LIAR'S DICE

Avainsanat: noppapeli, odotusarvo, binomijakauma

Välineet: noppia (5 pelaajaa kohden), kuppeja (1 pelaajaa kohden)

Luokkataso: lukio

Pelaajia: 3-5

Pelin valmistelu

Jokaiselle osallistujalle jaetaan kuppi ja viisi (5) noppaa. Kuppien tarkoitus on estää muita pelaajia näkemästä noppia, joten ne eivät saa olla läpinäkyviä.

Säännöt

Peliä pelataan kierroksittain. Kunkin kierroksen alussa pelaajat sekoittavat noppansa ilman, että vastustajat näkevät tuloksen. Pelaaja saa kuitenkin nähdä omat noppansa. Kierroksen aloittaja valitsee jonkin silmäluvun ja koittaa arvioida, kuinka monta kaikilla pelaajilla on tätä silmälukua vähintään yhteensä. Arvaukseksi käy siis esimerkiksi "kolme kakkosta". Silmäluku 1 on jokeri, eli se toimii minä tahansa muuna silmälukuna.

Seuraavalla pelaajalla on kolme vaihtoehtoa: hän voi korottaa silmälukua tai lukumäärää, tai hän voi tarkistaa, bluffaako edeltävä pelaaja. Aikaisempaa esimerkkiä jatkaen toisen pelaajan arvauksiksi käyvät muun muassa "neljä kakkosta" ja "kolme kolmosta". Lukumäärää ja silmälukua on myös mahdollista korottaa samanaikaisesti. Vuoro siirtyy eteenpäin.

Mikäli pelaaja haastaa edeltävän pelaajan arvauksen, kaikki pelaajat paljastavat noppansa ja arvaus tarkistetaan. Jos se pitää, haastava pelaaja menettää yhden nopistaan, ja jos taas ei, arvauksen tehnyt häviää vastaavasti yhden. Vasta tämän jälkeen kierros loppuu ja nopat sekoitetaan jälleen uutta kierrosta varten. Kierroksen aloittanut on seuraavalla kierroksella viimeisenä vuorossa.

Kun pelaajan nopat loppuvat, tämä tippuu pelistä. Pelin voittaa se, joka on viimeisenä pelissä mukana.

Matemaattinen tausta

Pelaajan tulee ennen kaikkea valita jokin silmäluvuista 2-6. Kaikki näistä ovat yhtä todennäköisiä, joten tarkastelun kohteeksi voidaan ottaa näistä mikä tahansa. Pyritään selvittämään lukumäärän tavalla tai toisella todennäköisin arvo, jota kutsutaan *odotusarvoksi.* Se saadaan painottamalla mahdollinen arvo vastaavalla todennäköisyydellä, joten se ilmoittaa todennäköisimmän arvon keskiarvolle.

Kunkin nopan kohdalla arvo ja vastaava todennäköisyys ovat samat: silmäluku (jokeri mukaan lukien) ei esiinny todennäköisyydellä 4/6 ja esiintyy todennäköisyydellä 2/6. Yhdellä nopalla odotusarvo on siis $0 \cdot \frac{4}{6} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$, joten *lukumäärän odotusarvo on kolmasosa noppien määrästä*. Mikäli saatu luku ei ole kokonaisluku, käy järkeen pyöristää tämä alaspäin, sillä tämä hyödyttää pelaajaa enemmän kuin yläkanttiin arvaaminen.

Mitä odotusarvon tunteminen hyödyttää? Se selviää, kunhan tunnetaan lukumääriä vastaavat todennäköisyydet. Tarkastellaan tilannetta, jossa on 15 noppaa, ja kysytään, millä todennäköisyydellä näistä k kappaletta on haluttua silmälukua. 15 nopasta voidaan valita k noppaa *binomikertoimen* $\binom{15}{k}$ ilmoittamalla tavalla. Todennäköisyys sille, että noppa antaa halutun silmäluvun tai jokerin, on 2/6 (k kpl) ja sille, ettei se ole näistä kumpikaan, on 4/6 (loput 15-k kpl). Näin ollen haettu todennäköisyys on

$$\mathrm{P}(\text{tasan } k) = \binom{15}{k} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^{k} \left(\frac{4}{6}\right)^{15-k}$$

eli lukumäärä noudattaa ns. *binomijakaumaa*. Tutkimalla tätä eri muuttujan k arvoilla huomataan, että *odotusarvo* (tai vastaava pyöristetty arvo) *antaa suurimman todennäköisyyden*. Tulos yleistyy mille tahansa määrälle noppia.

Binomijakauma antaa toisen syyn pyöristää odotusarvo alaspäin. Tämän jakauman todennäköisyydet nimittäin kasaantuvat odotusarvon ympärille, sillä binomikerroin $\binom{15}{k}$ saa tällöin suurimmat arvonsa. Tämän näkee helposti ns. *Pascalin kolmiosta:*

0. rivi					1				
1. rivi				1		1			
2. rivi			1		2		1		
3. rivi		1		3		3		1	
4. rivi	1		4		6		4		1
Monesko alkio? →	0.		1.		2.		3.		4.

Kolmiossa esiintyvät luvut ovat binomikertoimen arvoja. Seuraava rivi saadaan edellisestä laskemalla yhteen ne kaksi lukua, jotka ovat halutusta luvusta katsoen viistosti ylhäällä. Rivin 3 kumpikin luku 3 onkin tulosta yhteenlaskusta $1 + 2 = 3$. Kolmion kyljet koostuvat pelkistä ykkösistä. Siis esimerkiksi 4. rivillä oleva luku 6 vastaa kerrointa $\binom{4}{1}$.

Hyödyntämällä saatua tietoa siitä, millä todennäköisyydellä nopista **tasan** odotusarvon verran on haluttua silmälukua, saadaan pelin kannalta olennainen vastaus: millä todennäköisyydellä **ainakin** odotusarvon verran nopista on haluttua silmälukua. Tämä saadaan summaamalla saadut todennäköisyyden yhteen aloittaen odotusarvosta ja lopettaen noppien kokonaismäärään. 15 nopan tapauksessa täksi saadaan noin 59,6 %.

Nyt voidaan päätellä, että aloittavan pelaajan kannattaa valita silmäluku oletusarvoisesti sen mukaan, mitä niistä hänellä on eniten. Tasatilanteessa silmäluvuista kannattaa valita suurin, jotta muiden pelaajien mahdollisuudet korottaa silmälukua vähenisivät. Aloittavaksi lukumääräksi kannattaa ottaa kolmasosa noppien kokonaismäärästä pyöristettynä alaspäin, sillä tämän lukumäärän toteutuminen on todennäköisempää kuin se, ettei niin kävisi.

Vastaavaan periaatteeseen nojautuen voidaan sanoa myös seuraavaa: pelaajan voi odottaa bluffaavan, jos arvattu lukumäärä ylittää odotusarvon varsinkin kahdella tai enemmällä.