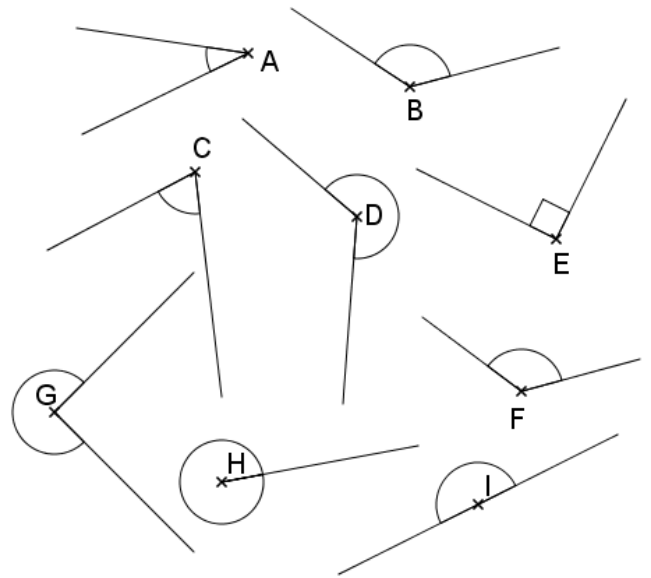


5. Mitkä alla olevista kulmista ovat

a) teräviä b) tylppiä

c) suorakulmia d) koveria

e) kuperia e) oikokulmia



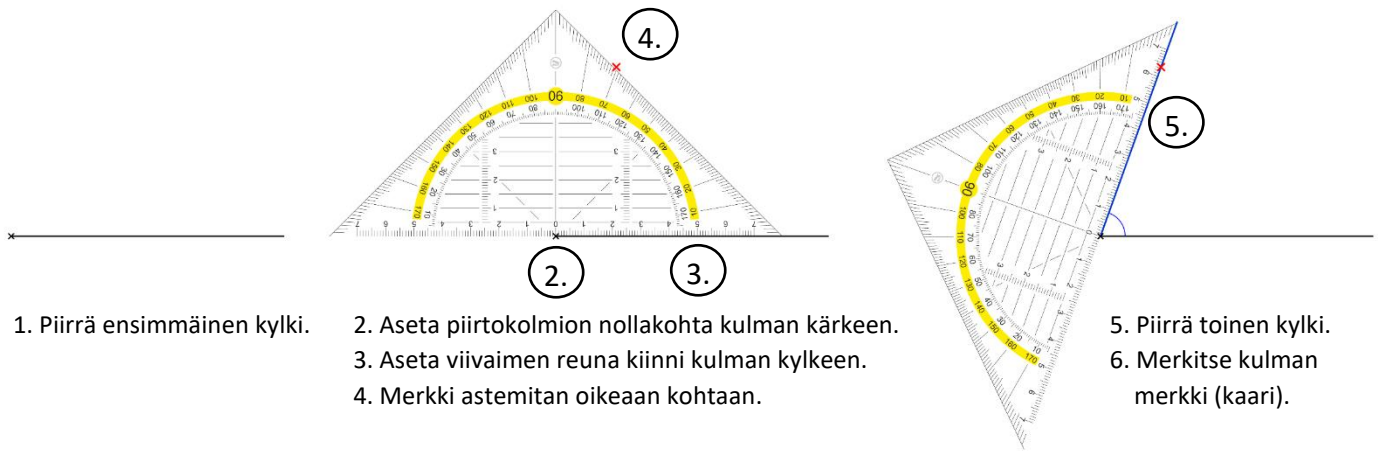
6. Piirrä vihkoosi ja merkitse

- a) terävä kulma α
- b) tylppä kulma β
- c) suorakulma δ
- d) kupera kulma γ

3. Kulmien mittaaminen ja piirtäminen

Esimerkki 1.

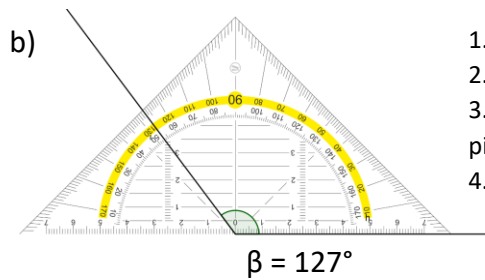
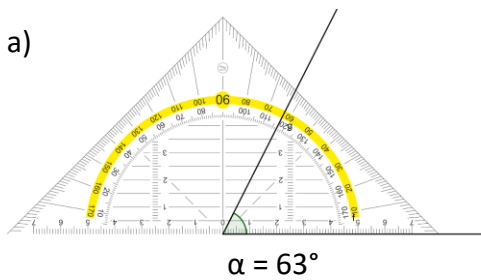
Piirretään kulma, jonka suuruus on 70° .



1. Piirrä ensimmäinen kylki.
2. Aseta piirtokolmion nollakohta kulman kärkeen.
3. Aseta viivaimen reuna kiinni kulman kylkeen.
4. Merkki astemitan oikeaan kohtaan.
5. Piirrä toinen kylki.
6. Merkitse kulman merkki (kaari).

Esimerkki 2.

Mitataan kulman suuruus.



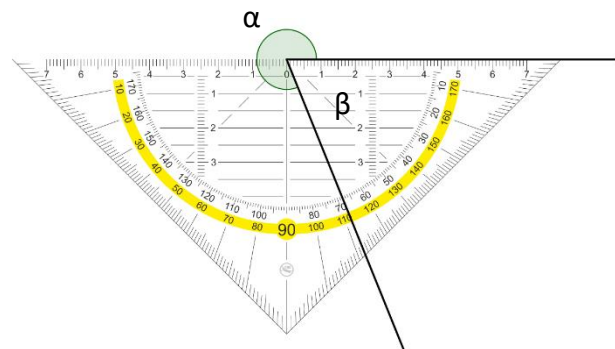
1. Nollakohta kulman kärkeen.
2. Viivain kiinni kulman kylkeen.
3. Valitse asteikko. Se kumpi lähtee pienistä luvuista kulman kyljestä.
4. Lue kulman suuruus.

Esimerkki 3.

Mitataan yli kuperan kulman (yli 180°) suuruus. (Täyden ympyrän astemäärä on aina 360° .)

Mittaamalla saadaan kovera kulma
 $\beta = 68^\circ$

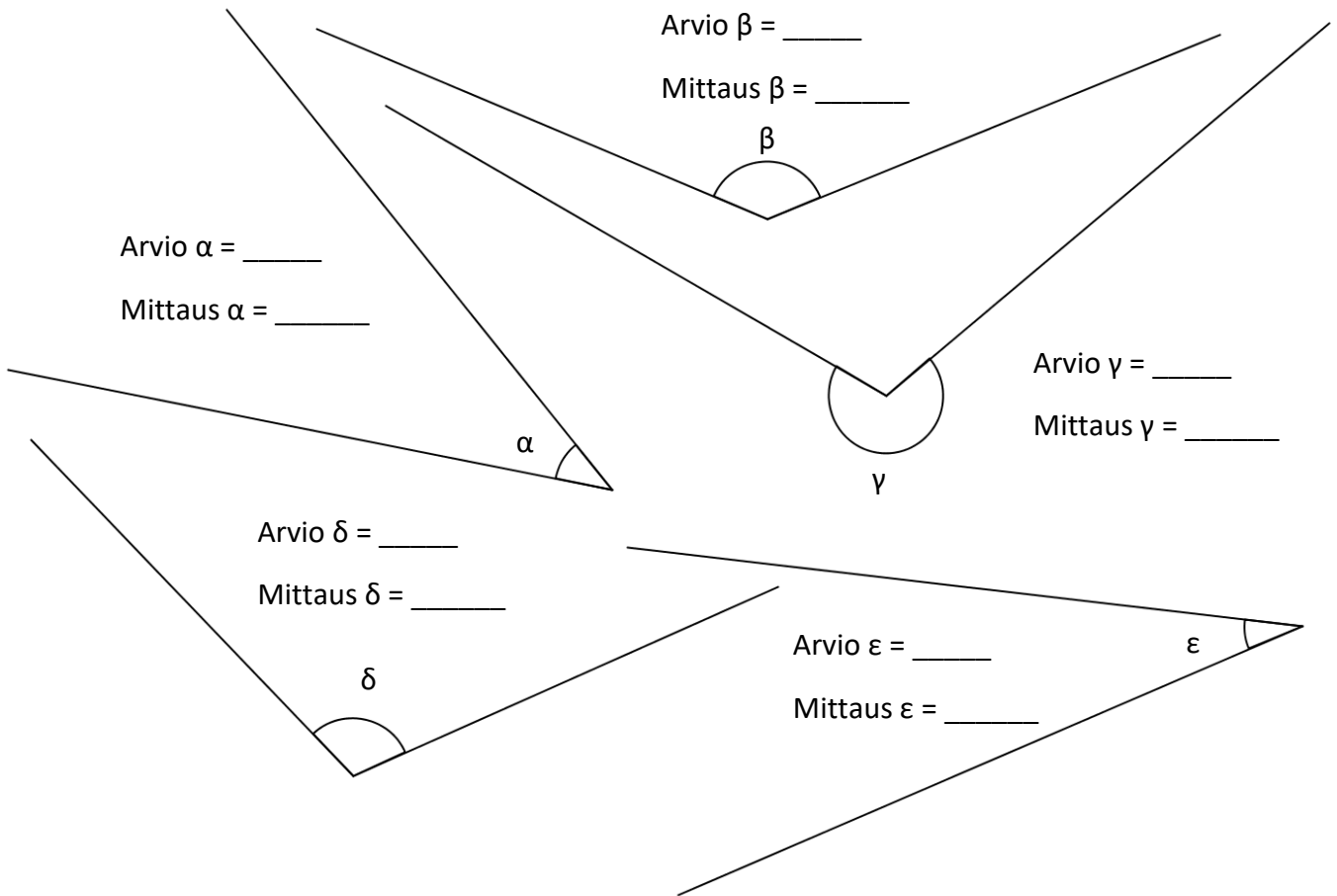
Sitten lasketaan kupera kulma
 $\alpha = 360^\circ - \beta = 360^\circ - 68^\circ = 292^\circ$



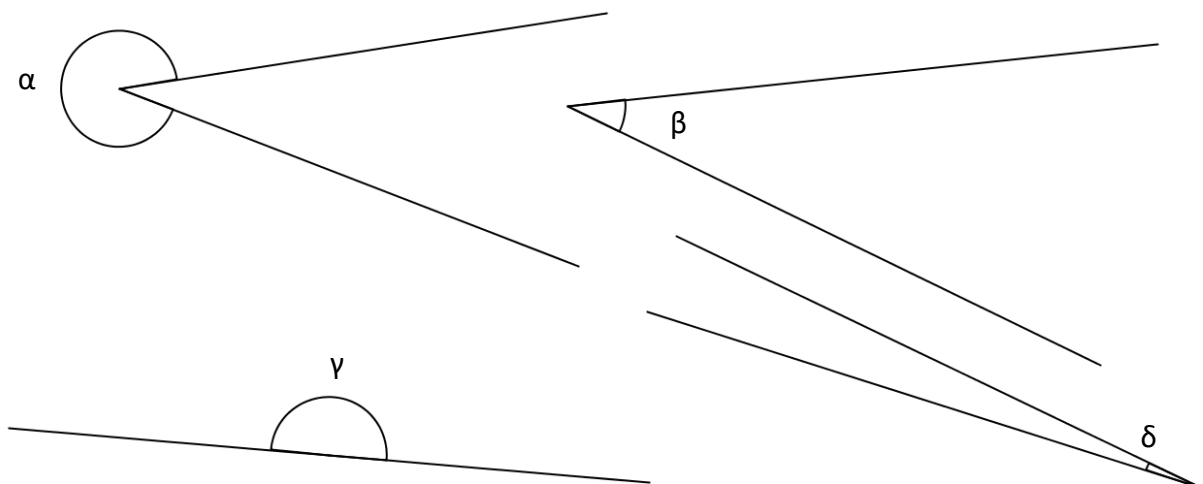
Jokainen voi itse miettiä, miten piirtäisi esimerkiksi 285° kulman. Ja kyllä niitä pitää vielä piirtäekin. :)

Tehtäviä

1. Arvio ensin kulmien suuruudet. Tarkista arviosi mittaamalla.



2. Mittaa kulmien suuruudet.



Geometria

3. Piirrä kulmat (vastapäivään). Vastausosioista löytyvät ruudut, joihin piirrettävän kyljen pitäisi osua.

A1	B1	C1	D1	E1	F1	G1	H1	I1	J1	K1	L1	M1	N1	O1
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

a) $\alpha = 30^\circ$

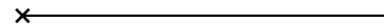
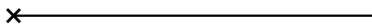
b) $\beta = 120^\circ$



A2	B2	C2	D2	E2	F2	G2	H2	I2	J2	K2	L2	M2	N2	O2
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

c) $\gamma = 56^\circ$

d) $\delta = 157^\circ$

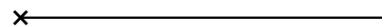
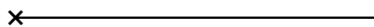


4. Piirrä kulmat (vastapäivään). Vastausosioista löytyvät ruudut, joihin piirrettävän kyljen pitäisi osua.

A3	B3	C3	D3	E3	F3	G3	H3	I3	J3	K3	L3	M3	N3	O3
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

a) $\alpha = 230^\circ$

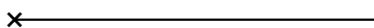
b) $\beta = 127^\circ$



A4	B4	C4	D4	E4	F4	G4	H4	I4	J4	K4	L4	M4	N4	O4
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

c) $\gamma = 16^\circ$

d) $\delta = 197^\circ$



A5	B5	C5	D5	E5	F5	G5	H5	I5	J5	K5	L5	M5	N5	O5
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Tee seuraavat tehtävät vihkoosi

5. Piirrä koordinaatistoon seuraavat pisteet:

$A(-2, 5)$, $B(10,7)$ ja $C(7, -1)$

Piirrä ja mittaa seuraavat kulmat asteen tarkkuudella

$$\alpha = \sphericalangle ABC \qquad \beta = \sphericalangle CAB$$

6. Piirrä koordinaatistoon seuraavat pisteet:

$A(-3, 3)$, $B(7,7)$, $C(7, -2)$ ja $D(1,-5)$

Piirrä ja mittaa seuraavat kulmat asteen tarkkuudella

$$\alpha = \sphericalangle ABC \qquad \beta = \sphericalangle CDA$$

7. Piirrä koordinaatistoon seuraavat pisteet:

$A(1, 3)$, $B(7,9)$, $C(7, -1)$, $D(-5, 7)$ ja $E(-6,-3)$

Piirrä ja mittaa seuraavat kulmat asteen tarkkuudella

$$\begin{aligned} \alpha &= \sphericalangle ABC & \beta &= \sphericalangle CED \\ \gamma &= \sphericalangle EDB & \delta &= \sphericalangle ACE \end{aligned}$$

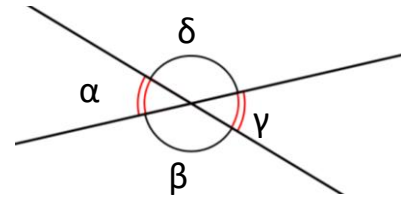
4. Ristikulmat ja vieruskulmat

Ristikulmat

Kun kaksi suoraa leikkaavat toisensa, sanotaan vastapäisiä kulmia toistensa ristikulmiksi.

Ristikulmat ovat aina yhtä suuria.

Viereisessä kuvassa $\alpha = \gamma$ ja $\beta = \delta$ (suuruudet ovat samoja).

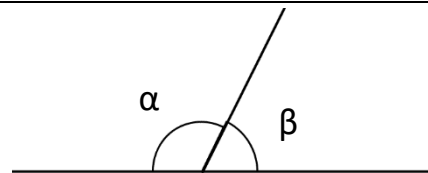


Vieruskulmat

Kun suora jaetaan kahteen kulmaan, sanotaan näitä kulmia vieruskulmiksi.

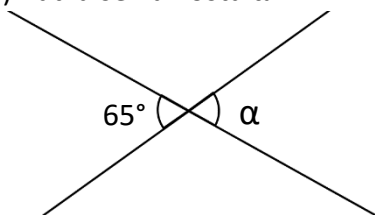
Vieruskulmien summa on aina 180° .

Viereisessä kuvassa $\alpha + \beta = 180^\circ$, mistä seuraa sovellus: $\alpha = 180^\circ - \beta$



Esimerkki 1.

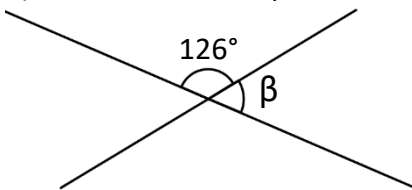
a) Ratkaise kuviosta α .



$$\alpha = 65^\circ \text{ ristikulma}$$

Viereisessä vastauksessa ei ole mitään liikaa. Jos ei mainitse, että kyseessä on ristikulmat, ei vastausta ole perusteltu.

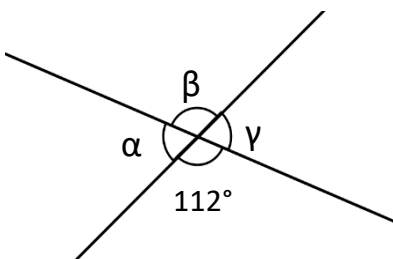
b) Ratkaise kuviosta β .



$$\begin{aligned} &\text{Vieruskulmat} \\ \beta &= 180^\circ - 126^\circ = 54^\circ \end{aligned}$$

Viereisessä vastauksessa laskulauseke on perustelu. Lisämaininta vieruskulmista ei ole haitaksi.

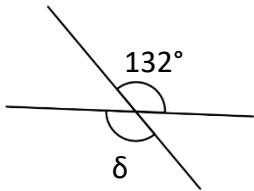
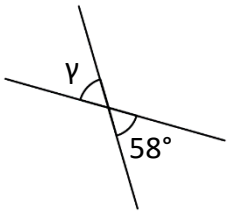
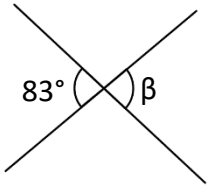
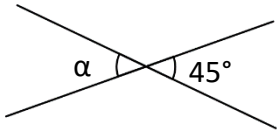
c) Ratkaise kuviosta γ , δ ja ϵ .



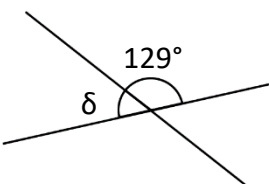
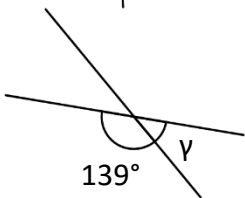
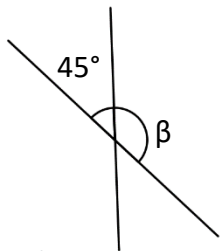
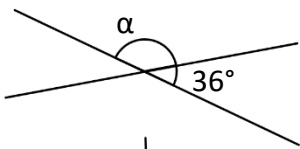
$$\begin{aligned} \beta &= 112^\circ \text{ ristikulma} \\ \alpha &= 180^\circ - 112^\circ = 68^\circ \text{ Koska vieruskulma} \\ \gamma &= 68^\circ \text{ ristikulma} \end{aligned}$$

Tehtäviä

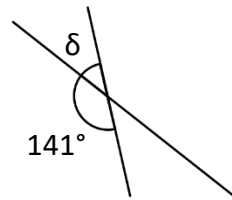
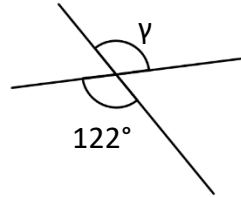
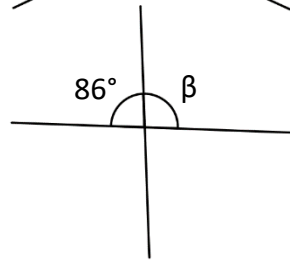
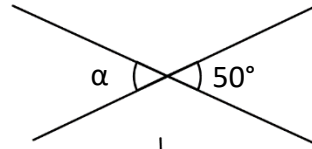
1. Ratkaise kulmat α , β , γ ja δ .



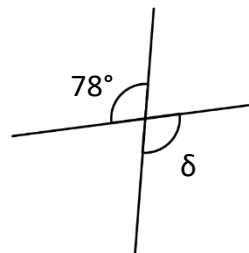
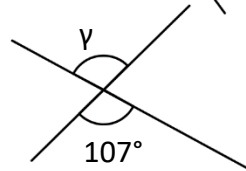
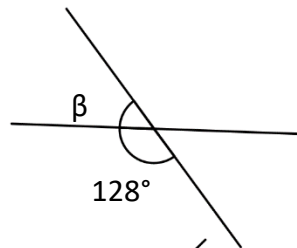
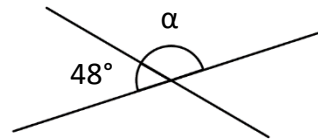
2. Ratkaise kulmat α , β , γ ja δ .



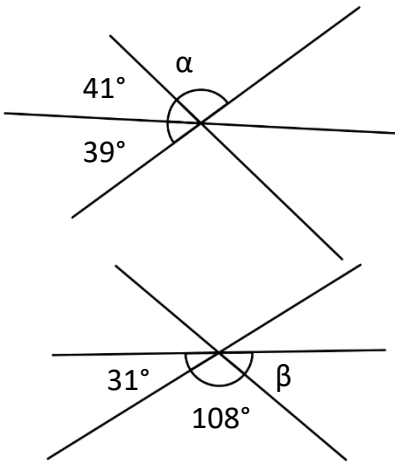
3. Ratkaise kulmat α , β , γ ja δ .



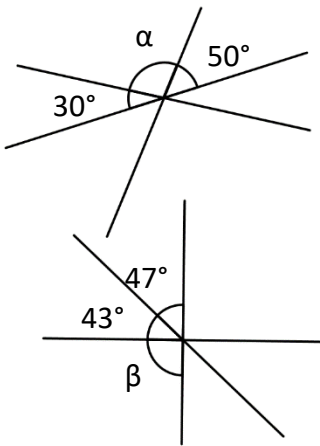
4. Ratkaise kulmat α , β , γ ja δ .



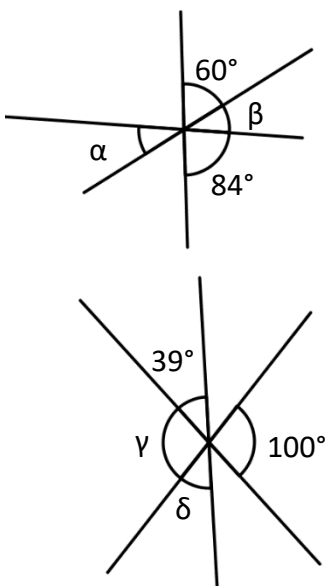
5. Ratkaise kulmat α ja β .



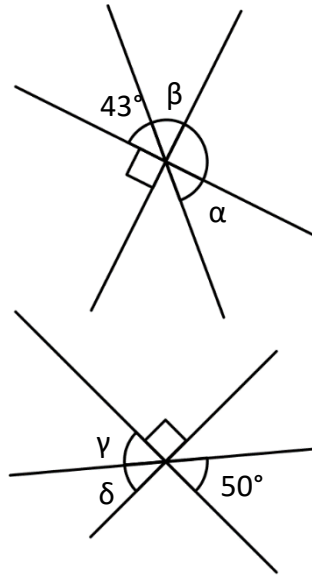
6. Ratkaise kulmat α ja β .



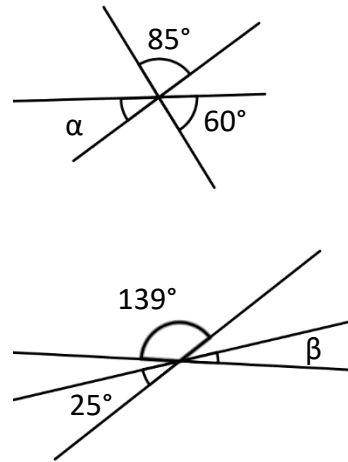
7. Ratkaise kulmat α , β , γ ja δ .



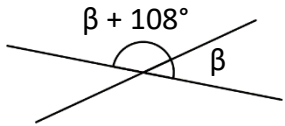
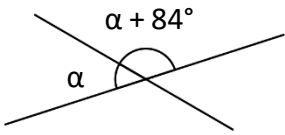
8. Ratkaise kulmat α , β , γ ja δ .



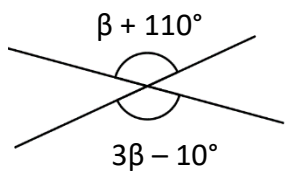
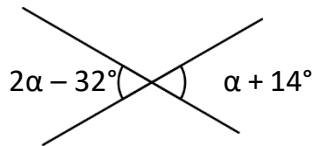
9. Ratkaise kulmat α ja β



10. Ratkaise α ja β yhtälön avulla.



11. Ratkaise α ja β yhtälön avulla



5. Suorat, yhdensuuntaisuus ja kohtisuoruus

Yhdensuuntaisuus

Kaksi suoraa ovat keskenään yhdensuuntaisia, kun ne eivät leikkaa toisiaan.
Yhdensuuntaiset suorat ovat joka kohdasta yhtä kaukana toisistaan.
(Jos jompikumpi edellä olevista ehdoista pätee, pätee toinenkin.)

Merkintä:

$s \parallel t$ tarkoittaa, että suorat s ja t ovat yhdensuuntaisia.

$s \nparallel t$ tarkoittaa, että suorat s ja t eivät ole yhdensuuntaisia.

(Knoppitietoa: Tietokoneella nämä saa kirjoitettua pikanäppäimellä ALT+8741 ja ALT+8742, missä numerot pitää näppäillä numeronäppäimistöllä. Symboleina 2225 ja 2226.)

Kohtisuoruus ja normaali

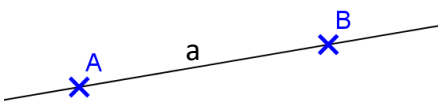

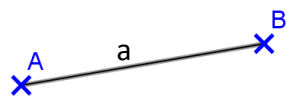
Kaksi suoraa ovat kohtisuorassa, jos niiden välinen kulma on 90° .
Suoraa s kohtisuorassa olevaa suoraa kutsutaan suoran s normaaliksi.

Merkintä:

$s \perp t$ tarkoittaa, että suorat s ja t ovat kohtisuorassa toisiinsa nähden. (Symboli 22A5)

Vastakkaista merkkiä ei ole yleisesti käytössä.

Suorien ja vähän muidenkin nimeäminen:

Suora	Puolisuora	Jana
		
Kaksi tapaa nimetä: – Kahden pisteen avulla suora AB tai suora BA – Pienellä kirjaimella suora a	Nimetään kahden pisteen avulla. Ensin alkupiste ja sitten kauttakulkupiste. puolisuora AB	Kaksi tapaa nimetä: – Kahden pisteen avulla jana AB tai jana BA – Pienellä kirjaimella jana a

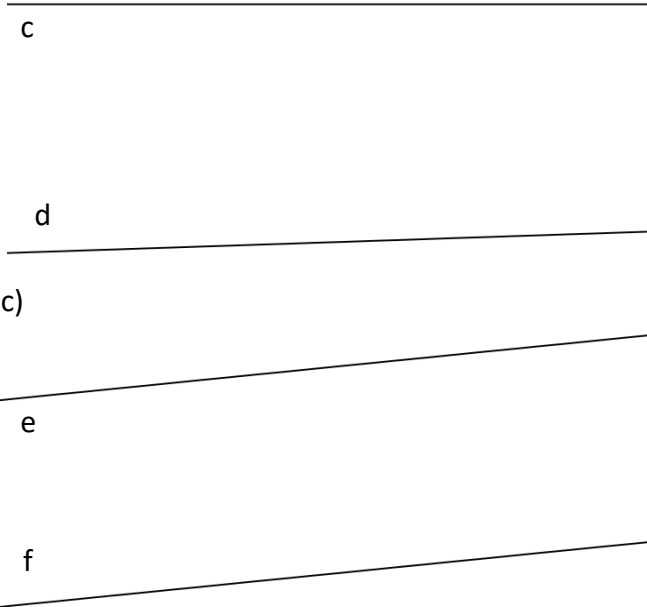
Tehtäviä

1. Tarkista mittaamalla, ovatko suorat yhdensuuntaisia ja merkitse tulos.

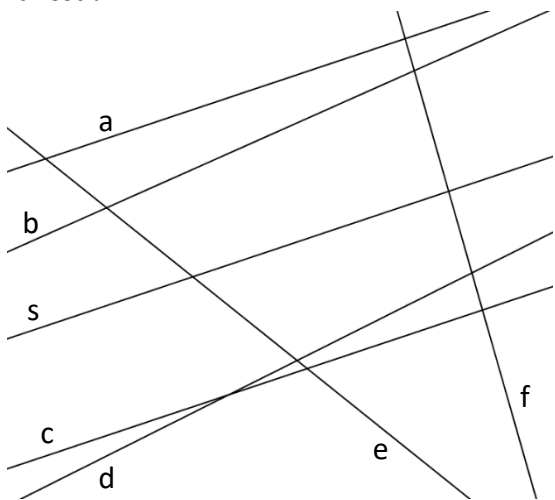
a) (Tässä on mittaamisen helpottamiseksi piirretty toiselle suoralle kaksi normaalia, joita pitkin kannattaa mitata.)



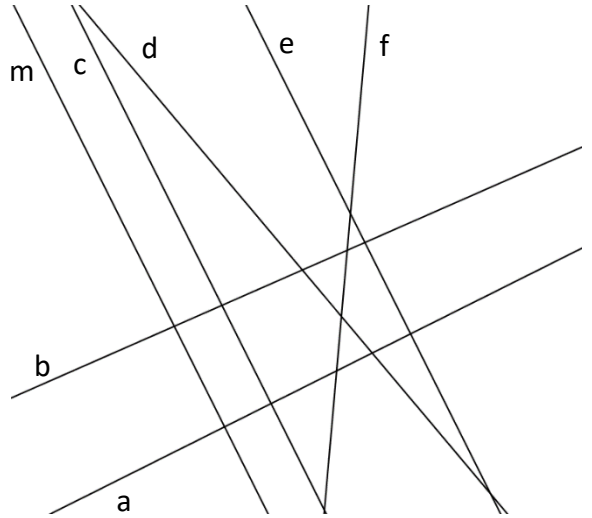
b) (Mieti, miten teit a-kohdan.)



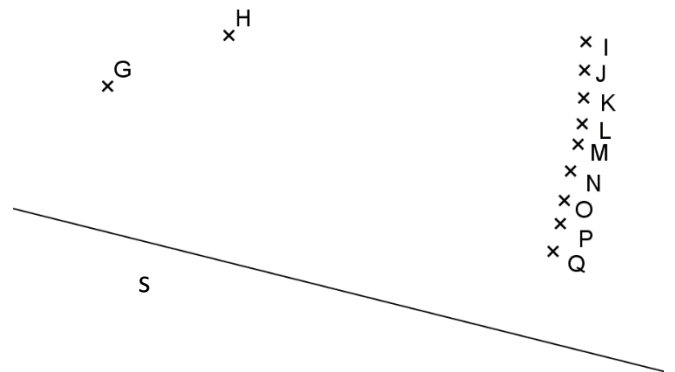
2. Mitkä suorista ovat yhdensuuntaisia suoran s kanssa?



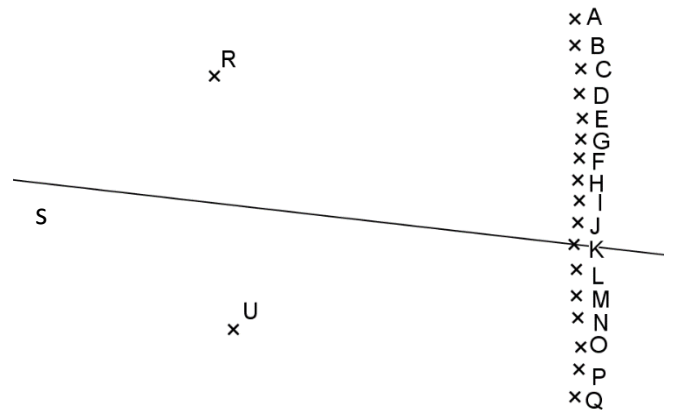
3. Mitkä suorista ovat yhdensuuntaisia suoran m kanssa?



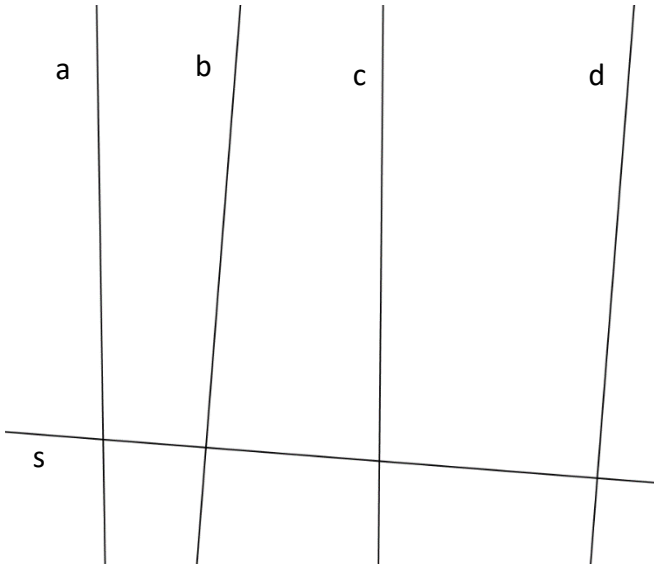
4. Piirrä kaksi suoran s kanssa yhdensuuntaista suoraa siten, että toinen kulkee pisteen G ja toinen pisteen H kautta. Mihin tarkistuspisteisiin suorat osuvat.



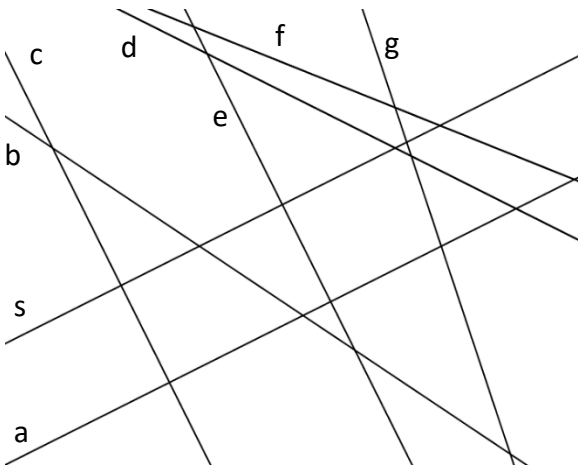
5. Piirrä kaksi suoran s kanssa yhdensuuntaista suoraa siten, että toinen kulkee pisteen R ja toinen pisteen U kautta.



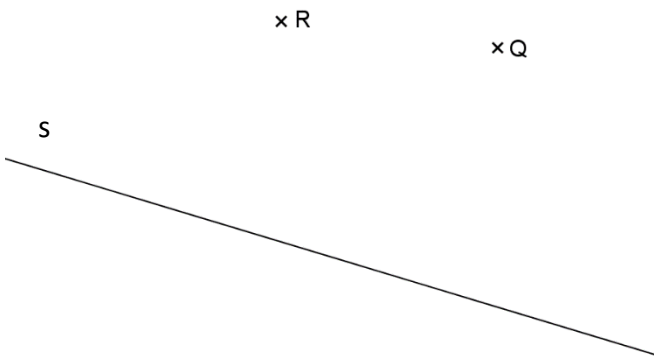
6. Tarkista geokolmiolla, mitkä suorat ovat kohtisuorassa suoran s kanssa.



7. Mitkä suorista ovat kohtisuorassa suoran s kanssa?

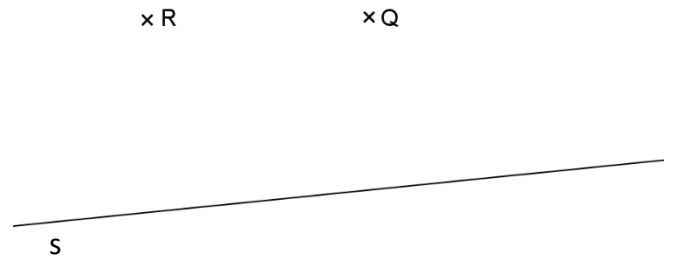


8. Piirrä suoralle s kaksi normaalia. Toinen kulkee pisteen Q ja toinen pisteen R kautta. Mihin tarkistuspisteeseen normaalit osuvat?



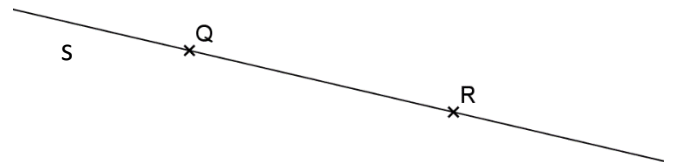
A B C D E F G H I J K L M N O P
x x x x x x x x x x x x x x x x

9. Piirrä suoralle s kaksi normaalia. Toinen kulkee pisteen Q ja toinen pisteen R kautta. Mihin tarkistuspisteeseen normaalit osuvat?



A B C D E F G H I J K L M N O P
x x x x x x x x x x x x x x x x

10. Piirrä suoralle s kaksi normaalia. Toinen kulkee pisteen Q ja toinen pisteen R kautta. Mihin tarkistuspisteeseen normaalit osuvat?



A B C D E F G H I J K L M N O P
x x x x x x x x x x x x x x x x

6. Samankohtaiset kulmat

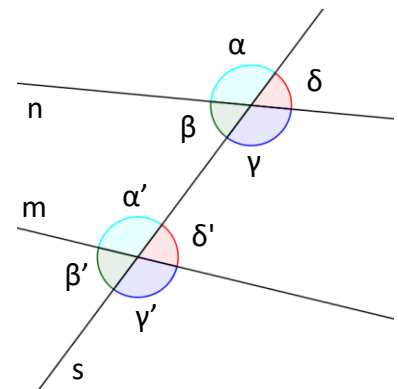
Samankohtaisten kulmien määrittäminen

Olkoon kaksi suoraa m ja n sekä niitä molempia leikkaava suora s . Suoran s molemmissa leikkauskohdissa on neljä kulmaa.

Kulmat, jotka ovat eri rykelmissä "samassa kohdassa" eli osoittavat samaan suuntaan, ovat samankohtaisia kulmia.

Kuvan tilanteessa keskenään samankohtaisia kulmia ovat:

α ja α' β ja β' γ ja γ' δ ja δ' .



Samankohtaisille kulmille on olemassa myös toinen perinteinen määritelmä, jossa kulmalle α on kaksi samankohtaista kulmaa α' ja γ' . Tämä ei kuitenkaan sovi yhteen "samankohtaiset"-sanalla kanssa ja kansainvälisessä kirjallisuudessa se ei ole käytössä. Tulevien tehtävien tekemisen kannalta molemmat määritelmät toimivat yhtä hyvin.

Samankohtaisille kulmille on olemassa yksi olennainen käyttötarkoitus, joka esitellään seuraavaksi.

Suorien yhdensuuntaisuus ja samankohtaiset kulmat

Olkoon kaksi suoraa m ja n sekä niitä molempia leikkaava suora s .

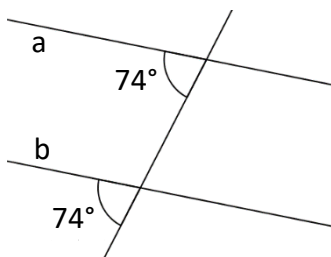
Jos samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuria ovat suorat m ja n yhdensuuntaiset.

(sama toimii toisinkin päin)

Jos suorat m ja n ovat yhdensuuntaiset, ovat samankohtaiset kulmat yhtä suuria

Esimerkki 1.

a) Ovatko kuvan suorat a ja b yhdensuuntaiset?

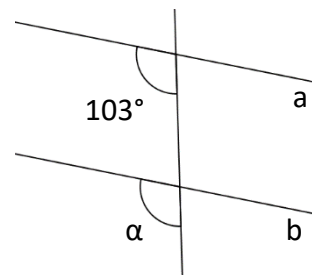


Samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuria, joten

$a \parallel b$.

(Huomaa, miten vastaus ilmoitettiin symbolisesti. Sanallinen perustelu on myös välttämätön.)

b) Kuinka suuri on α , kun suorat a ja b ovat yhdensuuntaiset.

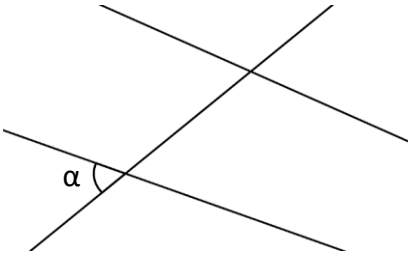


$a \parallel b$ ja samankohtaiset kulmat, joten

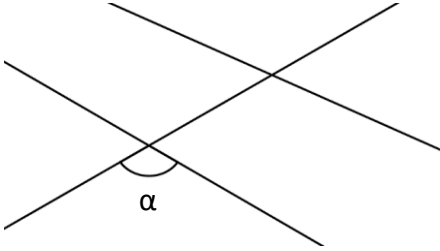
$\alpha = 103^\circ$

(Myös tässä sanallinen perustelu on välttämätön.)

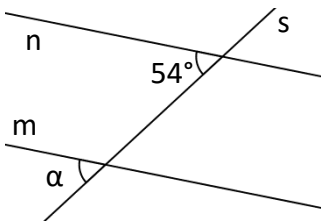
1. Merkitse kuvaan kulman α kanssa samankoh-
tainen kulma.



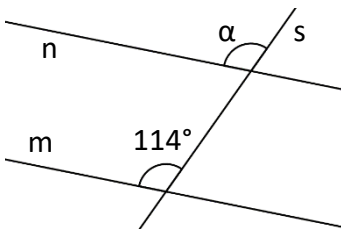
2. Merkitse kuvaan kulman α kanssa samankoh-
tainen kulma.



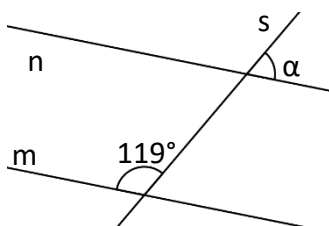
3. Suorat n ja m ovat yhdensuuntaisia. Määritä α .



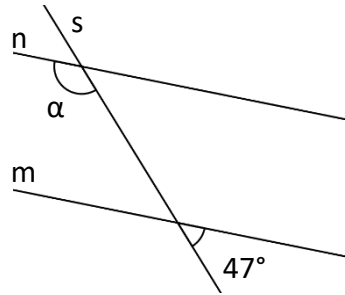
4. Suorat n ja m ovat yhdensuuntaisia. Määritä α .



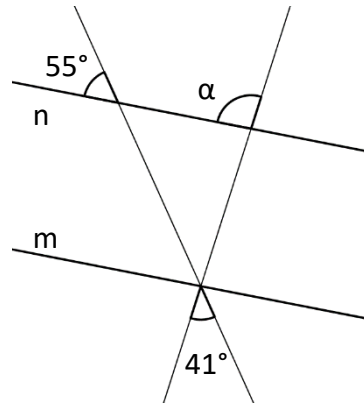
5. Suorat n ja m ovat yhdensuuntaisia. Määritä α .



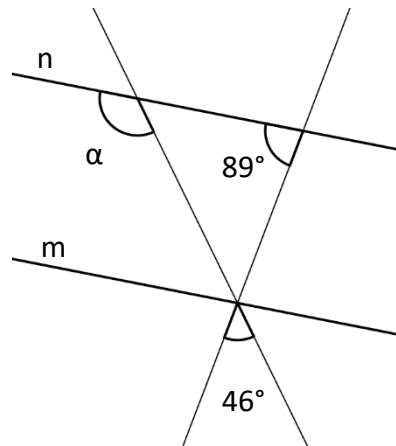
6. Suorat n ja m ovat yhdensuuntaisia. Määritä α .



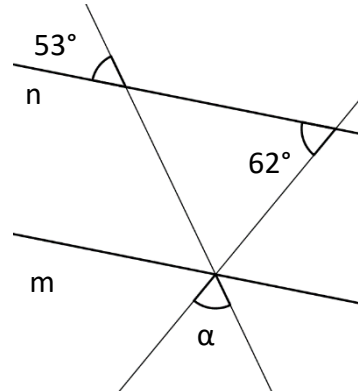
7. Suorat n ja m ovat yhdensuuntaisia. Määritä α .



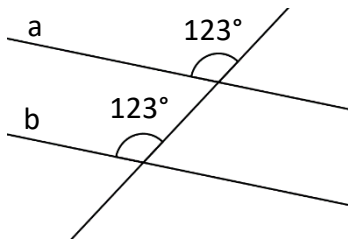
8. Suorat n ja m ovat yhdensuuntaisia. Määritä α .



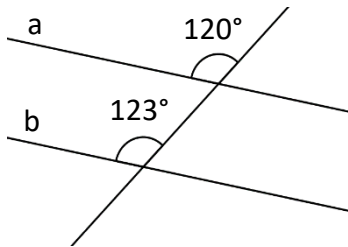
9. Suorat n ja m ovat yhdensuuntaisia. Määritä α .



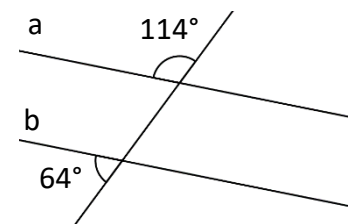
10. Ovatko suorat a ja b yhdensuuntaiset?



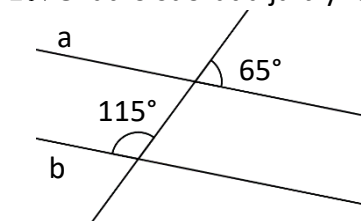
11. Ovatko suorat a ja b yhdensuuntaiset?



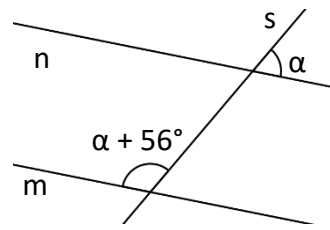
12. Ovatko suorat a ja b yhdensuuntaiset?



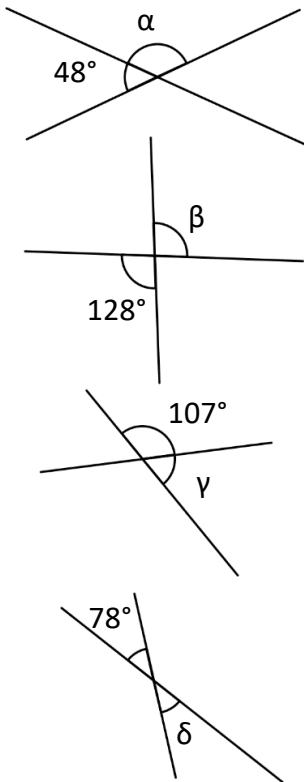
13. Ovatko suorat a ja b yhdensuuntaiset?



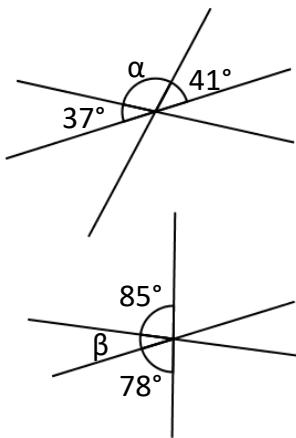
14. Suorat n ja m ovat yhdensuuntaisia.
Määritä α käyttäen yhtälöä.



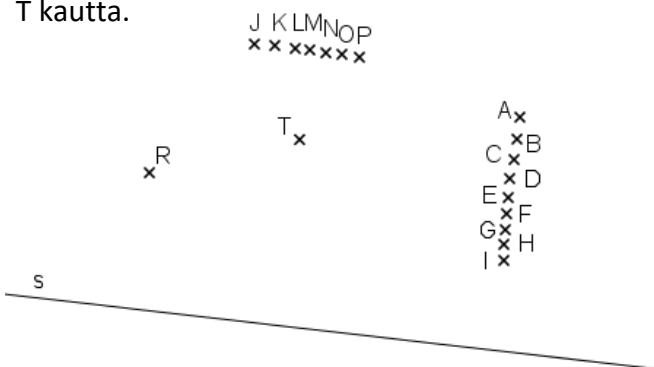
7. Ratkaise kulmat α , β , γ ja δ



8. Ratkaise kulmat α ja β .

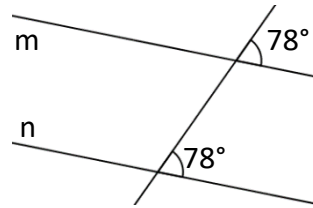


9. Piirrä suoran s kanssa yhdensuuntainen suora pisteen R kautta ja suoralle s normaali pisteen T kautta.

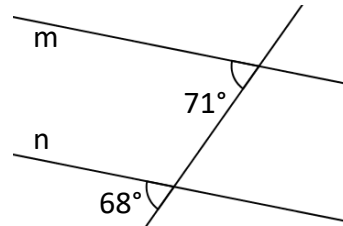


Muista, että seuraavissa tehtävissä vastaukset pitää perustella.

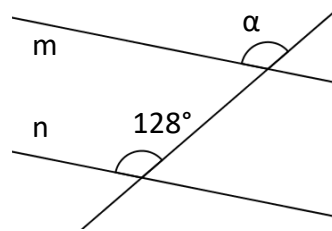
10. Ovatko suorat m ja n yhdensuuntaiset?



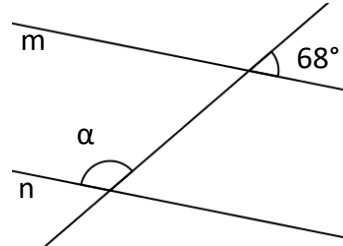
11. Ovatko suorat m ja n yhdensuuntaiset?



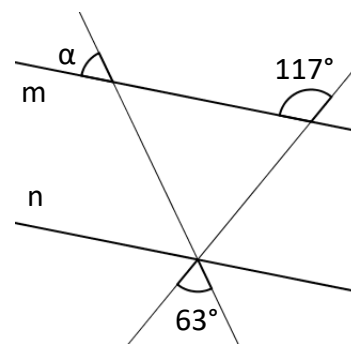
12. Ratkaise α , kun m ja n ovat yhdensuuntaisia



13. Ratkaise α , kun m ja n ovat yhdensuuntaisia



14. Ratkaise α , kun m ja n ovat yhdensuuntaisia

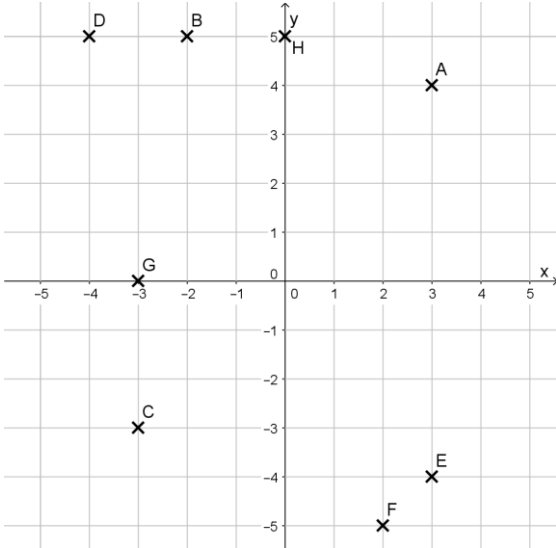


Vastauksia

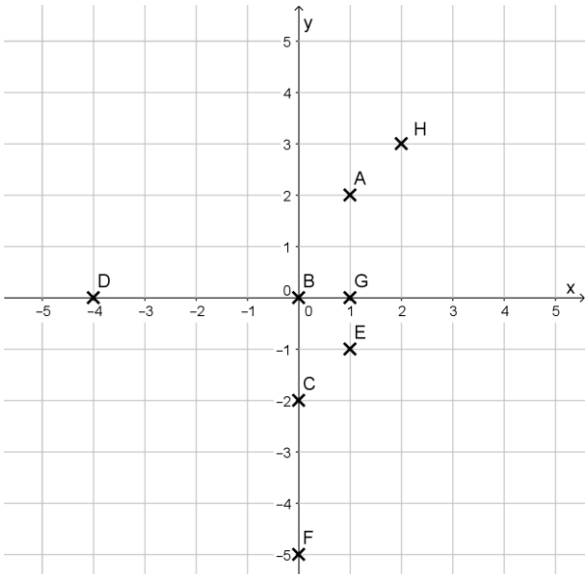
Vastauksia kpl1

1. $A(1, 3)$ $B(3, 2)$ $C(2, -3)$
 $D(-3, -2)$ $E(-3, 3)$ $F(-4, -4)$
 $G(0, -4)$ $H(3, -2)$
2. $A(-5, 1)$ $B(0, -3)$ $C(3, 0)$
 $D(-2, 2)$ $E(0, 4)$ $F(0, 0)$
 $G(0, -4)$ $H(-4, 0)$
3. $A(4,5; 2)$ $B(0, 1)$ $C(5, -3)$
 $D(0, -1)$ $E(-3,5; 1)$ $F(-3, -1)$
 $G(-1,5; 0)$ $H(2, 2)$
4. $A(0, 2)$ $B(-1, -5)$ $C(0, 0)$
 $D(-2,5; -1)$ $E(-1,5; 0)$ $F(4, 3)$
 $G(1, -4)$ $H(-5, 4)$

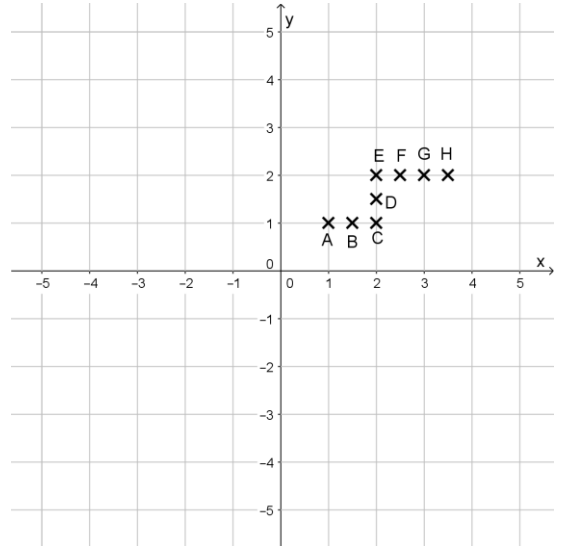
5.



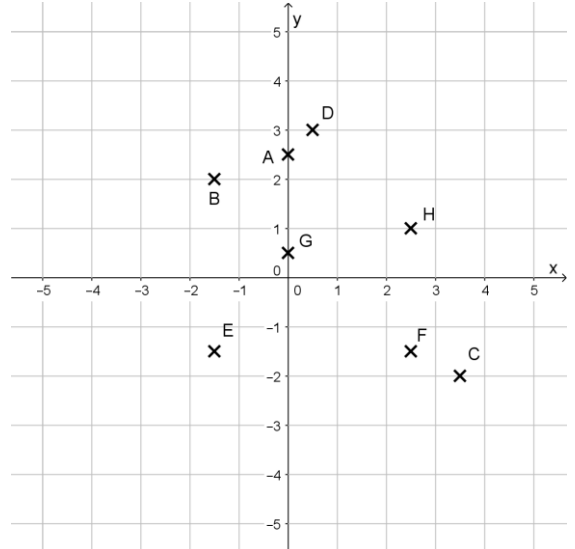
6.



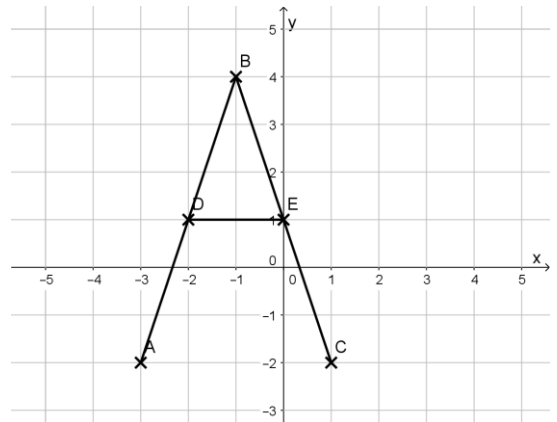
7.



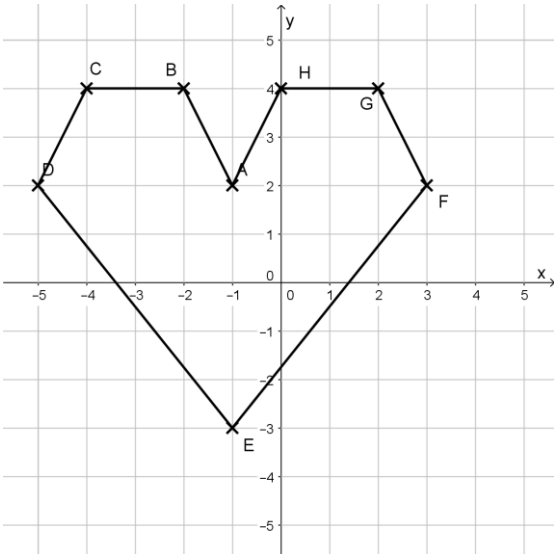
8.



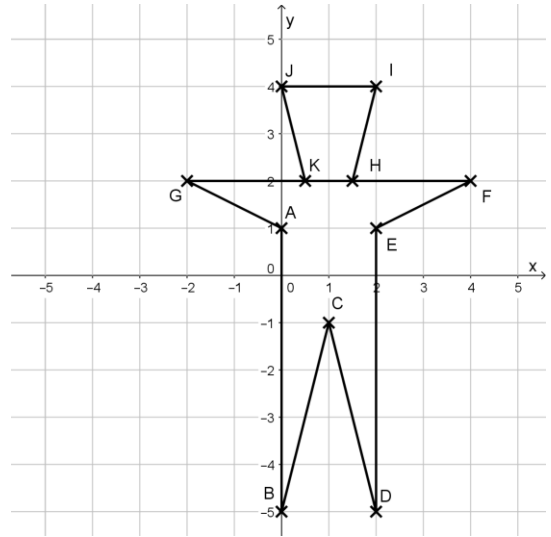
9.



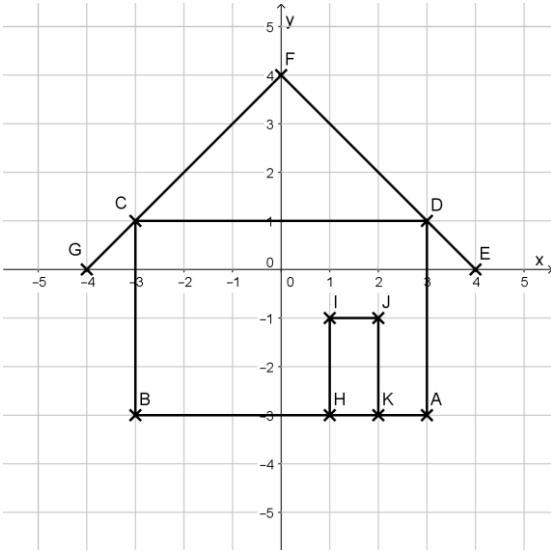
10.



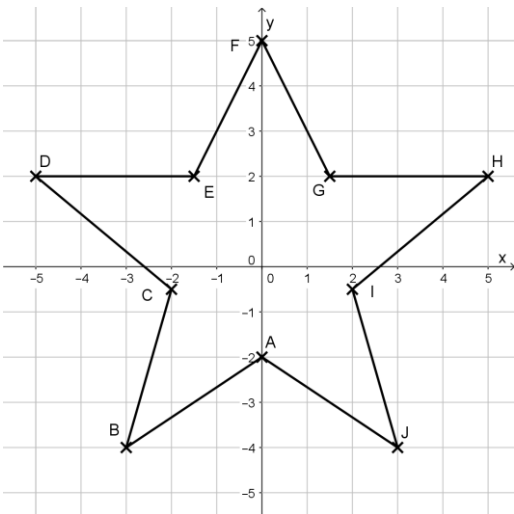
13.



11.



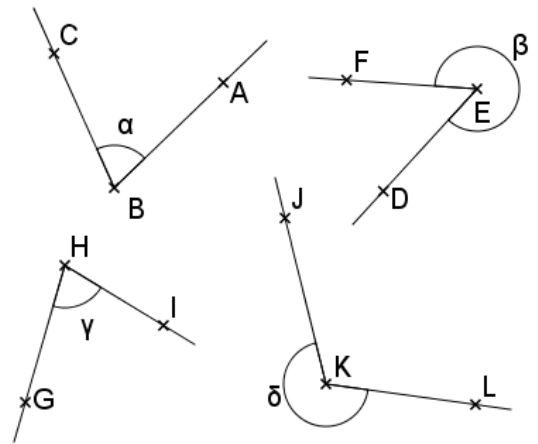
12.



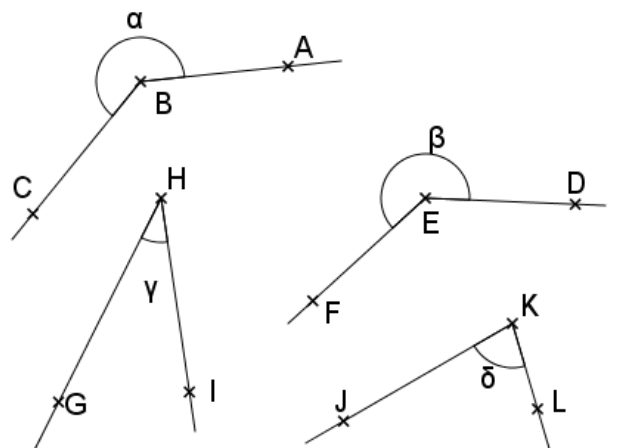
Vastauksia kpl 2

1. $\alpha = \sphericalangle ABC$ $\beta = \sphericalangle FED$
 $\gamma = \sphericalangle JKL$ $\delta = \sphericalangle GHI$
2. $\alpha = \sphericalangle PRT$ $\beta = \sphericalangle MSN$
 $\gamma = \sphericalangle JOX$ $\delta = \sphericalangle KAL$

3.



4.



5. a) A ja C b) B ja F
 c) E d) A, B, C, E ja F
 e) D ja G e) I
 Kulma H = 360° ei ole mitään näistä.

Vastauksia kpl 3

- | | |
|-------------------------------------|----------------------|
| 1. $\alpha = 40^\circ$ | $\beta = 135^\circ$ |
| $\gamma = 250^\circ$ | $\delta = 110^\circ$ |
| $\epsilon = 30^\circ$ | |
| 2. $\alpha = 330^\circ$ | $\beta = 32^\circ$ |
| $\gamma = 180^\circ$ | $\delta = 8^\circ$ |
| 3. a) H1 b) I1 c) E2 d) C2 | |
| 4. a) A4 b) I3 c) K4 d) D5 | |
| 5. $\alpha = 60^\circ$ | $\beta = 43^\circ$ |
| 6. $\alpha = 68^\circ$ | $\beta = 90^\circ$ |
| 7. $\alpha = 45^\circ$ | $\beta = 80^\circ$ |
| $\gamma = 105^\circ$ | $\delta = 44^\circ$ |

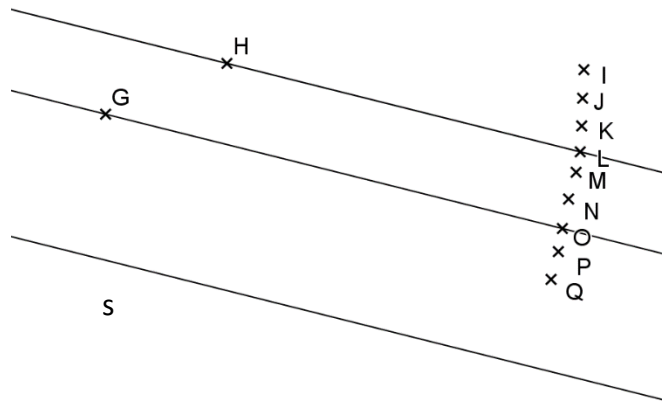
Vastauksia kpl 4

- | | |
|-------------------------|----------------------|
| 1. $\alpha = 45^\circ$ | $\beta = 83^\circ$ |
| $\gamma = 58^\circ$ | $\delta = 132^\circ$ |
| 2. $\alpha = 144^\circ$ | $\beta = 135^\circ$ |
| $\gamma = 41^\circ$ | $\delta = 51^\circ$ |
| 3. $\alpha = 50^\circ$ | $\beta = 94^\circ$ |
| $\gamma = 122^\circ$ | $\delta = 39^\circ$ |
| 4. $\alpha = 132^\circ$ | $\beta = 52^\circ$ |
| $\gamma = 107^\circ$ | $\delta = 78^\circ$ |
| 5. $\alpha = 100^\circ$ | $\beta = 41^\circ$ |
| 6. $\alpha = 100^\circ$ | $\beta = 90^\circ$ |
| 7. $\alpha = 36^\circ$ | $\beta = 36^\circ$ |
| $\gamma = 100^\circ$ | $\delta = 41^\circ$ |
| 8. $\alpha = 43^\circ$ | $\beta = 47^\circ$ |
| $\gamma = 50^\circ$ | $\delta = 40^\circ$ |
| 9. $\alpha = 35^\circ$ | $\beta = 16^\circ$ |
| 10. $\alpha = 48^\circ$ | $\beta = 36^\circ$ |
| 11. $\alpha = 46^\circ$ | $\beta = 60^\circ$ |

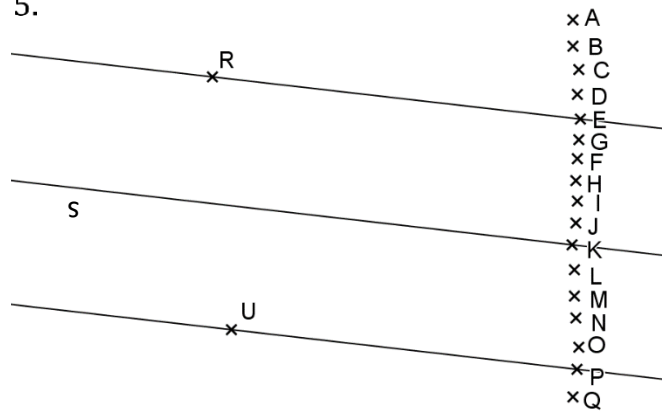
Vastauksia kpl 5

1. a) a || b b) c ≠ d c) e || f

2. a ja c
 3. c ja e
 4.



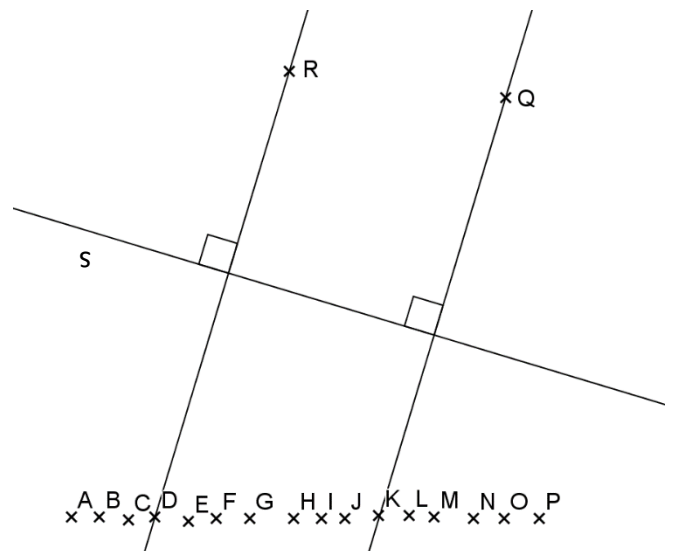
- 5.



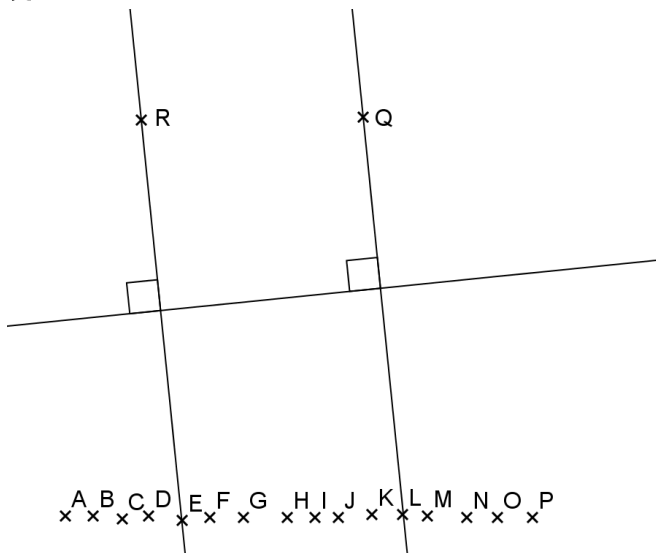
6. Suorat b ja d eli $b \perp s$ ja $d \perp s$

7. c ja e

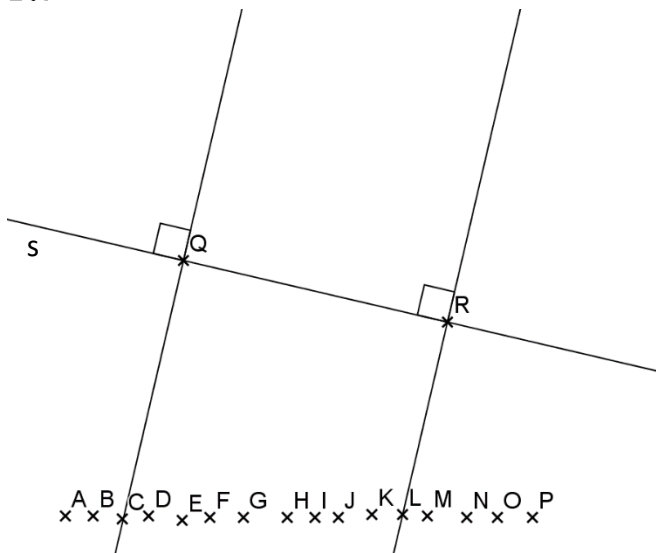
- 8.



9.

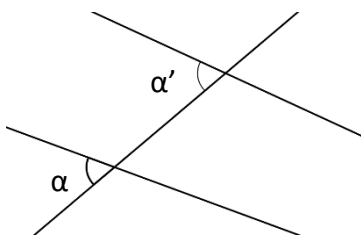


10.

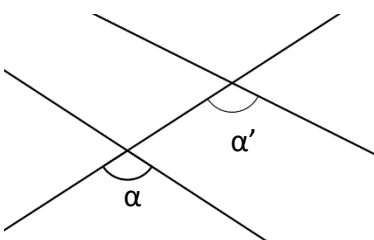


Vastauksia Kpl 6.

1.



2.



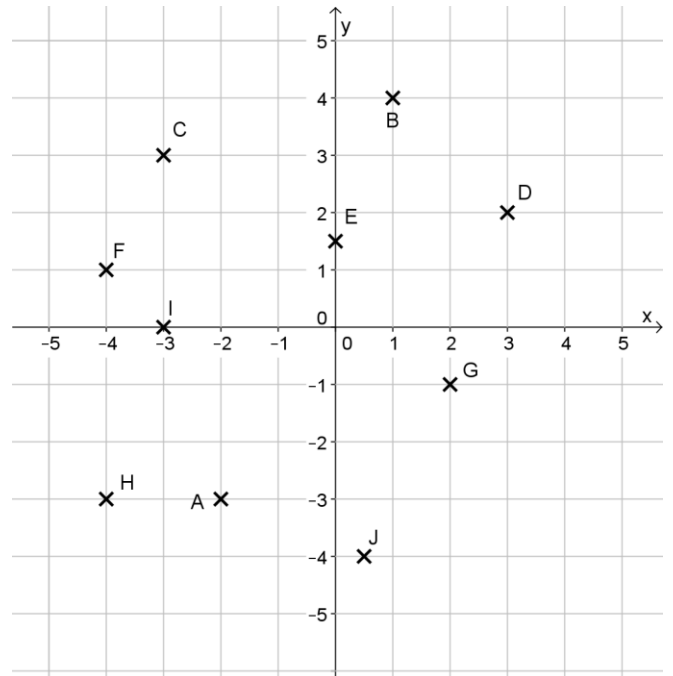
3. $\alpha = 54^\circ$
4. $\alpha = 114^\circ$
5. $\alpha = 61^\circ$
6. $= 133^\circ$
7. $\alpha = 96^\circ$
8. $\alpha = 135^\circ$
9. $\alpha = 65^\circ$
10. Kyllä
11. Ei
12. Ei
13. Kyllä
14. $\alpha = 62^\circ$

Vastauksia Kpl 7

1.

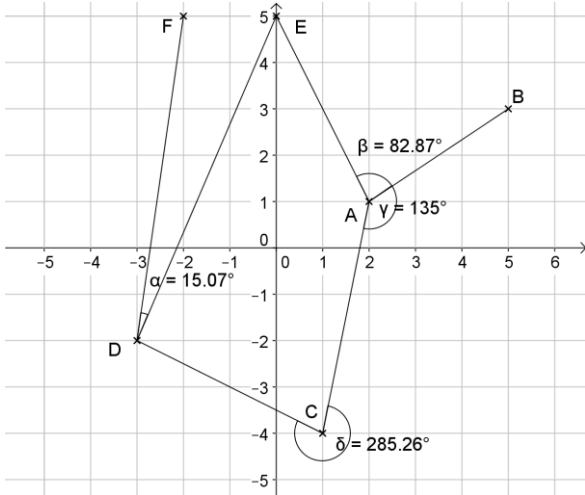
A(2, 3)	F(3, 1)
B(-2, 4)	G(0, -2)
C(-4, -1)	H(1,5; 1)
D(0, 3)	I(-3,5; 2)
E(-3, 0)	J(3,5; -5)

2.



3. $\alpha = \sphericalangle PLQ$ $\gamma = \sphericalangle GHC$
 $\beta = \sphericalangle BAE$ $\delta = \sphericalangle JKD$
4. a) α b) δ c) ei mikään
d) α ja δ e) β ja γ

5. Mitat tarkkoja. Sinulle riittää asteen tarkkuus.

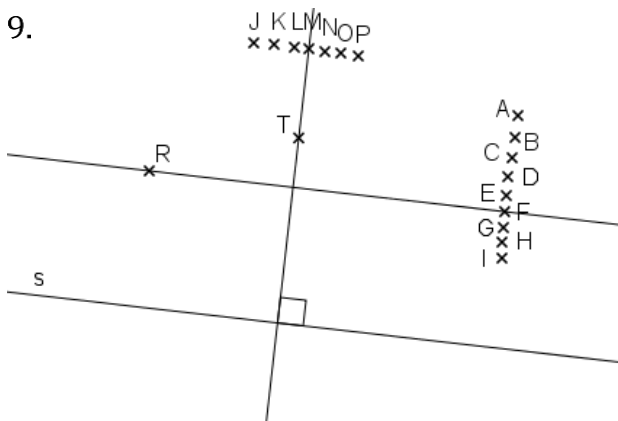


6. Kaveri tarkistaa

7. $\alpha = 132^\circ$ $\gamma = 73^\circ$
 $\beta = 128^\circ$ $\delta = 78^\circ$

8. $\alpha = 102^\circ$ $\beta = 17^\circ$

9.



10. Kyllä

11. Ei

12. $\alpha = 128^\circ$

13. $\alpha = 112^\circ$

14. $\alpha = 54^\circ$