

Analyttinen geometria ja vektorit (MAA4)

Koodi

MAA4

Tyyppi

Pakollinen

Laajuus

3 op

Yleiset tavoitteet

Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

- ymmärtää, kuinka analyttinen geometria luo yhteyksiä geometrinen ja algebrallisten käsitteiden välille
- ymmärtää yhtälön geometrisen merkityksen
- osaa ratkaista muotoa $|f(x)| = a$ tai $|f(x)| = |g(x)|$ olevia itseisarvoyhtälöitä
- ymmärtää vektorikäsitteen ja perehtyy vektorilaskennan perusteisiin
- osaa tutkia kaksiulotteisen koordinaatiston pisteitä, etäisyyksiä ja kulmia vektoreiden avulla
- osaa ratkaista tasogeometrian ongelmia vektoreiden avulla
- osaa käyttää ohjelmistoja käyrien ja vektoreiden tutkimisessa sekä niihin liittyvissä sovelluksissa.

Keskeiset sisällöt

- käyrän yhtälö
- suoran, ympyrän ja paraabelin yhtälö
- yhtälöryhmä
- suorien yhdensuuntaisuus ja kohtisuoruus
- itseisarvoyhtälö
- pisteen etäisyys suorasta
- vektoreiden perusominaisuudet
- tason vektoreiden yhteen- ja vähennyslasku sekä tason vektorin kertominen luvulla
- tason vektoreiden pistetulo, tason vektoreiden välinen kulma

LOPS e Perusteista

Eriyttäminen ja tehtävien laadinta

↳ kontekstina MAA4 Analyttinen geometria ja vektorit

vaikeus koostuu sanamuodoista

Semanttinen tiheys

"Yhtälö on kahden lausekkeen yhtäsuuruus..."

Semanttinen vetovoima

"eli jotain yhtä kuin jotain."

avoin
Mikä...?

suljettu
Mikä näistä?

* kurssilla käsitellyt ja sivutut erinäiset viitekehukset

vaikeus monesta yhtä aikaa

sanallinen - kuvallinen - symbolinen
muuttuja \rightarrow x

tunnista - tuota - sovelta
Muodosta yhtälö, kun...

- $y = 5$
- $y = 6x^2$
- $y = 7/x$
- $y = -x + 1$
- $y = 10x$

vaikeus kasvaa tasolta toiselle

vaikeus odotuksista

~ Määritä ympyrän

$$x^2 - 2x + y^2 = 0$$

keskipiste ja säde."

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1$$

$$\underbrace{(x-1)^2}_{x=1} + \underbrace{y^2}_{y=0} = 1 \quad \downarrow \quad r=1$$

" Määritä ympyrän

$$x^2 - 6x + y^2 + 10y = 2$$

keskipiste ja säde."

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 10y + 25 = 2 + 9 + 25$$

$$\underbrace{(x-3)^2}_{x=3} + \underbrace{(y+5)^2}_{y=-5} = 36 \quad \downarrow \quad r=6$$

Case study 1:
Ympyrän yhtälö

"Piirrä käyrä

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5^2$$

xy-koordinaatistoon."

↳ tunnista käyrä \Rightarrow ympyrä

↳ kp $(2, -1)$

↳ $r = 5$

CAS

b) Missä pisteissä
käyrä leikkaa
akselit.

$$x^2 + y^2 = 5^2$$

Piirrä ympyrä

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5^2$$

Case study 2:

Pistetulo

"Määritä ne yksikkövektorit, jotka ovat kohtisuorassa vektorin $\vec{a} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$ suhteen."

a) Määritä x ja y ,
kun $\vec{b} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ja
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

$$\vec{b} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$-3 \cdot x + 2 \cdot y = 0$$

$$2y = 3x$$

$$y = \frac{3}{2}x = \pm \frac{\sqrt{13}}{26}$$

$$|\vec{b}| = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1^2$$

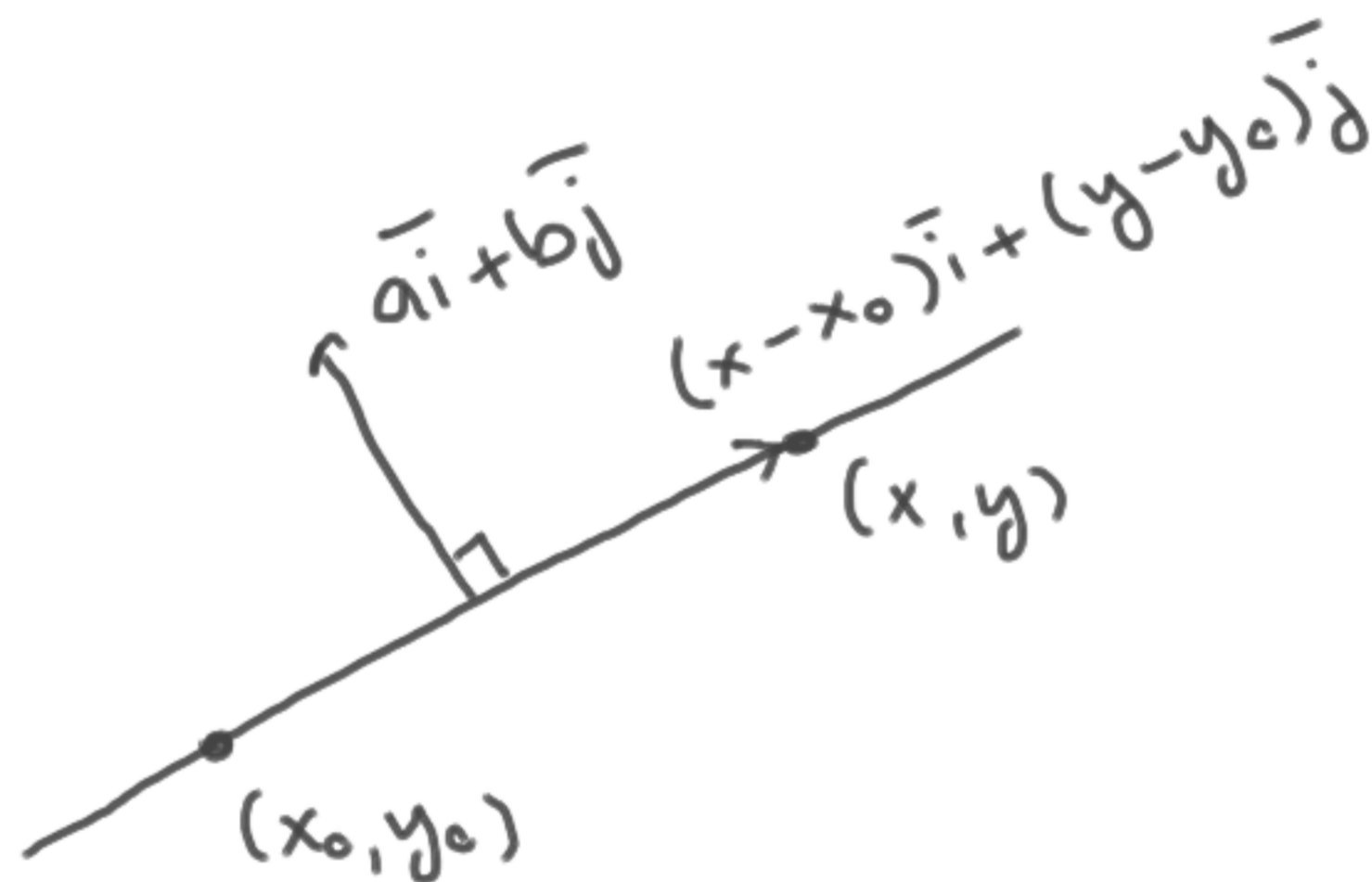
$$x^2 + \left(\frac{3}{2}x\right)^2 = 1$$

$$x^2 + \frac{9}{4}x^2 = 1$$

$$\frac{13}{4}x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{13} \Rightarrow x = \pm \frac{2}{\sqrt{13}} = \pm \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

Välihuomio

Suoran $a(x-x_0) + b(y-y_0) = 0$
normaalivektori on $a\bar{i} + b\bar{j}$.



← Helpottaa tehtävien
laadintaa, kun voi
nähdä suoraan.

← Saattaa olla tuttu
joltakin analyysi-
kurssilta!

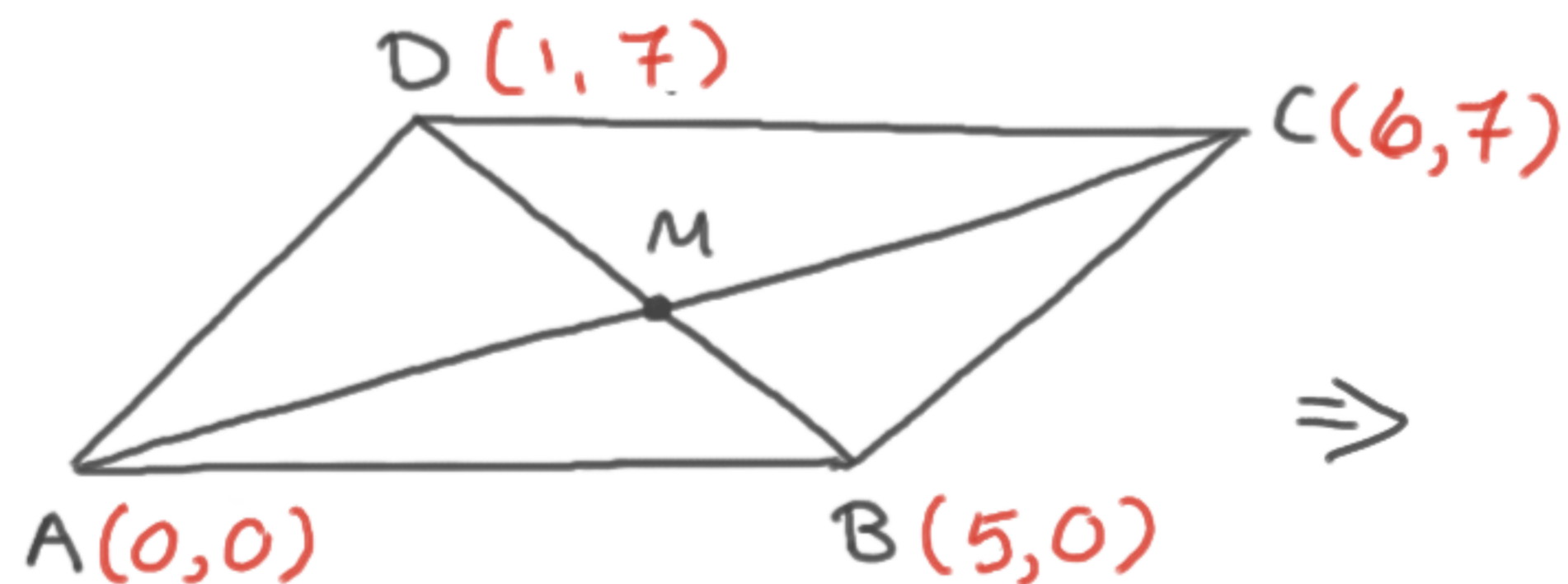
$$a\bar{i} + b\bar{j} \perp (x-x_0)\bar{i} + (y-y_0)\bar{j} \Leftrightarrow$$

\Leftrightarrow

$$(a\bar{i} + b\bar{j}) \cdot ((x-x_0)\bar{i} + (y-y_0)\bar{j}) = 0$$
$$a(x-x_0) + b(y-y_0) = 0$$

Case study 3:
vektoriosoitustehtävä

"Osoita, että suunnikkaan
lävistäjät puolittavat toisensa."



$$\vec{AB} = \vec{a}, \vec{BC} = \vec{b}$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{AB} = \vec{AM} + \vec{MB} \\ &= \lambda \vec{AC} + \theta \vec{DB} \\ &= \lambda(\vec{a} + \vec{b}) + \theta(\vec{a} - \vec{b}) \\ &= \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b} + \theta \vec{a} - \theta \vec{b} \\ &= (\lambda + \theta) \vec{a} + (\lambda - \theta) \vec{b} \end{aligned}$$

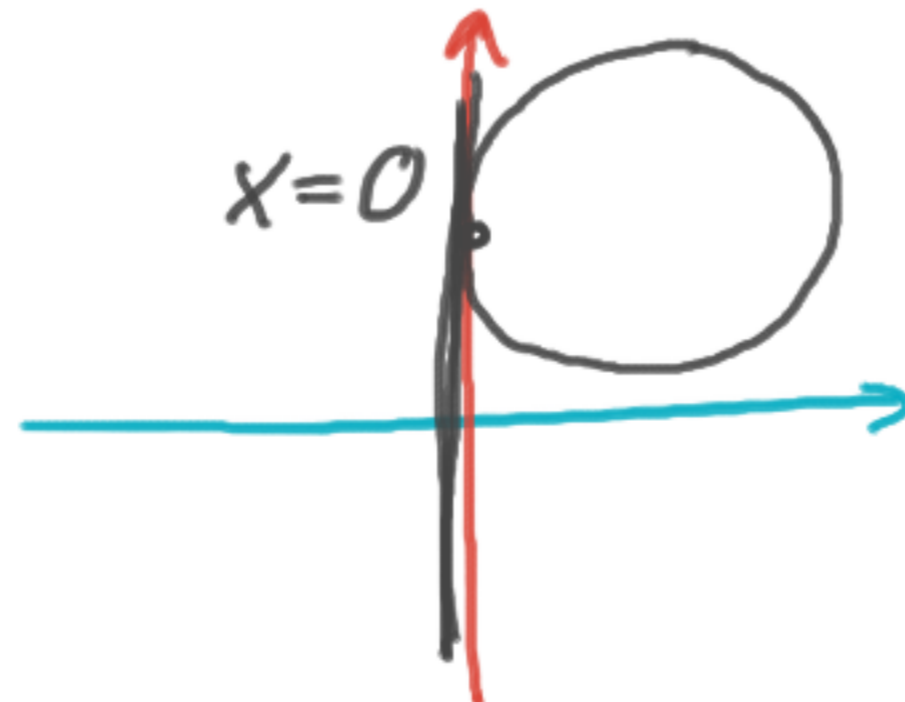
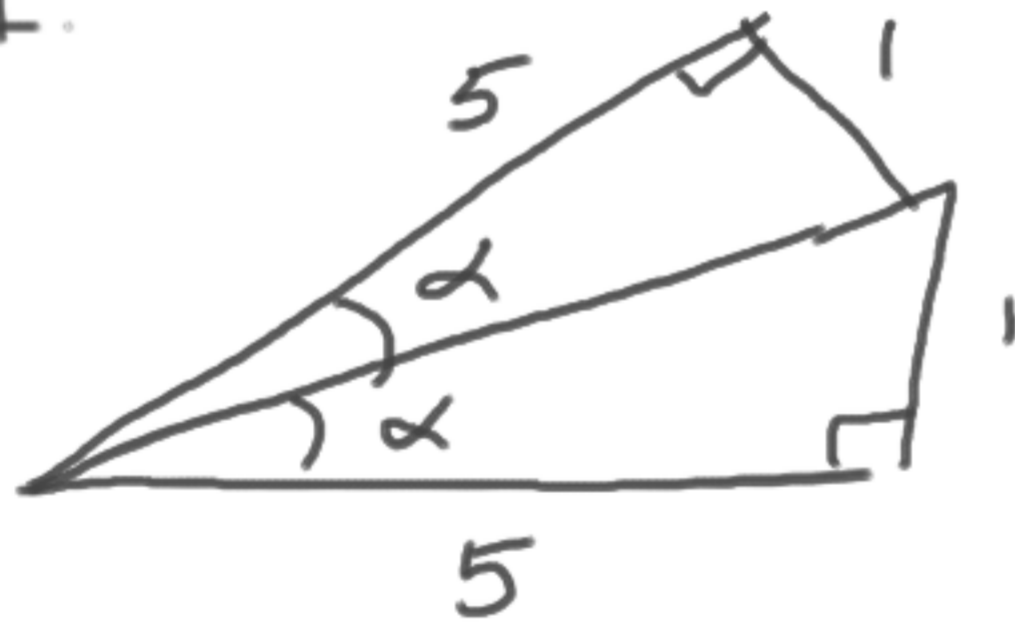
$$+ \begin{cases} \lambda + \theta = 1 \\ \lambda - \theta = 0 \end{cases}$$

$$2\lambda = 1$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{m.o.t. } \square$$

Case study 4:
tutkimustehtävä

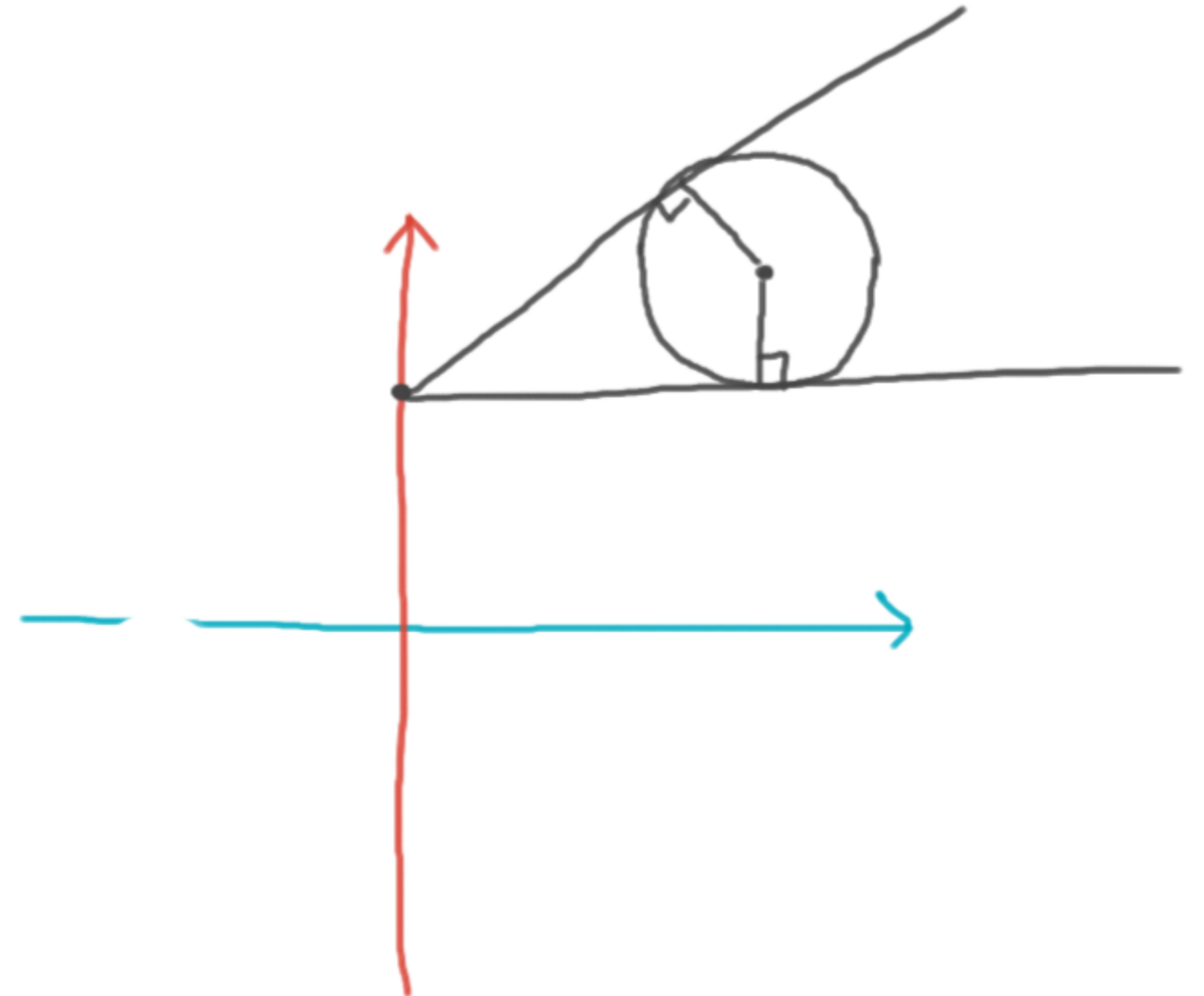
"Etsi kaikki ne suorat,
jotka kulkevat pisteen
(0,4) kautta ja joiden
etäisyys pisteestä (5,5)
on 1."



SOVELLA

Pisteen (x_0, y_0) etäisyys
suorasta $ax+by+c$ on

$$\frac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

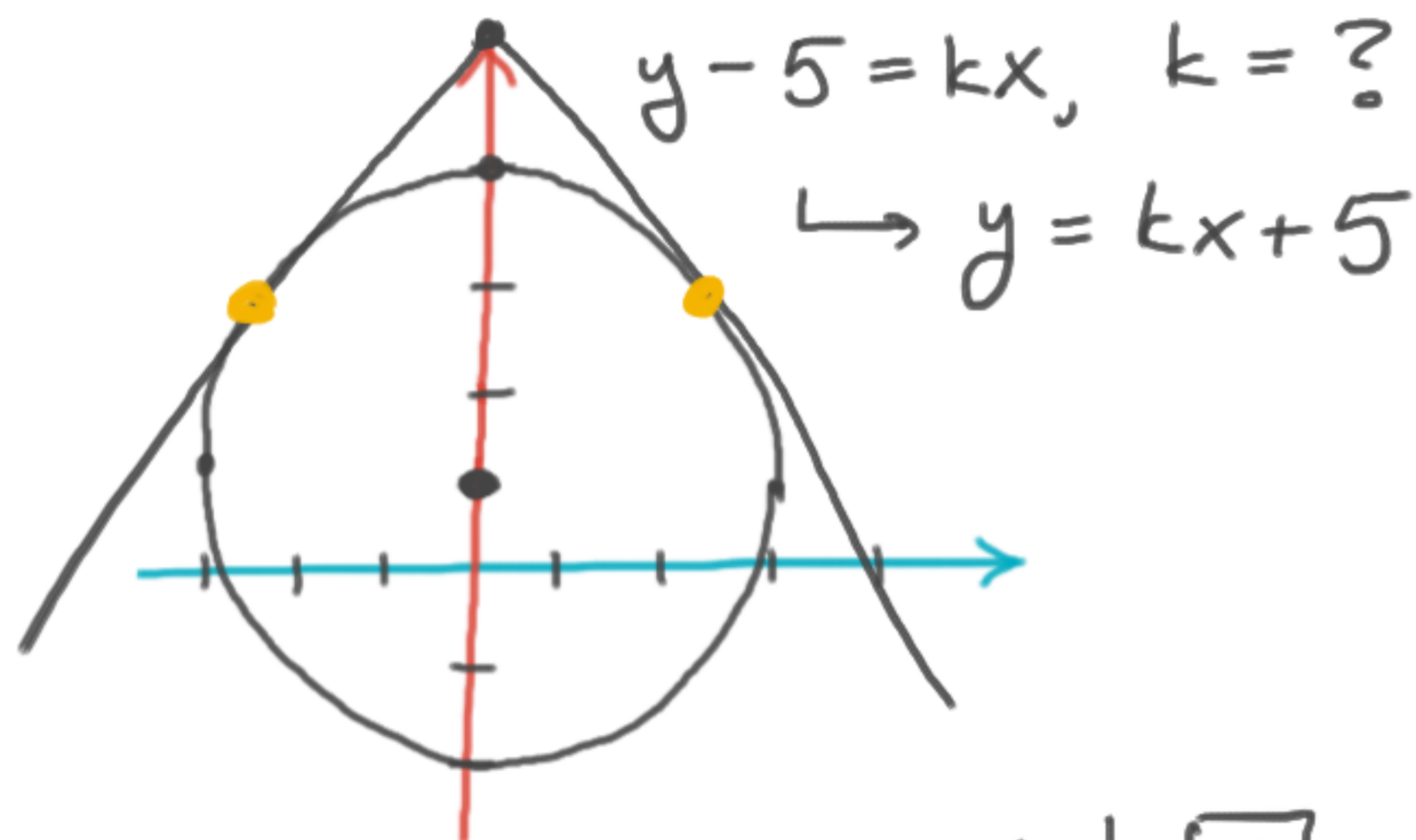


Case study 5:

"Määritä yhtälöt niille ympyrän

$$x^2 + (y-1)^2 = 9$$

tangenteille, jotka kulkevat pisteen $(0, 5)$ kautta."



$$y - 5 = kx, k = ?$$

$$\hookrightarrow y = kx + 5$$

$$y = \pm \frac{1}{3} \sqrt{7} x + 5$$

Geometria

Yhtälöllä $ax^2 + bx + c = 0$
on yksi ja vain yksi
ratkaisu, jossa $b^2 - 4ac = 0$.

Ympyrällä ja sen tan-
gentilla on yksi ja vain
yksi leikkauspiste.

$$x^2 + (kx + 5 - 1)^2 = 9$$

$$x^2 + (kx + 4)^2 = 9$$

$$x^2 + k^2 x^2 + 2 \cdot 4 \cdot kx + 4^2 = 9$$

$$(1 + k^2)x^2 + 8kx + 7 = 0$$

$$D = 0 \Leftrightarrow (8k)^2 - 4 \cdot (1 + k^2) \cdot 7 = 0$$

$$64k^2 - 28(1 + k^2) = 0$$

$$64k^2 - 28 - 28k^2 = 0$$

$$36k^2 - 28 = 0$$

$$k = \pm \sqrt{\frac{28}{36}} = \pm \sqrt{\frac{4 \cdot 7}{6^2}} = \pm \frac{1}{3} \cdot \sqrt{7}$$

$$y = \pm 2x$$

$$k = \pm 2$$

$$k^2 = 4$$

$$k^2 - 4 = 0$$

$\underbrace{\quad}$ $\underbrace{\quad}$
 b^2 $4 \cdot 1 \cdot 1$

$$x^2 + kx + 1 = 0$$

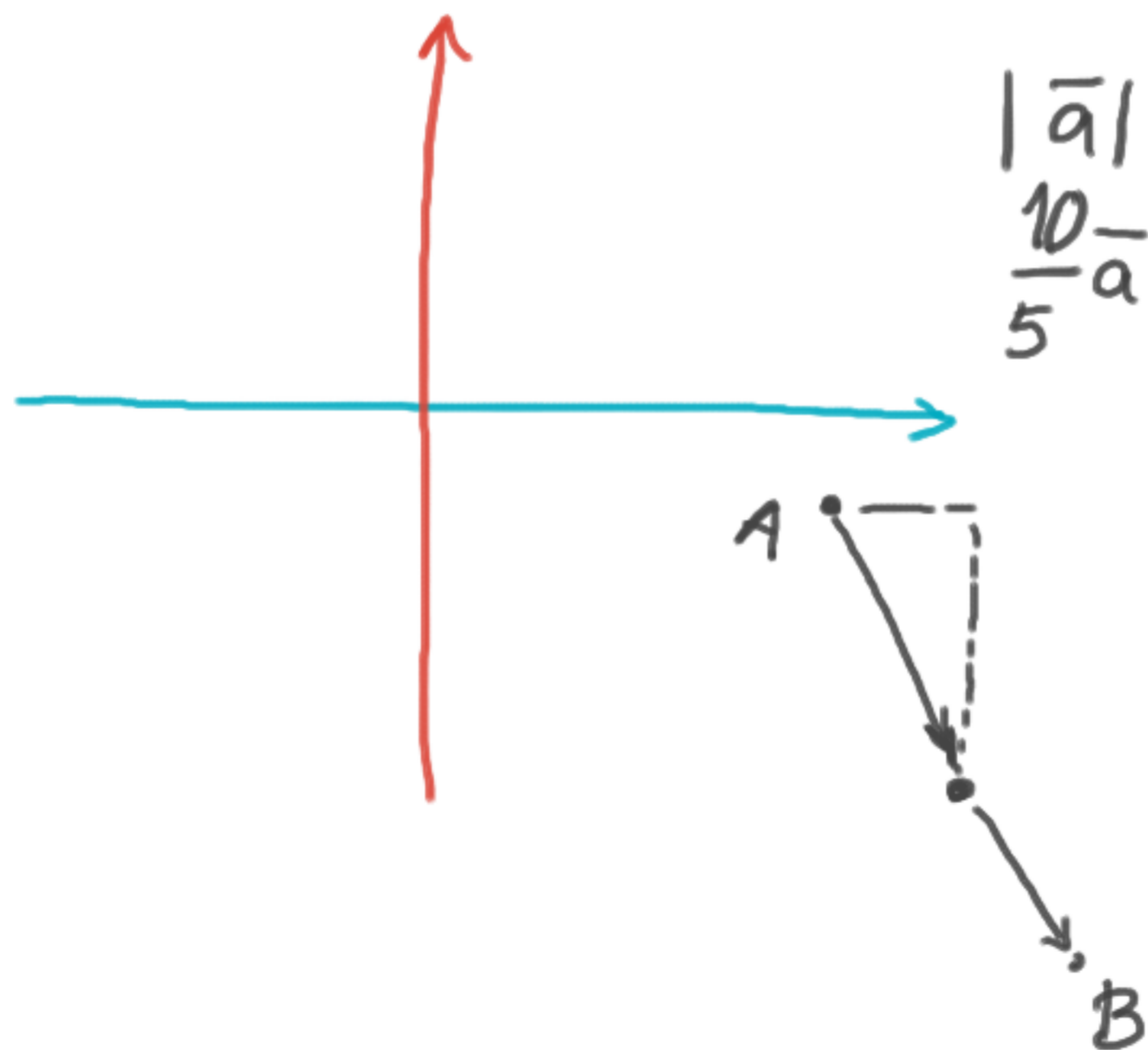
Case study 6:

"Pisteestä $(5, -1)$ kuljetaan

vast. 10 yksikköä vektorin $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ ↗

$$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{a}$$

↖ suuntaisesti. Mihin pisteeseen
tällöin päädytään?"



$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$
$$\frac{10}{5}\vec{a} = 6\vec{i} - 8\vec{j}$$

$$A(5, -1) \Rightarrow \vec{OA} = 5\vec{i} - \vec{j}$$

$$\vec{OB} = \vec{OA} + 2\vec{a}$$

$$= 5\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{i} - 8\vec{j}$$

$$= 11\vec{i} - 9\vec{j} \Rightarrow B(11, -9)$$

Vektorin \vec{a} , $\vec{a} \neq \vec{0}$,
yksikkövektori on

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \equiv \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$$

Pisteeseen $A(a, b)$

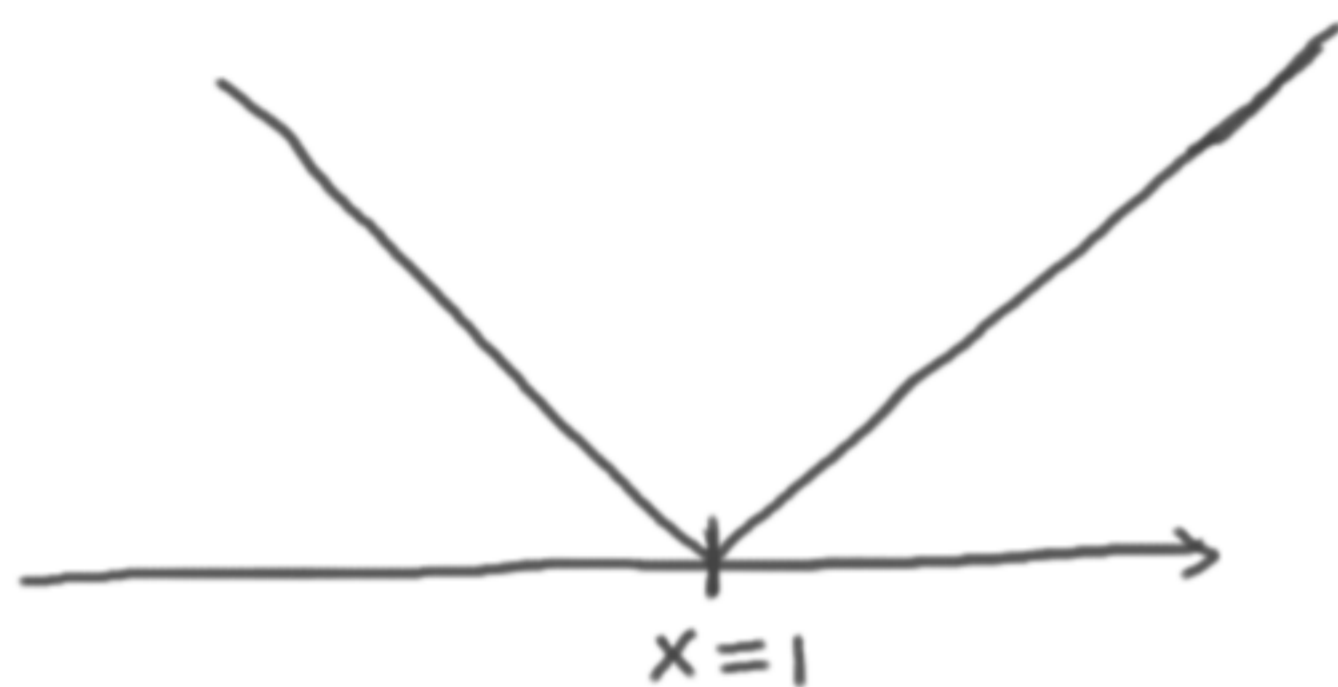
paikkavektori on

$$\vec{OA} = a\vec{i} + b\vec{j}$$

Case study 7: Itseisarvoyhtälöt

"Ratkaise

$$|x-1| = 7."$$



$$x-1 = 7, \text{ kun } x \geq 1$$

$$x = 1+7 = 8$$

$$x-1 = -7, \text{ kun } x < 1$$

$$x = 1-7 = -6$$

$$|(x-2)(x+3)| = 7$$

$$\text{Solve } (|(x-2)(x+3)| = 7, x)$$

$$\gg x = \quad \text{or } x =$$

Abitti

A Speedcrunch

B CAS

lopputevennys

Mikä on ratkaisu yhtälölle

$$2x = 7? \quad || :2$$

$$x = \frac{7?}{2} = 3,5?$$

Mikä on yhtälön

$$2x = 7$$

ratkaisu?