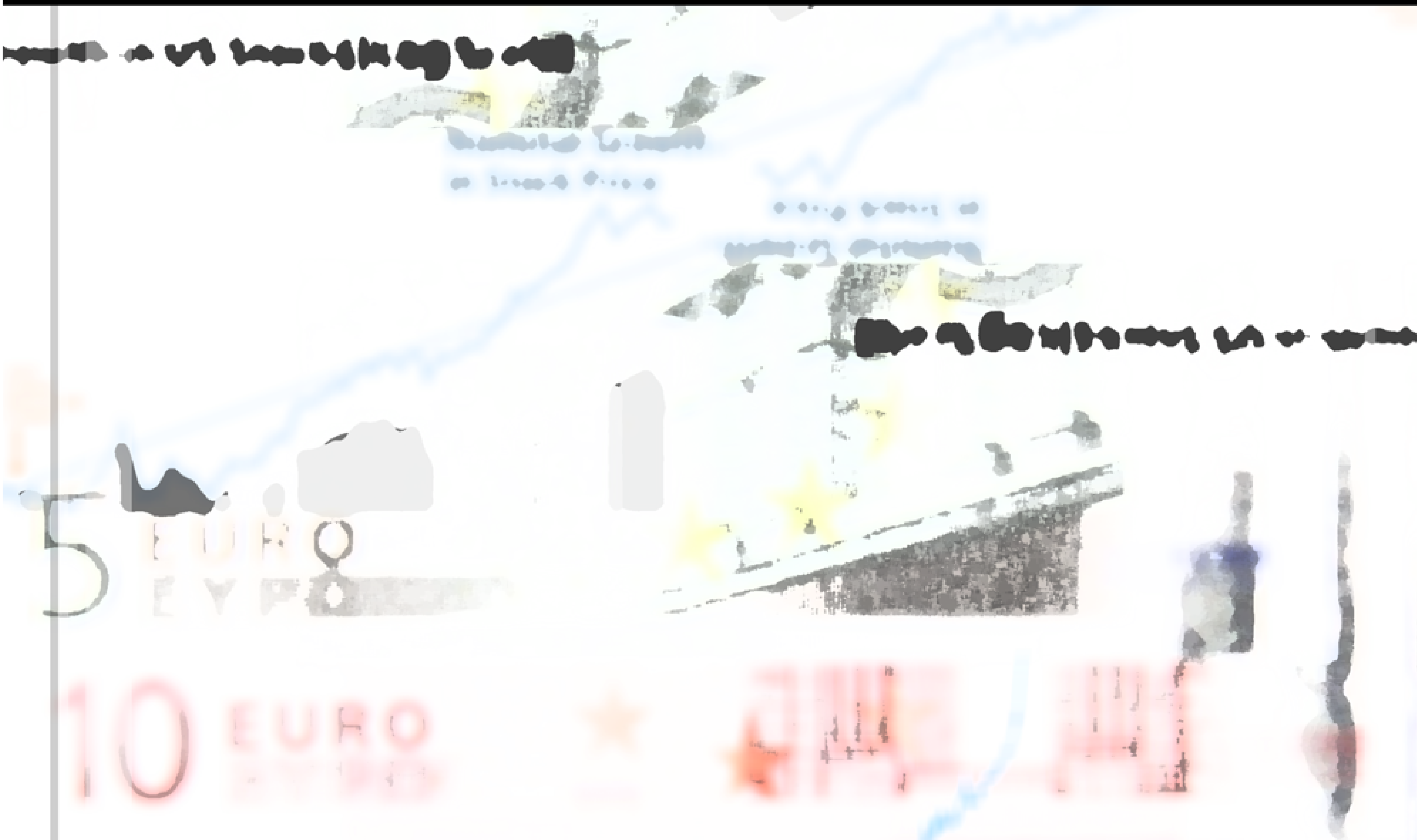
TALOUSMATEMATIIKKA

14. toukokuuta 2014



TOMI HOVIARO

Sisältö

1 Suhde

Erilaisten suuruuksien vertaamiseen käytetään **suhdetta**. Suhde tarkoittaa kahden luvun vertailua. Vertailu tehdään lukujen matemaattisena suhteena. Suhde voidaan ilmaista murtolukuna, desimaalilukuna tai prosenttina.

: Prosentti %

lat. *Pro centum* (sadasta)

$$\frac{1}{100} = 0{,}01 = 1\ \%$$

Jos suhde on pieni, voidaan prosentin sijaan käyttää toista suhdeyksikkö, promillea.

: Promille ‰

lat. *Pro mille* (tuhannesta)

$$\frac{1}{1\ 000} = 0{,}001 = 1\ ‰$$

Esimerkki 1

Kun luku muunnetaan prosenteiksi, luku kerrotaan luvulla 100. Kun prosentti muunnetaan luvuksi, prosenttiluku jaetaan luvulla 100. Kun luku muunnetaan promilleiksi, luku kerrotaan luvulla 1000. Kun promille muunnetaan luvuksi, promilleluku jaetaan luvulla 1000.

a) $0,23 = 0,23 \cdot 100\ \% = 23\ \%$

b) $2,05 = 2,05 \cdot 100\ \% = 205\ \%$

c) $\dfrac{7}{25} = \dfrac{28}{100} = 28\ \%$

d) $8\ ‰ = \dfrac{8}{1000} = \dfrac{1}{125} = 0,008$

e) $400x\ ‰ = \dfrac{400x}{1000} = \dfrac{4x}{10} = 0,4x$

f) $62\pi r^2\ \% = \dfrac{62\pi r^2}{100} = 0,62\pi r^2$

Prosentit voidaan muuntaan promilleiksi

$$a\ \% = \frac{a}{100} = \frac{10a}{1000} = 10a\ ‰$$

eli

$$1\ \% = 10\ ‰ \quad \text{tai} \quad 0,1\ \% = 1\ ‰$$

Esimerkki 2

a) $0,08\ \% = 0,08 \cdot 10\ ‰ = 0,8\ ‰$

b) $\frac{2}{5}\ \% = \frac{2}{5} \cdot 10\ ‰ = \frac{20}{5}\ ‰ = 4\ ‰$

c) $5x\ ‰ = 5x \cdot 0,1\ \% = 5x \cdot \frac{1}{10}\ \% = \frac{5x}{10}\ \% = \frac{1}{2}x\ \%$

a) $a \cdot 10^n\ \% = a \cdot 10^n \cdot 0,1\ ‰ = a \cdot 10^n \cdot 10^{-1}\ ‰ = a \cdot 10^{n-1}\ ‰$

Huomaa, että prosentti ja promille ovat suhdelukuja, joiden suuruus riippuu vertailtavista luvuista. Täten prosentit tai promillet eivät välttämättä ole suoraan verrattavissa toisiinsa. Aina on tiedettävä, mistä perusarvosta suhdeluku on laskettu.

1.1 Prosenttikerroin

Laskettaessa prosenttilaskuja käytetään osuuden mittana usein desimaalilukua. Tätä lukua sanotaan **prosenttikertoimeksi**. Jos prosenttikertoimella on päättymätön desimaaliesitys ja halutaan käyttää tarkkoja arvoja, prosenttikerroin voi olla myös murtolukumuodossa. Esimerkiksi

$$\frac{1}{3} = 0,333\ldots \approx 33\ \%$$

Huomaa, että prosenttiluku ei vastaa aina täysin prosenttikerrointa, vaan prosenttikerroin on pääteltävä aina kyseisestä tilanteesta.

Esimerkki 3

Olkoon tuotteen hinta 100 €. Tuotteen hinta laskee ensin 5 % ja sen jälkeen kysynnän noustessa hintaa nostetaan 8 %. Hinnanalennus 5 % on prosenttikertoimena $0,05$, jolloin alennuksen määrä on

$$0,05 \cdot 100 \text{ €} = 5 \text{ €}.$$

Alennettua hintaa laskettaessa prosenttikerroin on

$$100\% - 5\% = 95\% = 0,95$$

jolloin uusi hinta on

$$0,95 \cdot 100 \text{ €} = 95 \text{ €}.$$

Kun hintaa korotetaan, prosenttikerroin on

$$100\% + 8\% = 108\% = 1,08$$

jolloin uusi hinta on

$$1,08 \cdot 95 \text{ €} = 102,60 \text{ €}.$$

Esimerkki 4

Mistä luvusta 23% on 12 445?

Muodostetaan yhtälö, missä tuntematon arvo on x. Prosenttikerroin on $0,23$.

$$x \cdot 0,23 = 12\ 445$$

$$x = \frac{12\ 445}{0,23}$$

$$x \approx 54\ 109$$

1.2 Prosentuaalinen määrä

Prosenttuaalista määrää laskettaessa prosenttiluku muutetaan prosenttikertoimeksi.

Kun määritetään, kuinka monta prosenttia jokin luku a on jostakin toisesta luvusta b, lasketaan osamäärä $\frac{a}{b}$, joka muutetaan prosenteiksi. Tätä suhdetta sanotaan **vertailuprosentiksi**.

Esimerkki 5

Tomi talletti 3 500 € pankin A säästötilille, jonka vuosittainen korko on $1,2$ %. Timo talletti pankin B tilille saman pääoman ja sai vuoden päästä $45,50$ €. Kuinka paljon Tomi sai pääomalleen korkoa? Mikä oli pankin B talletuskorko? Kumpi pankki tarjosi paremman talletusvaihtoehdon?

Korko on $1,2$ %, eli vuoden päästä pääoma on kasvanut 1,2 %. Laskettaessa rahasummaa, joka lisätään pääomaan vuoden päästä, prosenttikerroin on 0,012. Korko rahana on

$$0,012 \cdot 3\ 500 \text{ €} = 42 \text{ €}$$

Uusi pääoma rahana on

$$3\ 500 \text{ €} + 42 \text{ €} = 3\ 542 \text{ €}.$$

Samaan tulokseen päädytään, kun lasketaan prosenttikertoimella 1,012

$$1,012 \cdot 3\ 500\ € = 3\ 542\ €.$$

Kun lasketaan pankin B korko, verrataan korkona saatua rahaa pääomaan.

$$\frac{45,50\ €}{3\ 500\ €} = 0,013$$

Korkoa vastaava prosenttikerroin on siis $0,013$. Korkoprosentti on $1,3\ \%$, joten pankin B talletusvaihtoehto on parempi.

1.3 Muutosprosentti

Kun halutaan kuvata muutosta prosentteina, puhutaan **muutosprosenteista**. Muutosprosenttia laskettaessa on aina huomioitava, mistä perusarvosta muutos tapahtuu. Muutoksen suuruuden määrittäminen tehdään aina suhteessa perusarvoon. Muutosprosentin suuruus saadaan usein tulkitsemalla prosenttikerrointa.

Esimerkki 6

Kuinka monta prosenttia luku 65 on suurempi kuin luku 50?

Muutoksen suuruus on $65 - 50 = 15$. Vertaillaan muutosta perusarvoon

$$\frac{15}{50} = 0,30 = 30\ \%\ \textbf{suurempi}$$

Esimerkki 7

Kuinka monta prosenttia luku 50 on pienempi kuin luku 65?

Muutoksen suuruus on $65 - 50 = 15$. Vertaillaan muutosta perusarvoon

$$\frac{15}{65} \approx 0,23 = 23\ \%\ \textbf{pienempi}$$

1.4 Prosenttiyksikkö

Prosenttien muutoksia voidaan ilmaista myös prosentteina. Prosenttiyksiköillä voidaan laskea kuten millä tahansa muullakin yksiköllä. Huomio aina, milloin kyseessä on prosentuaalinen muutos ja milloin prosenttiyksikön muutos.

Esimerkki 8

Muutos 3 prosentista 4 prosenttiin on yhden prosenttiyksikön muutos, mutta prosentuaalisena muutoksena korko muuttui noin 33 prosenttia, sillä

$$\frac{4-3}{3} = \frac{1}{3} \approx 33\%$$

1.5 Keskimääräinen muutos

Kun tarkasteltavina on prosenttiyksiköt, keskimääräinen prosenttiyksikkö voidaan laskea aritmeettisena keskiarvona. Kuitenkin keskimääräistä muutosta määritettäessä ei voida käyttää aritmeettista keskiarvoa.

Jos tuotteen hinta a kasvaa ensin 50 % ja sitten 80 %, niin hinta kasvaa kokonaisuudessaan

$$1,50 \cdot 1,80a = 2,7a.$$

Kasvuprosenttien keskiarvo on $\dfrac{50\ \% + 80\ \%}{2} = 65\ \%$. Käyttämällä tätä keskimääräisenä kasvuprosenttina päädytään virheelliseen tulokseen

$$1,65 \cdot 1,65a = 2,7225a.$$

Keskimääräistä muutosprosenttia määritettäessä pitää laskea kasvuprosenttien ns. **geometrinen keskiarvo**.

: Geometrinen keskiarvo

Positiivisten lukujen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ geometrinen keskiarvo on

$$G(\overline{\mathbf{x}}) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

Esimerkki 9

Tuotteen hinta kasvaa joka kuukausi seuraavasti 1%, 2%, 3% ja 4%. Määritetään keskimääräinen muutosprosentti. Vastaavat prosenttikertoimet ovat $1,01$, $1,02$, $1,03$ ja $1,04$. Olkoon tuotteen hinta a. Tuotteen hinta neljän kuukauden jälkeen on

$$1,01 \cdot 1,02 \cdot 1,03 \cdot 1,04a \approx 1,104a.$$

Keskimääräinen muutosprosentti on

$$\begin{aligned}
q^4 a &= 1,104a \quad || : a \neq 0 \\
q^4 &= 1,104 \quad || \sqrt[4]{(\ )} \\
q &= \pm\sqrt[4]{1,104} \quad ||(\text{negatiivinen ratkaisu hylätään}) \\
q &\approx 1,025
\end{aligned}$$

Hinta muuttui keskimäärin noin $102,5\% - 100\% = 2,5\%$ kuukaudessa.

Esimerkki 10

Tuoteen hintaa a nostetaan ensin 1,1 % ja sen jälkeen hinta nousee joka kuukausi 1 % kolmen kuukauden ajan. Kuinka monta prosenttia hintaa on nostettava viidentenä kuukautena, jotta keskimääräinen muutosprosentti olisi 2 %?

Taulukoidaan prosenttikertoimet vuosittain.

Kuukausi	Prosenttikerroin
1	$1,011$
2	$1,011 \cdot 1,01 \approx 1,021$
3	$1,011 \cdot 1,01^2 \approx 1,031$
4	$1,011 \cdot 1,01^3 \approx 1,042$
5	x

Näiden prosenttikertoimien keskimääräinen muutosprosentti q on oltava 2 %.
Muodostetaan yhtälö

$$\begin{aligned}
\sqrt[5]{1,011^4 \cdot 1,01 \cdot 1,01^2 \cdot 1,01^3 \cdot x} &= 1,02 \qquad ||(\ )^5 \\
1,011^4 \cdot 1,01^5 \cdot x &= 1,02^5 \qquad || : (1,011^4 \cdot 1,01^5) \\
x &= \frac{1,02^5}{1,011^4 \cdot 1,01^5} \\
x &\approx 1,0055
\end{aligned}$$

Viidennen kuukauden kasvuprosentti on oltava noin $0,55$ %.

HARJOITUKSET

1. *Kuinka monta prosenttia luku 50 on luvusta a) 100 b) 200 c) 75 d) 50 ?*

2. *Kuinka monta prosenttia luku 3 on luvusta a) 23 b) 1000 c) 334,2 d) 2 ?*

3. *Kuinka monta prosenttia luku 123 on luvusta a) 25 b) 126 c) 2,2 d) 0,003 ?*

4. *Kuinka monta promillea luku 11 on luvusta a) 110 b) 1100 c) 2404 d) 1,15 ?*

5. *Kuinka monta promillea on luku a)* 1% *b)* $\frac{1}{2}$ *c)* $0,0003$ *d)* $\frac{0{,}015}{0{,}15}$ *?*

6. *Kuinka paljon on* 15 *% luvusta a) 100 b) 25 c) 1 d) 0,15 ?*

7. *Kuinka paljon on* $0,12\%$ *luvusta a)* 100 *b)* $0,101$ *c)* $0,0012$ *d)* 11222 *?*

8. *Kuinka paljon on* 22 *‰ luvusta a) 100 b) 25 c) 1 d) 0,15 ?*

9. *Kuinka monta prosenttia luku 50 on a) suurempi kuin luku 42 b) pienempi kuin luku 54?*

10. *a) Kuinka monta prosenttia luku 123 on pienempi kuin luku 321? b) Kuinka monta prosenttia luku 321 on suurempi kuin luku 123?*

11. *Määritä se luku* x*, joka on* 23% *suurempi kuin luku 88.*

12. *Määritä se luku* x*, joka on* 44% *pienempi kuin luku 20.*

13. *Määritä sellainen luku* y*, joka on* 34% *pienempi kuin luku 15. Määritä sellainen luku* x*, joka on* 34% *suurempi kuin luku 15. Kuinka monta prosenttia luku* x *on suurempi kuin luku* y*?*

14. *Yrityksen työntekijöiden keskimääräinen kuukausibruttopalkka on* 3115 *€. Palkoista menee keskimäärin veroa* $27,2\%$*. Kuinka paljon maksetaan nettopalkkaa? Yritys päätti korottaa kaikkien palkkaa* $0,4\%$*. Mikä on uusi kuukausipalkka ja kuinka paljon veroja maksetaan korotetuista palkoista?*

15. *Tuotteen hinta oli aluksi* a *euroa. Miten hinta muuttuu, jos uusi hinta on a)* $1,23a$ *b)* $0,22a$ *c)* $2,3a$ *d)* $0,02a$

2 Indeksit

2.1 Aikasarja

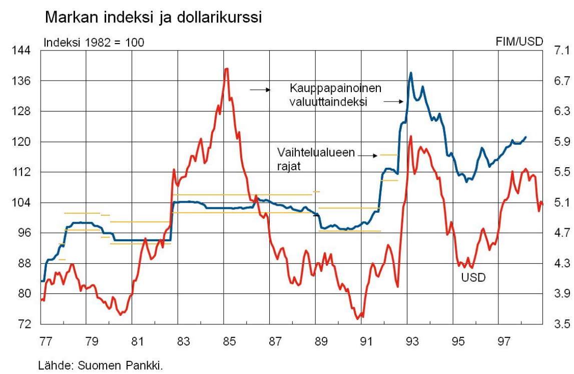
Monesti on järkevää tarkastella jonkin asian muuttumista ajassa. Muuttuvaa suuretta ajatellaan muuttujana x. Jos havaintoarvot $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ovat järjestetty aikajärjestykseen, muodostuu aikasarja. Aikasarja on siis jono havaintoja

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

missä aika määrää havaintojen järjestyksen. Säännöllisesti pidetty tilasto muodostaa aikasarjan. Esimerkiksi rahan arvo riippuu ajankohdasta.

Aikasarjan muuttumista voidaan kuvata graafisesti tai taulukoimalla muuttujan arvot. Yleisluontoiseen hahmottamiseen graafinen tapa on hyvä, mutta tarkkoihin arvojen tulkintaan se ei sovellu. Kun tarvitaan täsmällisiä lukuja, käytetään taulukointimenetelmää, **indeksejä**.

Tilastosta valitaan jokin ajankohta, johon muiden ajankohtien arvoja verrataan. Tätä sanotaan **perusajankohdaksi**. Perusajankohtaa vastaavaa arvoa sanotaan **perusarvoksi**, jota merkitään luvulla 100. Muut arvot ilmoitetaan suhteessa perusarvoon. Indeksilukujen laskeminen on prosenttilaskentaa. Koska perusarvoksi valitaan 100, nähdään muutos suoraan.



Kuva 1: Aikasarja ja indeksikuvaajat

2.2 Indeksiluvut

Indeksiluvut lasketaan jakamalla ajankohtaa vastaava arvo a perusarvolla b ja muuntamalla suhdeluku prosentiksi. Kyseessä on vertailuprosentti, joka ajatellaan pelkkänä lukuna. Tätä sanotaan usein **indeksiluvuksi** tai **indeksiksi**. Joskus puhutaan **pisteluvuista** tai **pisteistä**. Indeksiluku i saadaan siis seuraavasti

: Indeksiluku

Tietyn ajankohdan t indeksiluku on

$$i = \frac{a}{b} \cdot 100,$$

missä a on ajankohdan t arvo ja b on perusarvo.

Esimerkki 11

Alla on erään pienen kaupungin asukasluvun kehittyminen vuosittain.

Vuosi	Asukasmäärä
1997	11 233
1998	12 453
1999	21 443
2000	18 332
2001	10 021
2002	4 112
2003	3 803

Lasketaan indeksiluvut ja tarkastellaan muutosta.

Kun valitaan perusajankohdaksi vuosi 1997, niin perusarvo $b = 11\ 233$, jota vastaa indeksiluku

$$\frac{11\ 233}{11\ 233} \cdot 100 = 100.$$

Vuoden 1998 indeksiluku on

$$\frac{12\ 453}{11\ 233} \cdot 100 \approx 111.$$

Tämän vuoden vertailuprosenttikerroin on siis $1,11$.

Vuoden 1999 indeksiluku on

$$\frac{21\ 443}{11\ 233} \cdot 100 \approx 191.$$

Tämän vuoden vertailuprosenttikerroin on siis $1,91$.

Näin jatketaan jokaisen vuoden kohdalla. Taulukoidaan tulokset.

Vuosi	Asukasmäärä	Indeksi
1997	11 233	100
1998	12 453	111
1999	21 443	191
2000	18 332	163
2001	10 021	89
2002	4 112	37
2003	3 803	34

Muutoksia laskettaessa perusajankohdasta indeksejä voidaan ajatella suoraan prosentteina. Asukkaiden lukumäärä vuodesta 1997 vuoteen 2003 on vähentynyt

$$100\% - 34\% = 66\%$$

Asukkaiden lukumäärä vuodesta 1997 vuoteen 1999 on kasvanut

$$191\% - 100\% = 91\%$$

Jos vertaillaan muita ajankohtia toisiinsa, lasketaan indeksien osamäärä ja tulkitaan se vertailuprosentteina. Asukkaiden määrä vuodesta 1998 vuoteen 1999 on kasvanut

$$\frac{\text{Vuoden 1999 indeksi}}{\text{Vuoden 1998 indeksi}} = \frac{190,9}{110,9} \approx 1,72 \text{ kertaiseksi}$$

eli kasvanut 72%.

Asukkaiden määrä vuodesta 2000 vuoteen 2002 on vähentynyt

$$\frac{\text{Vuoden 2002 indeksi}}{\text{Vuoden 2000 indeksi}} = \frac{36,6}{163,2} \approx 22,4 \text{ kertaiseksi}$$

eli pienentynyt noin 78%.

2.3 Inflaatio ja deflaatio

Hintojen keskimääräistä kehitystä seurataan **hintaindekseillä**. Yleisin käytetty hintaindeksi on elinkustannusindeksi. Alla on linkki Tilastokeskuksen ylläpitämään elinkustannusindeksitaulukkoon

`http://tilastokeskus.fi/til/khi/2012/09/khi_2012_09_2012-10-15_tau_002_fi.html`

Kun hinnat nousevat, hintaindeksi kasvaa samassa suhteessa. Tällöin rahan **ostokyky** (tai ostovoima) heikkenee. Sanotaan, että rahan **reaalinen arvo** heikkenee. Tätä ilmiötä kutsutaan **inflaatioksi**.

$\uparrow$ HINNAT : RAHAN ARVO $\downarrow$

Kun hinnat laskevat, hintaindeksi vähenee samassa suhteessa. Tällöin hinnat laskevat, rahan **ostokyky** (tai ostovoima) vahvistuu. Sanotaan, että rahan **reaalinen arvo** vahvistuu. Tätä ilmiötä kutsutaan **deflaatioksi**.

$\downarrow$ HINNAT : RAHAN ARVO $\uparrow$

Esimerkki 12

Alla on elinkustannusindeksit vuosilta 2010-2012 (tammikuu).

Vuosi	**Indeksi**
2010	1 729
2011	1 783
2012	1 840

Laskettaessa hintojen reaalista muutosta vuodesta 2010 vuoteen 2011 lasketaan näiden indeksien muutos prosenttikertoimena.

Indeksien suhteellinen muutos vuodesta 2010 vuoteen 2011 on

$$\frac{1783}{1729} \approx 1,031$$

Indeksi on siis noussut noin 3,1 % tänä aikana. Rahan arvo on vastaavasti heikentynyt 3,1 %.

Lasketaan hintojen muutos vuodesta 2011 vuoteen 2012

$$\frac{1840}{1783} \approx 1,032$$

Indeksi on siis noussut noin 3,2 % tänä aikana. Rahan arvo on vastaavasti heikentynyt 3,2 %. Inflaatio on ollut jälkimmäisenä vuonna 0,1 prosenttiyksikköä suurempi.

Hintaindeksin nousuprosenttia sanotaan **inflaatioprosentiksi**.

Usein inflaatioprosentti ilmaisee kahden peräkkäisen vuoden arvojen muutoksen. Inflaatioprosentti voi kuitenkin ilmaista myös useamman vuoden muutoksen.

Esimerkki 13

Lasketaan elinkustannusindeksin muutos vuodesta 2010 vuoteen 2012.

Vuoden 2010 indeksi on 1 789, joka on muutoksen perusarvo. Muutosta verrataan vuoden 2012 indeksiin, joka on 1 840. Voidaan laskea muutosprosentti tai vertailla indeksejä.

$$\frac{1\ 840}{1\ 789} \approx 1,064$$

Indeksi on siis **kasvanut** noin $6,4$ %, jolloin rahan arvo on heikentynyt vastaavan määrän. Tällöin sanotaan, että **inflaatio** kahdessa vuodessa on ollut kokonaisuudessaan noin 6,4 %.

Jos aikajakso on pitkä, voi inflaatioprosentti olla suuri. Tällöin vuosittainen kasvu aikasarjana voi hämärtyä. Kun inflaatio määritetään pitkältä aikajaksolta, voidaan määrittää **keskimääräinen inflaatio.**

Esimerkki 14

Alla on elinkustannusindeksit vuosilta 1974 ja 2012 (tammikuu).

Vuosi	**Indeksi**
1974	305
2012	1 840

Lasketaan indeksien muutos vuodesta 1974 vuoteen 2012.

$$\frac{1840}{305} \approx 6,033$$

$$603,3\% - 100\% = 503,3\%$$

Inflaatio on ollut siis kokonaisuudessaan noin 500 % kyseisellä aikavälillä. Tästä on vaikea hahmottaa, onko kasvu ollut vuosittain suurta vai vähäistä. Tämän hahmottamiseksi määritetään keskimääräinen inflaatio.

Aikajaksossa on yhteensä 38 vuotta. Merkitään keskimääräistä inflaatioprosenttikerrointa q. Tällöin

$$\begin{aligned} q^{38} &\approx 5,033 \quad || \sqrt[38]{(\ )} \\ q &\approx \pm \sqrt[38]{5,033} \quad ||(\text{negatiivinen ratkaisu hylätään}) \\ q &\approx 1,043 \end{aligned}$$

Keskimääräinen inflaatio on ollut noin 4,3 % 38 vuoden aikajaksolla.

Huomattavaa on, että rahan arvon alenemisprosentti ei välttämättä ole sama kuin inflaatioprosentti, sillä rahan arvo on kääntäen verrannollinen inflaatioindeksiin.

Esimerkki 15

Merkitään

$$\begin{aligned}\text{Rahan arvo vuonna 1974} &= a.\\ \text{Rahan arvo vuonna 2012} &= x.\end{aligned}$$

Taulukoidaan tiedot.

Vuosi	**Rahan arvo**	**Indeksi**
1974	a	305
2012	x	1 840

Koska rahan arvo on kääntäen verrannollinen indeksiin, saadaan yhtälö

$$\begin{aligned}\frac{a}{x} &= \frac{1840}{305} && ||(\text{Kerrotaan ristiin})\\ 1840x &= 305a && ||:1840\\ x &= \frac{305}{1840}a\\ x &\approx 0,166a\end{aligned}$$

Toisin sanoen rahan arvosta a on enää jäljellä 16,6 % vuonna 2012. Rahan arvo on pienentynyt noin 83,4 %.

Esimerkki 16

Aikaisemmassa esimerkissä nähtiin, että aikavälillä 1974-2012 elinkustannusindeksi muuttui $\frac{1840}{305}$. Edellä nähtiin, että vastaavasti rahan arvo muuttui $\frac{305}{1840}$. Nämä ovat itseasiassa toisensa käänteislukuja

$$\frac{1840}{305} \cdot \frac{305}{1840} = \frac{1840 \cdot 305}{1840 \cdot 305} = 1$$

Kun puhutaan palkoista, asiayhteydestä pitäisi selvitä, puhutaanko rahan arvosta vai palkan rahasummasta.

Palkkana saatua rahasummaa sanotaan **nimellispalkaksi**. Nimellispalkka ei kerro todellista ostokykyä , eli sitä mikä on kyseisen palkan rahan arvo.

Palkkana saadun palkkasumma arvoa sanotaan **reaalipalkaksi**. Koska usein nimellispalkkojen kasvaessa hinnat nousevat ja päinvastoin, reaalipalkka kuvaa todellista palkan ostovoimaa. Hintojen ja palkkasummien kilpailu on miltei aina osasyynä inflaatioon.

2.4 Inflatointi ja deflatointi

Inflatoinnissa ja deflatoinnissa voidaan verrata eri aikakausien palkkoja toisiinsa.

Jos palkat muutetaan aikasempaan ajankohtaan, puhutaan **deflatoinnista**.

Jos palkat muutetaan ajassa eteenpäin, puhutaan **inflatoinnista**.

Esimerkki 17

Alla on vuosittaisia nimellispalkkoja ja elinkustannusindeksi.

Vuosi	Palkkasumma (€)	Elinkustannusindeksi (1951 = 100)
2009	2 345	1731
2010	2 445	1732
2011	2 986	1783

Deflatoidaan palkkasummat vuoden 2009 rahaksi.

Merkitään vuoden 2010 deflatoitua palkkaa x. Tuntiansio ja indeksi ovat suoraan verrannolliset, joten saadaan yhtälö

$$\begin{aligned}\frac{2\ 445}{x} &= \frac{1732}{1731}\\ x &= \frac{2\ 445 \cdot 1731}{1732}\\ x &\approx 2\ 443,59\end{aligned}$$

Deflatoidaan myös vuoden 2011 palkka vuoden 2009 rahaksi.

$$\begin{aligned}\frac{2\ 986}{x} &= \frac{1783}{1731}\\ x &= \frac{2\ 986 \cdot 1731}{1783}\\ x &\approx 2\ 898,92\end{aligned}$$

Saadaan vuoteen 2009 deflatoitu palkkakehitys.

Vuosi	Palkkasumma (€)	Indeksi	Deflatoitu palkka (€)
2009	2 345	1731	2 345,00
2010	2 445	1732	2 443,59
2011	2 986	1783	2 898,92

Nimellispalkka on kasvanut vuodesta 2009 vuoteen 2011

$$\frac{2986}{2345} \approx 1,273$$

eli noin 27,3 %, mutta reaalipalkka on noussut vain

$$\frac{2898,92}{2345} \approx 1,236$$

eli noin 23,6 %.

Esimerkki 18

Vuonna 2012 palkkasumma oli noussut 3 062 euroon ja indeksi oli 1840. Edellisen vuoden 2011 indeksi on 1783 ja palkka 2 986 €. Oliko ostokyky lisääntynyt vai vähentynyt?

Taulukoidaan indeksit ja palkkasummat.

Vuosi	Indeksi	Palkkasumma (€)
2011	1783	2 986
2012	1840	3 062

Inflatoidaan vuoden 2011 palkka vuoden 2012 tasolle ja verrataan saatua reaalipalkan suuruuttaa vuoden 2012 nimellispalkkaan. Merkitään vuodesta 2011 inflatoitua palkkaa x.

$$\begin{aligned} \frac{1783}{1840} &= \frac{2\ 986}{x} \\ x \cdot 1783 &= 2\ 986 \cdot 1840 \\ x &= \frac{2\ 986 \cdot 1840}{1783} \\ x &\approx 3\ 081,46 \end{aligned}$$

Vuoteen 2012 inflatoitu palkka on pienempi kuin saman vuoden nimellispalkka, joten reaalipalkka oli alentunut

$$\frac{3\ 081,46 - 3\ 062}{3\ 081,46} \cdot 100 \approx 0,63\%.$$

2.5 Ryhmäindeksit

Edellä nähtiin, kuinka indeksi kuvaa yhden muuttujan muuttumista aikasarjana. Aikasarjan kehitystä voidaan tutkia myös muuttujien yhteisvaikutuksena.

Usean muuttujan indeksiä sanotaan **ryhmäindeksiksi**.

Esimerkki 19

Jäätelötuutin kustannukset koostuvat kolmesta raaka-aineesta, vohvelista, jäätelöstä ja lisättävistä aineista, kuten hillo, suklaa ja lisäaineet. Osuudet jakautuvat seuraavasti

Raaka-aine	Osuus (%)
Jäätelö	70
Vohveli	10
Lisättävät aineet	20

Olkoon Jäätelötuutin kokonaiskustannukset a.

Tällöin vohvelia vastaava kustannus on $0,1a$ ja jäätelön kustannus on $0,7a$.

Jos vohvelin raaka-ainekustannukset nousevat 10%, niin uusi vohvelin kustannus on $1,10 \cdot 0,1a = 0,11a$.

Jos jäätelön raaka-ainekustannukset laskevat 10%, niin uusi jäätelön kustannus on $0,9 \cdot 0,7a = 0,63a$.

Jäätelöön kohdistuva kustannusmuutos vaikuttaa kokonaiskustannuksiin enemmän kuin vohvelin kustannus, sillä raaka-ainekustannuksen paino on jäätelön kohdalla suurempi kuin vohvelin kohdalla.

Jäätelötuutin raaka-aineiden kokonaiskustannuksen muutos on

$$0,11a + 0,63a + 0,2a = 0,94a$$

eli kokonaiskustannukset ovat pienentyneet $100\% - 94\% = 6\%$

Indeksi koostuu osista, jotka vaikuttavat omalla **painotuksellaan** indeksilukuun. Tällöin usean asian muutoksesta saadaan yksi tunnusluku, josta nähdään yleinen muutoksen suuruus ja suunta.

Esimerkki 20

Tuoteen kustannukset on jaettu kolmeen kustannuslajiin, joiden perusteella tuotteen hinta määräytyy. Kun tuotetta myydään tietty kiinteä määrä, saadaan kustannuksille seuraavat painot.

Kustannuslaji	Paino
Kiinteät kustannukset	30
Muuttuvat kustannukset	54
Muut kustannukset	36

Kuinka monta prosenttia tuotteen kustannukset nouseva kokonaisuudessaan, kun kiinteät kustannukset nousevat 10%, muuttuvat kustannukset laskevat 20% ja muut kustannukset nousevat 1%?

Lasketaan painoja vastaavat osuudet.

Kustannuslaji	Paino	Osuus (%)
Kiinteät kustannukset	30	$30/120 = 25$ %
Muuttuvat kustannukset	54	$54/120 = 45$ %
Muut kustannukset	36	36 / 120 = 30 %
Yhteensä	120	100 %

Olkoon tuotten kokonaiskustannus alussa a. Lasketaan uudet kustannukset ja taulukoidaan.

Kustannuslaji	Vanha kustannus	Uusi kustannus
Kiinteät kustannukset	$0,25a$	$1,10 \cdot 0,25a = 0,275a$
Muuttuvat kustannukset	$0,45a$	$0,80 \cdot 0,45a = 0,360a$
Muut kustannukset	$0,30a$	$1,01 \cdot 0,30a = 0,303a$
Yhteensä	a	$0,938a$

Kustannukset laskivat kokonaisuudessaan

$$100,0\% - 93,8\% = 6,2\%.$$

Kuluttajahintaindeksi

Yksi tärkeä ryhmäindeksi on jo **kuluttajahintaindeksi**. Se kuvaa suomalaisten kotitalouksien Suomesta ostamien tuotteiden ja palveluiden hintakehitystä. Se koostuu lukuisista eri hyödykeryhmistä, jotka vaikuttavat indeksiin omalla painollaan. Alla linkkissä lisätietoa kuluttajahintaindeksistä.

`http://www.stat.fi/til/khi/2014/02/`

Hintaindeksissä eri osa-alueiden painot voivat muuttua, kun kulutustottumukset muuttuvat. Esimerkiksi digitaalisen teknologian kehittymisen myötä ihmisten kuluttama raha elektroniikkaan on lisääntynyt. Tämä on muuttanut kuluttajahintaindeksin rakennetta. Kuluttajahintaindeksin painorakennetta kuitenkin uusitaan tasaisin aikavälein.

Alla kuluttajahintaindeksin hyödykeryhmiä.

HYÖDYKERYHMÄT 2010	Paino (%)
Elintarvikkeet ja alkoholittomat juomat	13,87
Alkoholijuomat ja tupakka	5,53
Vaatetus ja jalkineet	5,41
Asuminen, vesi, sähkö ja muut polttoaineet	22,06
Kalusteet, kotitalouskoneet ja yleinen kodinhoito	5,79
Terveys	5,01
Liikenne	13,50
Viestintä	2,19
Kulttuuri ja vapaa-aika	12,28
Koulutus	0,46
Ravintolat ja hotellit	7,23
Muut tavarat ja palvelut	6,67

Esimerkki 21

Jos asumismenot kasvavat 2,7 %, niin miten se vaikuttaa kuluttajahintaindeksiin, jos muut menot pysyvät samana?

Olkoon a kokonaiskulutus (kaikki hyödykkeet). Tällöin asumiskulutus on $0,2206a$, koska sumismenojen hyödykeryhmän paino on 22,06 %. Tällöin muiden paino yhteensä on 77,94 %, eli muu kulutus on $0,7794a$. Nyt asumiskulutus $0,2206a$ kasvaa 2,7 % eli uusi kulutus on

$$1,027 \cdot 0,2206a \approx 0,2266a$$

Hyödykeryhmä	Kulutus ennen	Uusi kulutus
Asuminen	$0,2206a$	$0,2266a$
Muut	$0,7794a$	$0,7794a$
Yhteensä	a	$1,0060a$

Indeksin nousu on siis

$$100,6\% - 100\% = 0,6\%$$

eli 0,6 indeksipistettä.

Esimerkki 22

Kuinka paljon pitäisi koulutuksen menot kasvaa, jotta kulkuttajahintaindeksi nousisi 1 pisteen, kun indeksiluku on 122.

Yhden pisteen nousu tarkoittaa indeksin nousua $\frac{1}{122} \cdot 100 \approx 0,82\%$. Tällöin indeksi kasvaa

$$100\% + 0,82\% = 100,82\%$$

$1,0082$-kertaiseksi entiseen nähden.

Olkoon kokonaiskulutus a. Merkitään x sitä prosenttikerrointa, kuinka suureksi koulutuksen tulisi kasvaa.

Hyödykeryhmä	Kulutus ennen	Uusi kulutus
Koulutus	$0,0046a$	$x \cdot 0,0046a = 0,0046ax$
Muut	$0,9954a$	$0,9954a$
Yhteensä	a	$0,0046ax + 0,9954a$

Kulutuksen a tuli nousta $1,0082$-kertaiseksi, joten

$$
\begin{aligned}
0,0046ax + 0,9954a &= 1,0082a \qquad || : a \\
0,0046x + 0,9954 &= 1,0082 \\
0,0046x &= 0,0128 \qquad || : 0,046 \\
x &\approx 2,783
\end{aligned}
$$

Koulutuskulutuksen tulisi siis nousta

$$278,3\% - 100\% \approx 178,3\%$$

3 Valuutat

Valuutalla tarkoitetaan rahayksikköä. Rahalla on useita tehtäviä.

1. Rahaa käytetään vaihdon välineenä.
2. Raha toimii laillisena maksuvälineenä.
3. Raha on arvon mitta.
4. Raha on arvon säilyttämisväline.

3.1 Valuutan tunnukset

Valuutoilla on eri kirjaintunnukset ja symbolit. Kuitenkin kaikilla valuutoilla ei ole vakiintuneita symboleja. Yleensä kirjainlyhenteestä ilmenee maa ja valuuttanimi. Lyhenteen alkuosassa on maa ja loppuosassa valuutan nimi.

$$\begin{array}{c} \text{Dollar} \\ \boxed{\text{US}}\boxed{\text{D}} \\ \text{United States} \ldots \end{array}$$

Alla on muutamia suurimpia valuuttoja.

Valuutta	**Kirjaintunnus**	**Symboli**
Yhdysvaltain dollari	USD	$
Euro	EUR	€
Japanin jeni	JPY	¥
Englannin punta	GBP	£
Australian dollari	AUD	$
Sweitsin frangi	CHF	Fr
Kanadan dollari	CAD	$
Etelä-Korean won	KRW	₩

3.2 Rahan arvo

Rahan arvo kuitenkin muuttuu koko ajan. Sanotaan, että rahalla on **aika-arvo**. Edellä on esitelty rahan arvoa heikentämä inflaation käsite. Rahan arvoon vaikuttaa myös valuutta-alueen ulkopuoliset prosessit, ulkoiset tekijät.

Rahan arvon mitta voidaan jakaa kahteen osaan

Ulkoinen arvo	**Sisäinen arvo**
Suhteessa muihin valuuttoihin	Inflaatio, deflaatio

Rahan sisäistä arvoa käsiteltiin aikaisemmin. Rahan ulkoista arvoa kuvaa **valuuttakurssit.** Valuuttakurssit määritellään noteerauksilla. Noteeraus annetaan yleensä kahden valuutan välisenä suhteena. Kahden valuutan välinen noteeraus voidaan antaa kahdella tavalla, **suoralla** tai **epäsuoralla noteerauksella**.

Suora noteeraus

Suora noteeraus ilmoittaa, kuinka paljon maksaa yksi vieras valuuttayksikkö. Tämä on asiakkaan kannalta ymmärrettävämpi kuin epäsuoranoteeraus. Suoraa noteerausta käytetään usein paikoissa, jossa asiakkaat ovat liiketoiminnan kannalta oleellinen ryhmä, esim. rahanvaihtokonttorit. Suorassa noteerauksessa vieras valuutta ilmoitetaan ensin

$$1 \text{ USD } = x \text{ EUR}$$

Huomattavaa on, että tämä tapa ei ole suora noteeraus, jos vaihdettava valuutta on USD, vaan aina on mietittävä, mistä valuutasta vaihto tehdään ja mihin valuuttaan.

Esimerkki 23

Tomi oli maksanut 40 € vaihtaessaan sen 50 dollariin. Hän oli kuluttanut puolet lomallaan ja loput jäivät pöytälaatikkoon. Kaksi vuotta myöhemmin Tomi löysi setelit ja katsoi internetistä viimeisimmän suoran noteerauksen, joka oli

$$1\ \$ = 0,7645\ €.$$

Kuinka monta prosenttia jäljelle jäänyt rahan arvo oli muuttunut?

Tomille jäi pöytälaatikkoon rahaa

$$\frac{50\ \$}{2} = 25\ \$.$$

Noteerauksen mukaan tämän summa euromääräinen arvo oli

$$25 \cdot 0,7645 = 19,1125$$

Vastaavasta määrästä Tomi oli maksanut 20 €, joten arvo pienentynyt

$$\frac{20 - 19,1125}{20} = \frac{0,8875}{20} \approx 0,044$$

eli pienentynyt noin $4,4\%$.

Esimerkki 24

Kun 250 € vaihdettiin dollareihin, saatiin 325 \$. Mikä pitäisi olla epäsuora noteeraus, jotta vaihdettaessa dollarit takaisin euroihin, arvo olisi noussut 1%?

Halutaan löytää epäsuora noteeraus

$$1 \text{ USD } = x \text{ EUR } .$$

Noteerauksen mukainen eurosumma on

$$325 \ \$ = 325x \text{ €}.$$

Vaaditaan, että tämä arvo on kasvanut yhden prosentin alkuperäisesta arvostaan. Saadaan yhtälö

$$\begin{aligned}
\frac{325x}{250} &= 1{,}01 \qquad || \cdot 250 \\
325x &= 1{,}01 \cdot 250 \qquad || : 325 \\
x &= \frac{1{,}01 \cdot 250}{325} \\
x &\approx 0{,}777
\end{aligned}$$

Haluttu noteeraus on siis

$$1 \text{ USD } = 0{,}777 \text{ EUR } .$$

epäsuora noteeraus

Epäsuora noteeraus anneaan, kun ilmoitetaan, kuinka paljon vierasta valuuttaa saadaan yhdellä omalla valuuttayksiköllä. Noteeraus on siis muotoa esimerkiksi

$$1 \text{ EUR } = x \text{ USD}$$

kun oma valuutta on euro ja halutaan vaihtaa US:n dollareiksi. Epäsuorassa noteerauksessa kotimaan valuutta ilmoitetaan ensin. Tätä noteeraustapaa käyttää esimerkiksi Suomen pankki.

http://www.suomenpankki.fi/fi/tilastot/valuuttakurssit/Pages/tilastot_valuuttakurssit_valuuttakurssit_today_fi.aspx

Esimerkki 25

Tomi löysi pankkinsa internetisivuilta suoran noteerauksen

$$1\ \$ = 0,7645\ €.$$

Pankki ei ollut listannut epäsuoraa noteerausta, mutta Tomi halusi tietää, kuinka paljon hänen kuukausipalkkansa 2 800 €on dollareissa. Muutetaan suora noteeraus epäsuoraksi noteeraukseksi.

$$\begin{aligned} 1\ \$ &= 0,7645\ € \qquad || : 0,7645 \\ \frac{1}{0,7645}\$ &= 1\ € \end{aligned}$$

Tällöin

$$2\ 800 \cdot 1\ € = 2\ 800 \cdot \frac{1}{0,7645}\$ = \frac{2\ 800}{0,7645}\$ \approx 3\ 662,52\ \$$$

Edellä huomattiin, että suora ja epäsuora noteeraus ovat toistensa käänteislukuja. Tästä syystä monesti riittää antaa vain toinen noteeraus.

Jos valuuttaa vaihdetaan fyysisenä rahana, esimerkiksi seteleinä, vaihtoon liittyy kuluja. Toisaalta omaisuuden jakaminen eri valuuttoihin hajauttaa omaisuuslajeja (mutta voi lisätä valuuttariskiä). Pankit antavat yleensä noteerauksen **tilivaluuttakurssina** tai **setelikurssina**. Setelikursseja käytetään, kun valuuttaa vaihdetaan seteleillä. Tilivaluuttakursseja käytetään, kun valuuttaa vaihdetaan siirrettäessä tililtä toiselle tai vaihdettaessa tilin valuuttaa.

Pankit ottavat oman katteensa valuuttan vaihdosta. Usein pankki ilmoittaa vaihtopalkkion lisäksi **ostokurssin** (pankki ostaa). Vastaavasti, kun pankista ostetaan valuuttaa, pankki ilmoittaa **myyntikurssin** (pankki myy). Tilivaluutalle ja setelivaluutalle ilmoitetaan molemmille erikseen myynti- ja ostokurssit.

EURO (1 € = X) 16.4.2013 klo 16:58 Nordea

	Maa, Valuutta	**Tilikurssit**		**Setelikurssit**	
		Osto	*Myynti*	*Osto*	*Myynti*
AUD	Australia, dollari	1.2854	1.2454	-	-
HKD	Hongkong, dollari	10,3909	9,9909	10,5659	9,7009
GBP	Iso-Britania, punta	0,8689	0,8449	0,8747	0,8391
JPY	Japani, jeni	130,4700	126,2700	131,8000	124,9400
CAD	Kanada, dollari	1,3631	1,3191	1,3707	1,3115
NOK	Norja, kruunu	7,6320	7,4120	7,6910	7,3530
SEK	Ruotsi, kruunu	8,5023	8,2623	8,5743	8,1903
SHF	sveitsi, frangi	1,2328	1,1998	1,2446	1,1880
USD	Yhdysvallat, dollari	1,3299	1,2959	1,3406	1,2852

Jos markkinoilla käydään jollakin valuutalla liian vähän kauppaa tai dataa ei ole saatavilla, kurssia ei voida tai haluta määrittää. Yllä Autralian dollarin setelikurssia ei ollut saatavilla.

Esimerkki 26

Tomi toimittaa varaosia Yhdysvalloista Ruotsiin. Tarvittavia ostoksia varten Tomi pitää vaihtaa 3 400 Yhdysvaltojen dollaria Ruotsin kruunuiksi. Kuinka monta kruunua Tomi sai?

Yritysten kesken kauppaa käydään tilivaluuttakurssin mukaan. Tomilla ei ollut suoraan käytettävissä tietoa, joka kertoisi dollarin ja kruunun välisen kurssin. Tomin oli muutettava dollarit euroiksi, jonka jälkeen raha voidaan muuttaa kruunuiksi.

Saadaan epäsuora noteeraus edellisestä taulukosta (pankki ostaa dollareita Tomilta).

$$1 \text{ €} = 1,3299 \text{ \$}$$

Tällöin saadaan suorasta noteerauksesta

$$1 \text{ \$} = \frac{1}{1,3299} \text{ €}$$

$$3\,400 \text{ \$} = \frac{3\,400}{1,3299} \text{ €}$$

Katsotaan taulukosta euron tilivaluuttakurssi suhteessa Ruotsin kruunuihin (pankki myy kruunuja).

$$1 \text{ €} = 8,2623 \text{ SEK}$$

jolloin

$$\frac{3\,400}{1,3299} \text{ €} = \frac{3\,400}{1,3299} \cdot 8,2623 \text{ SEK} \approx 21\,123,26 \text{ SEK}$$

Esimerkki 27

Tomi ostaa ensin Yhdysvaltojen dollareita ja sen jälkeen myy ne takaisin pankille. Kuinka monta prosenttia pankin vaihtopalkkio oli kokonaisuudessaan.

Olkoon a vaihdettava rahamäärä. Taulukosta saadaan myyntikurssi

$$1 \text{ €} = 1,2959 \text{ \$}$$

jolloin

$$a \text{ €} = 1,2959a \text{ \$}$$

Taulukosta saadaan ostokurssi

$$1 \text{ €} = 1,3299 \text{ \$}$$

jolloin

$$1 \text{ \$} = \frac{1}{1,3299} \text{ €}.$$

Nyt

$$1,2959a \cdot \frac{1}{1,3299} \text{ €} \approx 0,9744a \text{ €}$$

eli raha oli pienentynyt noin 2,6 %, mikä on pankin perimä vaihtopalkkio kahden vaihdon jälkeen.

3.3 Devalvaatio ja revalvaatio

Valuutan ulkoinen arvo muuttuu, kun sen arvo muuttuu suhteessa toiseen valuuttaan. Jos valuutan ulkoinen arvo nousee suhteessa johonkin toiseen valuuttaan, kyseessä on valuutan **revalvoituminen**. Jos valuutan ulkoinen arvo laskee suhteessa johonkin toiseen valuuttaan, kyseessä on valuutan **devalvoituminen**.

Valuuttajärjestelmässä on periaatteessa kahden tyyppisiä valuuttoja, **kiinteä** ja **kelluva valuutta**.

Kiinteän valuutan arvo on kiinnitetty johonkin toiseen valuuttaa tai useammasta valuutasta tehtyyn tunnuslukuun. Periaatteessa valuutan arvo voitaisiin kiinnittää myös arvometallien arvon vaihteluun. Kiinteällä valuutalla on kiinteä kurssi.

Kelluvan valuutan arvo määräytyy vapaasti valuuttamarkkinoilla. Kelluvan valuutan arvo ei määräydy välttämättä mielivaltaisesti, vaan suuret tekijät, esimerkiksi keskuspankit, voivat ohjailla valuutan arvoa nostamalla korkoja tai tekemällä valuuttakauppaa. Koska kelluvilla valuutoilla käydään koko ajan kauppaa valuuttamarkkinoilla, voidaan ajatella, että valuuttojen revalvoitumista ja devalvoitumista tapahtuu koko ajan.

Kun valuutan A kurssi nousee suhteessa toiseen valuuttaan B, sen ulkoinen arvo kasvaa. Tällöin valuutta A **revalvoituu**.

Kun valuutan A kurssi laskee suhteessa toisen valuuttaan B, sen ulkoinen arvo laskee. Tällöin valuutta A **devalvoituu**.

Valuutan ulkoinen arvo ja valuuttakurssi ovat siis suoraan verrannollisia.

Alla on Euroopan keskuspankin EKP julkaisemia valuuttakursseja eri ajankohtina suhteessa yhteen euroon.

1 EURO = X					
Maa	**valuutta**		`8.7.2003`	`31.12.2002`	`28.12.2001`
Yhdysvallat	dollari	USD	1,1326	1,0487	0,8813
Japani	jeni	JPY	133,78	124,39	115,33
Iso-Britania	Punta	GBP	0,6907	0,65050	0,60850

Esimerkki 28

Kuinka monta prosenttia euro oli revalvoitunut vuoden 2003 aikana suhteessa Japanin jeniin?

Taulukoidaan

Aika	EUR	JPY
31.12.2002	1,00	124,39
8.7.2013	1,00	133,78

Yhdellä eurolla sai enemmän jenejä 2003 kesällä kuin vuoden alussa. Euro oli siis revalvoitunut suhteessa jeneihin.

Lasketaan euron muutosprosenttikerroin jenin kurssista.

$$\frac{133,78}{124,39} \approx 1,0755$$

eli euron kasvuprosentti eli revalvaatioprosentti oli noin

$$107,55\% - 100\% = 7,55\%$$

Esimerkki 29

Kuinka paljon Japanin jeni oli devalvoitunut suhteessa euroon vuoden 2003 kesään mennessä?

Edellä esitetyt kurssit olivat muotoa

$$1 \text{ €} = X \text{ JPY} .$$

Laskettaessa jenin muutosta suhteessa euroon, pitää noteeraukset muuttaa suoraan muotoon

$$1 \text{ JPY } = X \text{ €}.$$

`Aikahetken 31.12.2002 noteeraus:`

$$1 \text{ €} = 124,39 \text{ JPY}$$

jolloin

$$1 \text{ JPY } = \frac{1}{124,39} \text{ €}$$

`Aikahetken 8.7.2013 noteeraus:`

$$1 \text{ €} = 133,78 \text{ JPY}$$

jolloin

$$1 \text{ JPY } = \frac{1}{133,78} \text{ €}$$

Nyt

$$\frac{\left(\frac{1}{133{,}78}\right)\ €}{\left(\frac{1}{124{,}39}\right)\ €} = \frac{124,39}{133,78} \approx 0,9298$$

eli jenin devalvaatioprosentti suhteessa euroon oli

$$100\% - 92,98\% = 7,02\%$$

Esimerkki 30

Tomi otti yritykselleen 120 000 euron suuruisen valuuttalainan Iso-Britaniasta 28.12.2001. Tomin yritys maksoi lainan takaisin kokonaisuudessaan takaisin 8.7.2003. Todellinen kokonaiskorko koko laina-ajalta oli 8,8 %. Kuinka paljon yritys maksoi lainasta takaisin 8.7.2003?

Määritetään takaisin maksettava laina seuraavasti:

$$\boxed{\text{Punnan kurssi aikajakson alussa}}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\text{Määritetään lainattava summa punnissa}}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\text{Lasketaan koron määrä punnissa}}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\text{Lasketaan takaisin maksettava määrä yhteensä}}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\text{Määritetään takaisin maksettava summa euroissa}}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\text{Punnan kurssi aikajakson lopussa}}$$

Punnan kurssi aikajakson alussa 1 € = 0,60850 GBP.

Lainattava summa punnissa on

$$120\ 000\ € = 120\ 000\ \text{GBP}\ \cdot 0,60850 = 73\ 020\ \text{GBP}$$

Koron määrä punnissa on

$$0,088 \cdot 73\ 020\ \text{GBP}\ = 6\ 425,76\ \text{GBP}$$

Takaisin maksettava rahasumma korkoineen on

$$73\ 020\ \text{GBP}\ + 6\ 425,76\ \text{GBP}\ = 79\ 445,76\ \text{GBP}$$

Muunnetaan summa euroiksi aikajakson lopussa. Valuuttakurssi aikajakson lopussa on

$$1\ € = 0,6907\ \text{GBP}$$

jolloin

$$1\ \text{GBP}\ = \frac{1}{0,6907}\ €.$$

Tällöin

$$79\ 445,76\ \text{GBP}\ = \frac{1}{0,6907} \cdot 79\ 445,76\ € \approx 115\ 022,09\ €$$

Esimerkissä 30 nähtiin, kuinka lainan takaisin maksettava nimellissumma pieneni vaikka lainalla oli korko. Tämä johtui siitä, että punnan kurssin noustua euron arvo heikkeni, jolloin euromääräisen lainankin arvo aleni.

Esimerkki 31

Kuinka monta prosenttia oli esimerkissä 30 euromääräinen nimellisrahasumman muutos, kun huomioon otetaan korot ja kurssimuutokset?

Lainaa otettiin 120 000 €. Ajanjakson loputtua maksettiin lainasumma 115 022, 09 €, mikä sisälsi korot ja kurssimuutokset. Täten muutos oli

$$\frac{120\ 000\ € - 115\ 022,09\ €}{120\ 000\ €} \approx 0,041$$

Lainaa oli siis maksettava takaisin noin 4, 1 % vähemmän. Jos punnan arvo olisi heikentynyt suhteessa euroon, olisi lainaa maksettavana enemmän kuin koron määräämä summa.

4 Säästäminen

4.1 Alle korkokauden talletus

Säästämisellä tarkoitetaan yleensä rahan tallettamista pankkiin. Korvaukseksi pankki maksaa rahalle korkoa. Korko lasketaan talletetusta rahamäärästä, eli **pääomasta**. Korko lisätään yleensä pääomaan **korkokauden** lopussa. Korkokausi riippuu aina tapauksesta ja tilanteesta. Jos korkokautta ei ole erikseen ilmaistu, tarkoitetaan korkokaudella yhtä vuotta.

Korkokausi voidaan kuitenkin ilmaista koron yhteydessä.

Lyhenne		**Korkokausi**
p.a.	*per anno*	kerran vuodessa
p.s.	*per season*	kerran puolessa vuodessa
p.q.	*per quater*	kerran neljännesvuodessa
per kk		kerran kuukaudessa

Korko on pääomatuloa, josta on maksettava lähdevero. Vero pääomatulosta on 28 % vuonna 2011. Vuodesta 2012 alkaen pääomatulovero on 30 %. Yli 50 000 euron pääomatuloista vero on 32 %. Verotusta tarkastellaan omassa osiossa eikä verovaikutuksia oteta tässä luvussa huomioon.

Esimerkki 32

Talletetaan rahaa pankkiin vuodeksi. Kuinka monta prosenttia parempi on korko 2 % p.s. kuin 2 % p.a.?

Olkoon a pääoma. Kun korko on 2 % p.a., niin korkojakson loputtua pääoma on

$$a \cdot 1,02 = 1,02a$$

Kun korko on 2 % p.s., ensimmäisen korkokauden jälkeen pääoma on

$$a \cdot 1,02 = 1,02a$$

jolloin toisen korkokauden jälkeen pääoma on

$$1,02 \cdot 1,02a = 1,0404a$$

Tällöin jälkimmäinen korko suhteessa ensimmäiseen on

$$\frac{1,0404a}{1,02a} = 1,02\text{-kertainen}$$

eli 102 % - 100 % = 2 % isompi.

Jos talletus on alle korkojakson, on määritettävä korkopäivien lukumäärä. Korkovuosi voidaan laskea erilailla riippuen siitä, miten huomioidaan todelliset päivät ja karkausvuodet.

Jos **korkokuukausi** on 30 päivää, korkovuosi on $12 \cdot 30 = 360$ päivää.

Jos korkokuukausi on todellinen päivien lukumäärä, korkovuosi on 365 päivää lukuunottamatta karkausvuosia, jolloin korkovuosi on 366 päivää.

Koska Maa kiertää Auringon noin 365 päivässä ja 6 tunnissa, joka neljäs vuosi tulee täyteen ylimäräinen vuorokausi.

Vuosi on **karkausvuosi**, jos se on jaollinen luvulla 4. Jos vuosi on jaollinen luvulla 100, vuosi ei ole karkausvuosi lukuunottamatta vuosia, jotka ovat jaollisia luvulla 400.

Esimerkki 33

Tomi talletti pankkiin pääoman 1 327 €. Tilin korko oli 3,12 % p.a. Mikä on pääoman suuruus neljän kuukauden jälkeen?

Talletusaika vuosissa on

$$4 \text{ kk} = \frac{4}{12} \text{ a} = \frac{1}{3} \text{ a}.$$

Talletuksen korko 4 kuukauden kuluttua on

$$1\ 327 \text{ €} \cdot 0,0312 \cdot \frac{1}{3} = 13,8008$$

joten pääoman suuruus 4 kuukauden kuluttua on

$$1\ 327 \text{ €} + 13,8008 \text{ €} \approx 1\ 340,80 \text{ €}$$

Korkoa sanotaan **yksinkertaiseksi koroksi**, kun korkoa ei liitetä pääomaan talletuksen aikana. Tällöin usein talletus on tilillä alle korkokauden eikä korkoa vastaavalle summalle ehdi kasvaa uutta korkoa. Yksinkertainen korko lasketaan pääoman, korkoprosentin ja talletusajan tulona.

: Yksinkertainen korko

Yksinkertainen korko r on

$$r = k \cdot i \cdot t$$

missä

$k =$ pääoma
$i =$ korkokanta korkokertoimena
$t =$ talletusaika korkokausina

Esimerkki 34

Kuinka monessa päivässä pääoma 12 300 € kasvaa yhden prosentin, kun korkokanta on 2,25 % ?

Yksi prosentti pääomasta on

$$0,01 \cdot 12\ 300 \text{ €} = 123 \text{ €}$$

Koron määrä on siis oltava 123 €. Tällöin

$$\begin{aligned} r &= k \cdot i \cdot t \\ 123 &= 12\ 300 \cdot 0,0225 \cdot t \\ 123 &= 276,75t \qquad || : 276,75 \\ t &= \frac{123}{276,75} \\ t &= \frac{4}{9} \end{aligned}$$

Talletusaika on

$$\frac{4}{9} \text{ a} = \frac{4}{9} \cdot 360 \text{ d} = 160 \text{ d (päivää)}$$

Esimerkki 35

Tomi aloitti omatoimisen eläkesäästämisen tammikuussa ja halusi tallettaa tilille kuukausittain 155 €. Tilin korko oli 3,12 %. Vuoden kuluttua Tomi halusi tarkastella säästämisen etenemistä. Kuinka paljon Tomilla oli vuoden lopussa säästetty yhteensä?

Jokainen kuukasierä kasvaa itsessään korkoa eri korkojakson osan, joten jokaiselle kuukausierälle on laskettava oma pääoman kasvu.

Talletus	Korkokuukaudet	Korkoaika	Korko
1.	T H M H T K H E S L M J	$\frac{12}{12}$	$155\text{ €}\cdot 0,0312\cdot\frac{12}{12}$
2.	H M H T K H E S L M J	$\frac{11}{12}$	$155\text{ €}\cdot 0,0312\cdot\frac{11}{12}$
3.	M H T K H E S L M J	$\frac{10}{12}$	$155\text{ €}\cdot 0,0312\cdot\frac{10}{12}$
4.	H T K H E S L M J	$\frac{9}{12}$	$155\text{ €}\cdot 0,0312\cdot\frac{9}{12}$
5.	T K H E S L M J	$\frac{8}{12}$	$155\text{ €}\cdot 0,0312\cdot\frac{8}{12}$
6.	K H E S L M J	$\frac{7}{12}$	$155\text{ €}\cdot 0,0312\cdot\frac{7}{12}$
7.	H E S L M J	$\frac{6}{12}$	$155\text{ €}\cdot 0,0312\cdot\frac{6}{12}$
8.	E S L M J	$\frac{5}{12}$	$155\text{ €}\cdot 0,0312\cdot\frac{5}{12}$
9.	S L M J	$\frac{4}{12}$	$155\text{ €}\cdot 0,0312\cdot\frac{4}{12}$
10.	L M J	$\frac{3}{12}$	$155\text{ €}\cdot 0,0312\cdot\frac{3}{12}$
11.	M J	$\frac{2}{12}$	$155\text{ €}\cdot 0,0312\cdot\frac{2}{12}$
12.	J	$\frac{1}{12}$	$155\text{ €}\cdot 0,0312\cdot\frac{1}{12}$

Lasketaan korot yhteen.

$$
\begin{aligned}
&155\text{ €}\cdot 0,0312\cdot\frac{12}{12}+155\text{ €}\cdot 0,0312\cdot\frac{11}{12}+\ldots+155\text{ €}\cdot 0,0312\cdot\frac{1}{12}\\
=\;&\frac{155\text{ €}\cdot 0,0312}{12}\underbrace{(12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1)}_{\text{aritmeettinen summa}}\\
=\;&\frac{155\text{ €}\cdot 0,0312}{12}\cdot\frac{12(1+12)}{2}\approx 31,43\text{ €}
\end{aligned}
$$

Vuoden aikana kertynyt pääoma ilman korkoja on

$$12 \cdot 155 \text{ €} = 1\ 860 \text{ €}.$$

Vuoden aikana kertynyt pääoma korkoineen on

$$1\ 860 \text{ €} + 31,43 \text{ €} = 1\ 891,43 \text{ €}.$$

4.2 Useampi korkokausi: kasvuosuus

Kun pääoma on sijoitettu koko korkokaudeksi, pääomalle saadaan korkokannan mukainen korko. Tällöin pääomamme on kasvanut. Jos kasvanut pääoma sijoitetaan uudelleen, saadaan isommalle pääomalle isompi korko. Näin jatkamalla saadaan pääoman lisäksi korkoa useasta aiemmin saadusta korosta. Korkolle saadaan siis korkoa. Tätä ilmiötä sanotaan **koronkoroksi**.

$$\boxed{\boxed{\boxed{\boxed{\boxed{\boxed{\textbf{PÄÄOMA}} + korko} + korko} + korko} \quad \ldots \quad} + korko}$$

Ostaessa sijoituksien ns. **kasvuosuuksia**, esim. rahastojen kasvuosuuksia, saadaan tuottoa tuotolle koronkorkoperiaatteen mukaisesti. Tällöin saadaan verohyöty, kun korkot lisätä veroitta pääomaan. Verot realisoituvat vasta, kun sijoitusosuudet myydään.

Tyypillinen tapaus kasvuosuuksia hyödyntävästä säästötuotteesta on ns. **määräaikaistili**.

Määräaikaistili on sopiva vaihtoehto, jos tallettaja on valmis sitomaan rahat sovituksi määräajaksi ja haluaa ottaa vähän riskiä. Usein määräaikaistililtä ei voi tehdä nostoja ennen määräajan umpeutumista ilman kuluja. Tällöin riskinä voi olla inflaatio, jos määräaikaistilin korko on epäedullinen suhteessa inflaatioon.

Korkokauden prosenttia prosenttikertoimena sanotaan **korkokertoimeksi** tai **korkotekijäksi**.

Esimerkki 36

Määräaikaistilin korko on 3,5 % p.a. Kuinka paljon pääoma 1 200 € on kolmen vuoden kuluttua.

Ratkaisu
Korkokerroin on 1,035. Pääoma vuoden kuluttua on

$$1\ 200\ € \cdot 1,035.$$

Pääoma kahden vuoden kuluttua on

$$(1\ 200\ € \cdot 1,035) \cdot 1,035.$$

Pääoma kolmen vuoden kuluttua on

$$((1\ 200\ € \cdot 1,035) \cdot 1,035) \cdot 1,035$$

$$= 1\ 200\ € \cdot 1,035^3 \approx 1\ 330,46\ €.$$

Kun pääoma on talletettu useaksi korkokaudeksi, pääoma kasvaa korkoa korolle. Kun pääoma kasvaa koronkorkoa, saadaan lopullinen pääoma kaavalla

: Kasvuosuuden pääoma

$$K = k \cdot q^t$$

missä

$k =$ pääoma talletuksen alussa
$q = 1 + i$ korkotekijä
$i =$ korkokanta prosenttikertoimena
$t =$ aika korkokausina

Esimerkki 37

Yritys haluaa tallettaa pääoman, joka 8 vuoden jälkeen on 12 600 €. Tilin korko on 4,2 %. Mikä summa yrityksen tulee tallettaa?

Ratkaisu
Olkoon x talletettu pääoma. Korkotekijä on 1,042 ja talletusaika 8 vuotta. Talletettava pääoma on

$$\begin{aligned} 12\ 600\ € &= x \cdot 1,042^8 && || : 1,042^8 \\ x &= \frac{12\ 600\ €}{1,042^8} \\ x &\approx 9\ 066,27\ € \end{aligned}$$

Kun korkokanta on tuntematon, tarvitaan tuntemattoman ratkaisuun korkokautta vastaava juuri, sillä korkotekijän ja korkokauden lauseke muodostaa potenssilausekkeen. Jos esimerkiksi korkokausia on 8 vuotta, korkokannan ratkaisemiseen tarvitsee käyttää $\sqrt[8]{\ }$ laskutoimitusta. Kun korkokausia on parillinen määrä, on yhtälön ratkaisussa muistettava huomioida kaksi ratkaisua, joista usein negatiivinen ratkaisu ei kelpaa vastaukseksi.

Esimerkki 38

Tomi haluaa saada kuudessa vuodessa pääomalleen 5 500 € korkoa 790 €. Millainen korkokannan tulee olla, jotta Tomi saisi haluamansa koron?

Ratkaisu

Merkitään korkotekijää x, missä $x = 1 + i$ ja i on haluttu korkokanta prosenttikertoimena. Korkokausia talletusaikana on $t = 6$.

Pääoma kuuden vuoden jälkeen on

$$5\ 500\ € + 790\ € = 6\ 290\ €$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
6\ 290\ € &= 5\ 500\ € \cdot x^6 && ||: 5\ 500\ € \\
x^6 &= \frac{6\ 290\ €}{5\ 500\ €} && ||\sqrt[6]{(\ )} \\
x &= \pm\sqrt[6]{\frac{6\ 290\ €}{5\ 500\ €}} && \text{(vain positiivinen ratkaisu kelpaa)} \\
x &\approx 1,023
\end{aligned}$$

Korkokanta prosenttikertoimena on siis noin $0,023$. Korkokanta on oltava vähintään 2,3 %.

Kun korkokausien lukumäärä t on tuntematon, käytetään tuntemattoman ratkaisemisessa logaritmia. Tällöin tuntematon on korkotekijän eksponentissa, eli kyseessä on eksponenttilauseke q^t. Eksponenttilausekkeen tuntematon saadaan ratkaistua käyttämällä logaritmin potenssiominaisuutta

$$\lg\left(x^t\right) = t \cdot \lg(x),$$

missä $x > 0$.

Esimerkki 39

Yritys halusi 1,5-kertaistaa pääoman 15 000 €. Yritys valitsi tilin, jonka korko oli 5,3 % p.a. Kuinka kauan pääoma piti kasvaa korkoa, jotta pääoma kasvaisi halutun suuruiseksi?

Ratkaisu

Korkotekijä on $1,053$, mutta talletusaika t on tuntematon. Tuntematon esiintyy siis lausekkeen $1,053^t$ eksponentissa. Tällöin tarvitsemme logaritmin soveltamista. Käytämme kymmenkantaista logaritmia, jota merkitään $\lg(x)$. Huomaa, että laskimen funktionäppäinmerkintä on usein kuitenkin $\boxed{\log}$. Halutessa kymmenkantaisen logaritmin sijaan voidaan käyttää luonnollista logaritmia $\ln(x)$, jonka laskimen funktionäppäinmerkintä on $\boxed{\ln}$.

Muodostetaan tilanteesta yhtälö ja ratkaistaan tuntematon.

$$
\begin{aligned}
15\,000\text{ €} \cdot 1,053^t &= 1,5 \cdot 15\,000\text{ €} && \|: 15\,000\text{ €} \\
1,053^t &= 1,5 \cdot \frac{15\,000\text{ €}}{15\,000\text{ €}} && \|\lg(\ ) \\
\lg(1,053^t) &= \lg(1,5) && \|\lg(a^t) = t \cdot \lg(a) \\
t \cdot \lg(1,053) &= \lg(1,5) && \|: \lg(1,053) \approx 0,02 \neq 0 \\
t &= \frac{\lg(1,5)}{\lg(1,053)} \\
t &\approx 7,85
\end{aligned}
$$

Kokonaisina korkokausina seitsemän vuotta ei riitä. Pääoman pitää kasvaa 8 kokonaista vuotta korkoa.

4.3 Useampi korkokausi: tuotto-osuus

Joissakin tapauksissa voidaan ostaa ns. **tuotto-osuuksia**, jossa tuotto on korkoa jostakin tietyn suuruisesta pääomasta. Korkoja ei siis lisätä pääomaan takaisin, jolloin korkotuotto on aina yhtäsuuri.

PÄÄOMA	+ korko	+ korko	+ korko	...	+ korko

Tuotto-osuuksi ostetaan silloin, kun halutaan esimerkiksi tasaista kassavirtaa ilman, että jouduttaisiin myymään osuuksia. Toisaalta, tuotto-osuuksi voidaan ostaa, jos halutaan sijoittaa tuotot johonkin toiseen kohteseen. Tällöin kuitenkin tuotoista joudutaan maksamaan verot eikä korollekorkoa voida hyödyntää. Tuotto-osuudet käyvät myös esimerkiksi sellaisille organisaatioille, joilla ei omien sääntöjensä mukaan ole mahdollisuutta lisätä sijoitusosuuksia. Korollekorkohan lisäisi osuuksien määrää, koska korot kasvattaisivat sijoitettavaa pääomaa.

Sijoitus- ja säästötuotteiden myyjillä on usein omat nimet kasvu- ja tuotto-osuuksille. Voidaan puhua esimerkiksi A- ja B-osuuksista tai uudelleen sijoittavasta tuotteista.

Koska tuotto-osuudessa ei lisätä korkoa pääomaan, kyseessä on itseasiassa yksinkertainen korko. Uusi pääoma K saadaan, kun kaikki korot lasketaan yhteen pääoman k kanssa korkokausien t ajalta

$$K = k + t(k \cdot i) = k + kit,$$

missä i on korkokanta prosenttikertoimena. Yksinkertainen korko ilmenee myös lausekkeen $k + kit$ termissä kit, jota tarkasteltiin aikaisemmin alle korkokauden talletusten yhteydessä.

: Tuotto-osuuden pääoma

$$K = k + kit$$

missä

$k =$ pääoma talletuksen alussa
$i =$ korkokanta prosenttikertoimena
$t =$ aika korkokausina

Esimerkki 40

Tomi halusi sijoittaa korkorahastoon 8 500 € pääoman viideksi vuodeksi. Tarjolla oli tuotto- ja kasvuosuudet. Kuinka paljon paremman tuoton Tomi sai sijoittamalla kasvuosuuteen kuin tuotto-osuuteen, kun kokonaiskorko kuluineen oli 2,1 % p.a.?

Ratkaisu
Pääoma kasvaa vuodessa

$$100\% + 2,1\% = 102,1\% = 1,021\text{-kertaiseksi},$$

jolloin viidessä vuodessa pääoma kasvaa $1,021^5$-kertaiseksi.

- Kasvuosuuden tuotto on

$$8\ 500\ € \cdot 1,021^5 \approx 9\ 430,78\ €.$$

- Tuotto-osuuden tuotto on

$$8\ 500\ € + 5 \cdot (8\ 500\ € \cdot 0,021) \approx 9\ 392,50\ €.$$

- Kasvuosuuden suhde tuotto-osuuteen on

$$\frac{9\ 430,78}{9\ 392,50} \approx 1,0041$$

eli kasvuosuus tuotti viidessä vuodessa 0,41 % enemmän.

4.4 Toistuvat talletukset

Korkokauden päätyttyä pääomaan lisätään korko. Pääoman kasvattamiseksi voidaan tehdä myös lisätalletuksia. Säästämisessä usein tehdään **toistuvia talletuksia**, jolloin lopullisen pääoman suuruutta arvioitaessa pitää ottaa huomioon jokaisen lisätalletuksen tuotto.

Esimerkki 41

Tilille, jonka korko on 1,33 % p.a., lisätään joka vuosi 200 €. Kuinka paljon pääomaa on kertynyt viidessä vuodessa?

Ensimmäinen talletus kasvaa korkoa koko ajanjakson 5 vuotta. Seuraava talletus tehdään vuoden päästä, jolloin se kasvaa korkoakorolle yhden vuoden vähemmän. Näin jatketaan jokaisen talletuksen kohdalla. Talletusrahavirrasta muodostuu geometrinen summa.

Vuosi	Talletus	Pääoma aikajakson lopussa
1	200	$200 \cdot 1,0133^5$
2	200	$200 \cdot 1,0133^4$
3	200	$200 \cdot 1,0133^3$
4	200	$200 \cdot 1,0133^2$
5	200	$200 \cdot 1,0133^1$

Pääomaa on yhteensä

$$200 \cdot 1,0133^1 + 200 \cdot 1,0133^2 + 200 \cdot 1,0133^3 + 200 \cdot 1,0133^4 + 200 \cdot 1,0133^5$$

$$= 200 \cdot 1,0133 \cdot \frac{1 - 1,0133^5}{1 - 1,0133} \qquad \boxed{S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, a_1 = 200 \cdot 1,0133, q = 1,0133, n = 5}$$

$$\approx 1040,61 \text{ (€)}$$

Esimerkki 42

Tavoitteena on säästää 10 000 € kuudessa vuodessa, kun tilin korko on 2,05 %. Minkä suuruinen summa on talletettava vuosittain, jotta tavoitteeseen päästään.

Olkoon vuosittain laitettava pääoma a. Saadaan seuraava tilanne.

Vuosi	Talletus	Pääoma aikajakson lopussa
1	a	$a \cdot 1,0205^6$
2	a	$a \cdot 1,0205^5$
3	a	$a \cdot 1,0205^4$
4	a	$a \cdot 1,0205^3$
5	a	$a \cdot 1,0205^2$
6	a	$a \cdot 1,0205^1$

Vaaditaan

$$
\begin{aligned}
a \cdot 1,0205^1 + a \cdot 1,0205^2 + a \cdot 1,0205^3 + a \cdot 1,0205^4 + a \cdot 1,0205^5 + a \cdot 1,0205^6 &= 10\ 000 \\
a \cdot (1,0205 + 1,0205^2 + 1,0205^3 + 1,0205^4 + 1,0205^5 + 1,0205^6) &= 10\ 000 \\
\boxed{S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, a_1 = 1,0205, q = 1,0205, n = 6} \qquad a \cdot (1,0205 \cdot \frac{1-1,0205^6}{1-1,0205}) &= 10\ 000
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{1-1,0205}{1,0205 \cdot (1-1,0205^6)} \cdot 10\ 000 \\
a &\approx 1\ 551,47\ (€)
\end{aligned}
$$

Pääomaa on lisättävä vuosittain vähintään 1 551,47 euroa, jotta tavoite saavutettaisiin.

Esimerkki 43

Laitetaan vuosittain säästöön 2 450 € tilille, jonka korko on 1,83 %. Kuinka kauan on säästettävä, jotta rahaa olisi kertynyt vähintään 24 500 €.

Ei tiedetä, kuinka kauan toistuvaa vuosittaista talletusta olisi jatkettava, jotta tavoite saavutetaan. Merkitään n viimeistä vuotta, kun pääomaa talletetaan. Tällöin ensimmäinen talletus kasvaa n vuotta korkoa. Toisena vuonna talletus kasvaa korkoa korolle yhden vuoden vähemmän, eli $n-1$ vuotta. Viimeisenä vuonna n laitettu pääoma kasvaa vain yhden vuoden korkoa. Saadaan seuraava tilanne.

Vuosi	Talletus (€)	Pääoma aikajakson lopussa
1	2 450	$2\ 450 \cdot 1,0183^n$
2	2 450	$2\ 450 \cdot 1,0183^{n-1}$
3	2 450	$2\ 450 \cdot 1,0183^{n-2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	2 450	$2\ 450 \cdot 1,0183^2$
n	2 450	$2\ 450 \cdot 1,0183^1$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan tuntematon n.

$$2\ 450 \cdot 1,0183 + 2\ 450 \cdot 1,0183^2 + \cdots + 2\ 450 \cdot 1,0183^n = 24\ 500$$

$$2\ 450 \cdot (1,0183 + 1,0183^2 + \cdots + 1,0183^n) = 24\ 500$$

$$\boxed{S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, a_1 = 1,0183, q = 1,0183}$$

$$
\begin{aligned}
2\,450 \cdot (1,0183 \cdot \frac{1-1,0183^n}{1-1,0183}) &= 24\,500 \quad || : 2\,450 \\
1,0183 \cdot \frac{1-1,0183^n}{1-1,0183} &= 10 \qquad || : 1,0183 \\
\frac{1-1,0183^n}{1-1,0183} &= \frac{10}{1,0183} \qquad || \cdot (1-1,0183) \\
1-1,0183^n &= \frac{10}{1,0183} \cdot (1-1,0183) \qquad || -1 \\
-1,0183^n &= \frac{10 \cdot (-0,0183)}{1,0183} - 1 \qquad || \cdot (-1) \\
1,0183^n &= 1 + \frac{0,183}{1,0183} \qquad || \lg(\ ) \\
\lg(1,0183^n) &= \lg\left(\frac{1,2013}{1,0183}\right) \qquad || \lg(a^t) = t \cdot \lg(a) \\
n \cdot \lg(1,0183) &= \lg\left(\frac{1,2013}{1,0183}\right) \qquad || : \lg(1,0183) \neq 0 \\
n &= \frac{\lg\left(\frac{1,2013}{1,0183}\right)}{\lg(1,0183)} \\
n &\approx 9,11
\end{aligned}
$$

Yhdeksän vuotta ei riittäisi, joten pääoman on oltava tilillä kymmenen kokonaista vuotta.

Usein säästäminen tapahtuu kuukausittain, sillä palkanmaksujärjestelmät noudattavat samaa jaksotusta. Kun talletuksia tehdään alle korkokauden ja kun näiden pääomien on tarkoitus kasvaa korolle korkoa tulevaisuudessa yli korkokauden, pitää ottaa huomioon alle korkokauden yksinkertainen korko ja useamman korkokauden korollekoron vaikutus.

Esimerkki 44

Tomin mummo päätti Tomin syntymisen jälkeen laittaa kuukausittain Tomin säästötilille 55 €. Tilin korko on 2,01 % p.a. Mummo päätti säästää kunnes Tomi on täysi-ikäinen, jolloin Tomi saa rahat itselleen. Minkä summan Tomi saa täyttäessään 18 vuotta?

Lasketaan ensin korkokauden aikana kertynyt pääoma korkoineen.

Ensimmäinen talletus kasvaa korkoa koko vuoden eli $\frac{12}{12}$ kuukautta. Seuraava talletus kasvaa yhden kuukauden vähemmän eli $\frac{11}{12}$ kuukautta jne. Koko vuoden aikana kertynyt korko on

$$
\begin{aligned}
& 55 \cdot 0,0201 \cdot \frac{12}{12} + 55 \cdot 0,0201 \cdot \frac{11}{12} + \ldots + 55 \cdot 0,0201 \cdot \frac{1}{12} \\
= \quad & 55 \cdot 0,0201 \cdot \frac{1}{12}(12 + 11 + \ldots + 2 + 1) \\
= \quad & 55 \cdot 0,0201 \cdot \frac{1}{12} \cdot (12 \cdot \frac{1+12}{2}) \\
\approx \quad & 7,19
\end{aligned}
$$

Vuoden aikana kertynyt pääoma on yhteensä

$$12 \cdot 55 \text{ €} + 7,19 \text{ €} = 667,19 \text{ €}.$$

Tällainen summa talletetaan joka vuosi 18 vuoden ajan. Korkokerroin on $q = 1,0201$.

Vuosi	Talletus (€)	Pääoma aikajakson lopussa
1	$667,19$	$667,19 \cdot 1,0201^{18}$
2	$667,19$	$667,19 \cdot 1,0201^{17}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
18	$667,19$	$667,19 \cdot 1,0201$

Muodostetaan lauseke ja lasketaan kertynyt pääoma.

$$\begin{aligned} & 667,19 \cdot 1,0201^{18} + 667,19 \cdot 1,0201^{17} + \ldots + 667,19 \cdot 1,0201 \\ = \; & 667,19 \cdot (1,0201 + \ldots + 1,0201^{18}) \\ = \; & 667,19 \cdot (1,0201 \cdot \frac{1 - 1,0201^{18}}{1 - 1,0201}) \\ \approx \; & 14\ 586,14 \end{aligned}$$

Tomi saa täysi-ikäisenä yhteensä 14 586,14 €.

5 Rahan aika-arvo

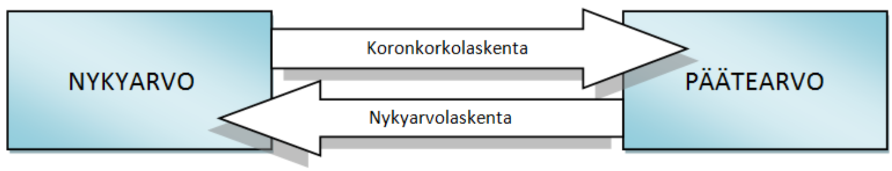
5.1 Nykyarvo

Rahan aika-arvo on keskeinen käsite kaikissa rahoitus-, säästämis- ja sijoituspäätöksissä. Koronkorolla voidaan määrittää tuleva arvo. Tämän käänteinen menetelmä on tulevan arvon määrittäminen nykyhetkellä.

Nykyhetken arvoa sanotaan **nykyarvoksi** (present value).

Aikaisemmin määritimme pääoman tulevan arvon koronkorkolaskennalla (compounding). Tätä arvoa sanotaan **päätearvoksi** (future value).

Nykyarvon määrittämistä päätearvosta sanotaan **nykyarvolaskennaksi** tai **diskonttaukseksi** (discounting).



Koronkorkolaskenta ja nykyarvolaskenta ovat siis toisensa käänteisprosesseja. Diskonttausta tehtiin jo aikaisemmin, kun haluttiin selvittää sijoitukseen tarvittava alkupääoma tietyllä ajalla ja korolla. Korkoa, jolla päätearvo palautetaan nykyarvoksi sanotaan **diskonttauskoroksi**.

Esimerkki 45

Kuinka paljon on laitettava pääomaa säästötilille, jotta 5 vuoden kuluttua rahaa olisi 2 300 €, kun tilin korko on 2,25 %?

Tiliin liittyvä korkokerroin koronkorkolaskennassa on

$$100\% + 2,25\% = 102,25\% = 1,0225.$$

Päätearvo on $K = 2\,300$, jolloin nykyarvo k saadaan ratkaisemalla yhtälö

$$\begin{aligned} K &= k \cdot q^t \\ 2\,300 &= k \cdot 1,0225^5 \qquad || : 1,0225^5 \\ k &= \frac{2\,300}{1,0225^5} \\ k &= 2\,300 \cdot 1,0225^{-5} \\ k &\approx 2057,83 \end{aligned}$$

Pääoman nykyarvo, joka on laitettava tilille, jotta tavoite toteutuisi, on 2 057,83 €.

Edellä nähtiin, että koronkorkolaskennassa käytettystä lausekkeesta $1,0225^5$ saatiin diskottauskorkotekijä $1,0225^{-5}$. Koronkorko ja diskonttauskorko liittyvätkin läheisesti toisiinsa. Nimittäin, jos q on korkotekijä, niin q^k on koronkorkolaskennan prosenttikerroin. Tällöin q^{-k} on nykyarvolaskennan prosenttikerroin. Koronkoron ja nykyarvolaskennan prosenttikertoimet ovat toistensa käänteislukuja, sillä

$$q^k \cdot q^{-k} = q^{k-k} = q^0 = 1.$$

Nykyarvo voidaan laskea seuraavalla kaavalla.

: Nykyarvo

$$k = \frac{K}{q^t} = K \cdot q^{-t}$$

missä

$k =$ pääoma talletuksen alussa
$q = 1 + i$ korkotekijä
$i =$ korkokanta prosenttikertoimena

Esimerkki 46

Tomi saa kaksi tarjousta myymästään kiinteistöstä. Tarjous A tarjoutui maksamaan heti 100 000 €. Tarjous B tarjosi maksamaan heti 40 000, vuoden kuluttua 40 000 ja kahden vuoden kuluttua 30 000. Kumman tarjouksen Tomin kannattaa ottaa vastaan, kun korkokanta on 2 %?

Muunnetaan tarjous B:n päätearvot nykyarvoiksi. Vuoden kuluttua saatavan rahamäärän 40 000 € nykyarvo on

$$k = K \cdot q^{-t} = 40\ 000 \text{ €} \cdot 1,02^{-1} \approx 39\ 215,69 \text{ €}$$

Kahden vuoden kuluttua saatavan rahamäärän 30 000 nykyarvo on

$$k = K \cdot q^{-t} = 30\ 000 \text{ €} \cdot 1,02^{-2} \approx 28\ 835,06 \text{ €}$$

Tarjous B nykyarvo on kokonaisuudessaan noin

$$40\ 000 \text{ €} + 39\ 215,69 \text{ €} + 28\ 835,06 \text{ €} = 109\ 050,75 \text{ €}$$

joka on parempi kuin tarjous A.

5.2 Jäännösarvo

Kun vertaillaan kahta tuottoa tai kustannusta, vertailuajankohdaksi voidaan valita myös jokin toinen ajankohta kuin nykyhetki. Tällöin kaikki arvot on muunnettava saman ajankohdan arvoiksi.

Kun pääomaa käytetään investointeihin, ajanjakson jälkeen investoinnilla voi olla markkinoilla arvoa, ns. **jäännösarvo**.

Jäännösarvolla tarkoitetaan sitä hintaa, joka saadaan investoinnin myymisestä aikajakson loputtua. Puhekielessä usein jäännösarvoa sanotaan **jälleenmyyntiarvo**.

Jäännösarvo voi kasvaa tai vähetä ajan kuluessa. Esimerkiksi auton jäännösarvo usein vähenee. Kiinteistöinvestoinneissa usein pyritään kasvavaan jäännösarvoon.

Esimerkki 47

Rahtiyrityksen pitää investoida uuteen rahtikalustoon. Yritys päätyi tarjoukseen, jossa käsirahaa maksetaan heti 3 000 €. Seuraavan vuoden aikana maksetaan kolme kuukauden välein 2 000 €. Auton käyttöiäksi arvioitiin 8 vuotta ja jäännösarvoksi 9 000 €. Mikä on kaluston nykyarvo, kun korkokanta on 3 % ?

Seuraavan vuoden maksut ja jäännösarvo on muunnettava nykyarvoiksi. Kaluston maksujen nykyarvo on

$$k = 3\ 000 + 2\ 000 \cdot 1,03^{-1} + 2\ 000 \cdot 1,03^{-1,25} + 2\ 000 \cdot 1,03^{-1,5} + 2\ 000 \cdot 1,03^{-1,75} + 2\ 000 \cdot 1,03^{-2} \approx 12\ 566,83$$

Kaluston jäännösarvon nykyarvo on

$$k = 9\ 000 \cdot 1,03^{-8} \approx 7\ 104,68$$

Kaluston nykyarvo kokonaisuudessaan on noin

$$12\ 566,83 \text{ €} + 7\ 104,68 \text{ €} = 19\ 671,51 \text{ €}.$$

6 Lainat

Lainaa otetaan, kun tehdään investointeja.

Lainaa sanotaan myös yleiskielessä **velaksi** tai **luotoksi**.

Lainan antajalle (myyjälle) takaisin maksettava suoritus, ns. **hoitomaksu**, koostuu lainankorosta ja lainapääoman lyhennyksestä. Lainapääoman lyhennys pienentään lainan pääomaa.

Lainaa otettaessa sovitaan takaisinmaksuajasta. Takaisinmaksuaika on se aika, jolloin lainapääoma on maksettu kokonaan takaisin hoitomaksuineen.

Lainatyypit voidaan jakaa karkeasti kahteen osaa sen mukaan, mikä on lainan koron vaikutus takaisinmaksuprosessissa. Lainaa voidaan lyhentää **tasalyhennyksinä** tai **tasaerinä**.

Tasalyhennyslaina	Tasaerälaina
Lainan **pääoman lyhennys** on aina samansuuruinen	Lainan **hoitomaksu** on aina samansuuruinen
Maksettavan koron määrä vaihtelee	Pääoman lyhennyksen suuruus vaihtelee

Usein hoitomaksun lisäksi joudutaan maksamaan myös muita maksuja, esimerkiksi **hoitokuluja**. Kun kaikki kulut ja lainankorot huomiodaan, saadaan lainan **todellinen vuosikorko**.

6.1 Tasalyhennyslaina

Kun lainan pääomaa lyhennetään aina samalla summalla, mutta korot liitetään hoitomaksuun erillisinä suorituksina, sanotaan lainaa **tasalyhennyslainaksi**. Koska pääoma lyhenee tasasuorituksilla, koron suuruus vaihtelee. Tällöin myös hoitomaksun suuruus vaihtelee.

Esimerkki 48

Tomi ottaa 3 vuoden lainan tasalyhennyksellä. Lainaa hän ottaa 9 000 euroa, jota hän lyhentää vuoden välein. Korko on $2,5\%$ p.a. Mitkä ovat lainan hoitomaksut ensimmäisestä viimeiseen? Kuinka paljon maksettiin kaiken kaikkiaan?

Lainan lyhennysten lukumäärä on 3 kappaletta.

Lainan pääoman lyhennyksen suuruus on

$$a = \frac{9\ 000\ €}{3} = 3\ 000\ €$$

`1. hoitomaksu` b_1:

$$b_1 = 3\ 000\ € + 0,025 \cdot 9\ 000\ € = 3\ 225\ €$$

Tällöin pääomaa on jäljellä $9\ 000\ € - 3\ 000\ € = 6\ 000\ €$.

`2. hoitomaksu` b_2:

$$b_2 = 3\ 000\ € + 0,025 \cdot 6\ 000\ € = 3\ 150\ €$$

Tällöin pääomaa on jäljellä $6\ 000\ € - 3\ 000\ € = 3\ 000\ €$.

`3. hoitomaksu` b_3:

$$b_3 = 3\ 000\ € + 0,025 \cdot 3\ 000\ € = 3\ 075\ €$$

Tällöin pääomaa on jäljellä $3\ 000\ € - 3\ 000\ € = 0\ €$.

Kaiken kaikkiaan lainaa maksettiin takaisin

$$b_1 + b_2 + b_3 = 3\ 225\ € + 3\ 150\ € + 3\ 075\ € = 9\ 450\ €.$$

Esimerkki 49

Tomi ottaa 3 vuoden lainan tasalyhennyksellä. Lainaa hän ottaa 9 000 euroa, jota hän lyhentää vuoden välein. Mikä koron on oltava, jotta todellinen takaisin maksettava rahamäärä on 10 % suurempi alkuperäisestä lainapääomasta?

Olkoon p lainan koron prosenttikerroin. Vaaditaan, että hoitomaksujen summa

$$b_1 + b_2 + b_3 = 9\ 000\ € \cdot 1,10 = 9\ 900\ €.$$

Hoitomaksut ovat

$$\begin{aligned} b_1 &= 3\ 000\ € + p \cdot 9\ 000\ € \\ b_2 &= 3\ 000\ € + p \cdot 6\ 000\ € \\ b_3 &= 3\ 000\ € + p \cdot 3\ 000\ € \end{aligned}$$

jolloin saadaan yhtälö

$$3\ 000\ € + p \cdot 9\ 000\ € + 3\ 000\ € + p \cdot 6\ 000\ € + 3\ 000\ € + p \cdot 3\ 000\ € = 9\ 900\ €$$

$$9\ 000\ € + p \cdot 9\ 000\ € + p \cdot 6\ 000\ € + p \cdot 3\ 000\ € = 9\ 900\ €$$

$$p(9\ 000\ € + 6\ 000\ € + 3\ 000\ €) = 900\ € \qquad ||(\text{Aritmeettinen summa})$$

$$p(3 \cdot \frac{9\ 000 + 3\ 000}{2}) = 900$$

$$p = \frac{2}{3} \cdot \frac{900}{9000 + 3000} = 0,05$$

Eli koron on oltava 5 prosenttia.

Esimerkki 50

Otetaan lainaa 24 000 € kolmeksi vuodeksi korolla 5,8 % p.a. Lainaa lyhennetään puolen vuoden välein. Lasketaan tasalyhennyslainan hoitomaksujen suuruudet.

Koska laina on tasalyhennyslaina, lyhennetään lainapääomaa aina samalla summalla. Lyhennyksiä on yhteensä

$$2 \cdot 3 = 6$$

Lainapääomaa lyhennetään jokaisella kerralla

$$k = \frac{24\ 000€}{6} = 4\ 000\ €$$

Lainan hoitomaksun korko saadaan kaavasta $r = kit$.
Taulukoidaan hoitomaksut.

Erä	Lainapääoma (€)	Korko (€)	Lyhennys (€)	Hoitomaksu (€)
1	24 000	$24\ 000 \cdot 0,058 \cdot \frac{1}{2} = 696$	4000	$4\ 000 + 696 = \mathbf{4\ 696}$
2	$24\ 000 - 4\ 000 = 20\ 000$	$20\ 000 \cdot 0,058 \cdot \frac{1}{2} = 580$	4000	$4\ 000 + 580 = \mathbf{4\ 580}$
3	$20\ 000 - 4\ 000 = 16\ 000$	$16\ 000 \cdot 0,058 \cdot \frac{1}{2} = 464$	4000	$4\ 000 + 464 = \mathbf{4\ 464}$
4	$16\ 000 - 4\ 000 = 12\ 000$	$12\ 000 \cdot 0,058 \cdot \frac{1}{2} = 348$	4000	$4\ 000 + 345 = \mathbf{4\ 348}$
5	$12\ 000 - 4\ 000 = 8\ 000$	$8\ 000 \cdot 0,058 \cdot \frac{1}{2} = 232$	4000	$4\ 000 + 232 = \mathbf{4\ 232}$
6	$8\ 000 - 4\ 000 = 4\ 000$	$4\ 000 \cdot 0,058 \cdot \frac{1}{2} = 116$	4000	$4\ 000 + 116 = \mathbf{4\ 116}$

6.2 Tasaerälaina

Edellä nähtiin, että tasalyhennyslainassa hoitomaksu muuttui ajan kuluessa. Taloudenhoidossa on usein hyvä määrittää menoerät samansuuruisiksi, mikä lisää talouden kehityksen ennustettavuutta. Tällöin halutaan maksaa lainaa aina samalla summalla.

Tasaerälainassa eli **annuiteettilainassa** hoitomaksu on aina saman suuruinen. Pääoman lyhennyksen ja koron summa on siis vakio.
Koron ja lainanlyhennyksen suhde hoitomaksussa vaihtelee. Koska lainanlyhennysprosessissa kertyy erisuuruisia korkosummia, ei hoitokuluja voida määrittää suoraan jakamalla lainapääoma lyhennysaikajaksojen lukumäärällä. Kyseessä on sama ilmiö kuin toistuvien talletusten kohdalla, jossa talletukset kasvavat korkoakorolle.

Esimerkki 51

Mikä hoitomaksu eli **annuiteetti** on lyhennettävä 12 000 € lainassa, kun lyhennykset tehdään kerran vuodessa 4 vuoden ajan ja lainan korko on 5 % p.a.?

Ensimmäisenä vuonna lainaa on $K = 12\ 000$ €, jonka jälkeen on maksettava siitä kertyneet korot $12\ 000 \cdot 0,05 = 600$ €. Lyhennettävää on kertynyt yhteensä

$$12\ 000 \text{ €} + 600 \text{ €} = 12\ 600 \text{ €} = 12\ 000 \text{ €} \cdot 1,05$$

Tätä lyhennetään hoitomaksulla A

$$12\ 000 \text{ €} \cdot 1,05 - A.$$

Ensimmäisen vuoden jälkeen pääomaa on siis maksettavana $12\ 000 \text{ €} \cdot 1,05 - A$, mikä kasvaa seuraavan vuoden korkoa. Toisen vuoden lyhennyksen jälkeen lainapääomaa on jäljellä yhteensä

$$(12\ 000 \text{ €} \cdot 1,05 - A) \cdot 1,05 - A = 12\ 000 \text{ €} \cdot 1,05^2 - 1,05A - A$$

Kolmannen vuoden lyhennyksen jälkeen lainapääomaa on jäljellä yhteensä

$$
\begin{aligned}
&(12\ 000\ € \cdot 1,05^2 - 1,05A - A) \cdot 1,05 - A \\
&= 12\ 000\ € \cdot 1,05^3 - 1,05^2A - 1,05A - A
\end{aligned}
$$

Neljännen vuoden lyhennyksen jälkeen lainapääomaa on jäljellä yhteensä

$$
\begin{aligned}
&(12\ 000\ € \cdot 1,05^3 - 1,05^2A - 1,05A - A) \cdot 1,05 - A \\
&= 12\ 000\ € \cdot 1,05^4 - 1,05^3A - 1,05^2A - 1,05A - A
\end{aligned}
$$

Neljän vuoden jälkeen laina on lyhennetty kokonaan, joten vaaditaan

$$12\ 000 \cdot 1,05^4 - 1,05^3A - 1,05^2A - 1,05A - A = \mathbf{0}$$

Tällöin

$$
\begin{aligned}
1,05^3A + 1,05^2A + 1,05A + A &= 12\ 000 \cdot 1,05^4 \\
A(1,05^3 + 1,05^2 + 1,05 + 1) &= 12\ 000 \cdot 1,05^4 \\
A\left(1 \cdot \frac{1 - 1,05^4}{1 - 1,05}\right) &= 12\ 000 \cdot 1,05^4 \\
A &= 12\ 000 \cdot 1,05^4 \cdot \left(\frac{1 - 1,05}{1 - 1,05^4}\right) \\
A &\approx 3\ 384,14
\end{aligned}
$$

Lainan vuosittainen hoitomaksu on 3 384, 14 €.

Annuiteetti A saadaan seuraavalla kaavalla

: Annuiteetti

$$A = K \cdot q^n \cdot \frac{1-q}{1-q^n}$$

missä

m = lyhennysten lukumäärä vuodessa
i = korkokanta prosenttikertoimena
$q = 1 + \frac{i}{m}$ korkokerroin
n = lyhennysten kokonaislukumäärä

Jäljellä olevan lainan määrä V, kun lyhennyksiä on tehty k verran, saadaan kaavalla

: Jäljellä oleva laina

$$V = K \cdot q^k - A\frac{1-q^k}{1-q}$$

missä

m = lyhennysten lukumäärä vuodessa
i = korkokanta prosenttikertoimena
$q = 1 + \frac{i}{m}$ korkokerroin

Esimerkki 52

Tomi ottaa 120 000 € asuntolainan 25 vuodeksi 3,8 % korolla. Mikä on lainan annuiteetti, kun lainanlyhennys tapahtuu kuukausittain? Kuinka paljon lainaa on jäljellä 12 vuoden jälkeen? Kuinka paljon on lainan kokonaiskustannukset?

Lyhennyskertoja on

$$12 \cdot 25 = 300$$

Korkokerroin on

$$q = 1 + \frac{0,038}{12} = \frac{6\ 019}{6\ 000}$$

Annuiteetin suuruus on

$$A = 120\ 000 \cdot \left(\frac{6\ 019}{6\ 000}\right)^{300} \cdot \frac{1 - (\frac{6\ 019}{6\ 000})}{1 - (\frac{6\ 019}{6\ 000})^{300}} \approx 620,23\ (€)$$

Lainan lyhennyskertoja 12 vuodessa on yhteensä

$$12 \cdot 12 = 144$$

Lainaa on jäljellä 12 vuoden jälkeen

$$V = 120\ 000 \cdot \left(\frac{6\ 019}{6\ 000}\right)^{144} - 620,23 \cdot \frac{1 - (\frac{6\ 019}{6\ 000})^{144}}{1 - \frac{6\ 019}{6\ 000}} \approx 76\ 256,85\ (€)$$

Lainan kokonaiskustannukset ovat

$$300 \cdot 620,23\ € = 186\ 069\ €$$

Hakemisto