|  |  |
| --- | --- |
|  | MATIKKAA MERKONOMEILLE |
|  |  |
| 8.3.2016 | Murtoluvut, prosentti-, korko- ja kumulatiivinen laskenta |
|  | Matikkaa merkonomeille käsittelee liike-elämän peruslaskutoimituksia: Prosentti- ja korkolaskentaa ja niiden lisäksi murtolukuja sekä kumulatiivista laskentaa, joita tarvitaan mm. palkanlaskennassa. |

MATIKKAA MERKONOMEILLE

Murtoluvut, prosentti-, korko- ja kumulatiivinen laskenta

# Murtoluvut

Murtolukuja tarvitaan vielä jonkin verran, vaikka niihin törmääkin varsin harvoin. Niiden etu on tarkkuus, jos vaihtoehtona on päättymätön desimaaliluku (esim. vs. 0,3333333...). Murtoluku ilmaisee osuutta tai osuuksia jostakin ja osuuksista on kysymys myös esim. prosentti- ja korkolaskennassa. Murtoluvun osat ovat osoittaja (murtoviivan yläpuolella), murtoviiva ja nimittäjä (murtoviivan alapuolella). Varsinaisesta murtoluvusta on kysymys silloin, kun osoittaja on pienempi tai yhtä suuri kuin nimittäjä. Sekaluvussa on kokonaisosa ja murto-osa. Epämurtoluvussa osoittaja on suurempi kuin nimittäjä. 

Jotta murtoluvuilla voidaan laskea yhteen- ja vähennyslaskuja, on niitä muokattava niin, että niiden nimittäjiksi tulee sama luku. Muokkaaminen tapahtuu niin, että sekä osoittaja että nimittäjä kerrotaan tai jaetaan samalla luvulla. Esim. + = + = = 1; esimerkissä kerrottiin eli lavennettiin neljällä ja kolmella, jolloin yhteiseksi nimittäjäksi saatiin 12 ja sen jälkeen osoittajat laskettiin yhteen. Murtoluvut kerrotaan siten, että osoittajat kerrotaan keskenään ja nimittäjät kerrotaan keskenään. Esim. \* = . Murtoluvuilla suoritetaan jakolasku kertomalla jaettava jakajan käänteisluvulla (vrt. jakolaskun korvaaminen käänteisluvulla kertomisella). Esim. / = .

# PROSENTTILASKENTA

Prosenttilaskenta on kaupanalalla ja liike-elämässä käytetyin matematiikan osa-alue. Hintojen alennukset ja korotukset ilmoitetaan usein prosenttimääräisinä. Esimerkiksi arvonlisävero ja ennakonpidätys perustuvat prosenttilaskentaan. Prosenttilaskentaa tarvitaan myös korkolaskennassa. Prosenttia merkitään 1 % ja se tarkoittaa yhtä sadasosaa (1/100 tai 0,01). Vastaavasti 10 % on kymmenen sadasosaa eli 10/100 tai 0,1. Sama asia voidaan siis esittää murtolukuna, desimaalilukuna ja prosenttina. Tuhannesosa (1 ‰) on nimeltään promille eli 1/1000 tai 0,001.

**Prosenttilaskennan peruskaava on:**

**b = = p \* \* a**

**Kaavassa a = perusarvo, b = prosenttiarvo ja p = prosenttiluku**. Prosenttiarvo b on p %:a perusarvo a:sta.

Esim. 5 = 10 \* 50 / 100 (5 = 10 % 50:stä). Sama laskutoimitus voidaan esittää myös muodossa 5 = 10 / 100 \* 50. Esimerkissä 50 on perusarvo, 10 on prosenttiluku ja 5 on prosenttiarvo. (Huom! Jos kaavassa on vaakajakoviiva, jonka ylä- ja / tai alapuolella on lauseke, on se ratkaistava laskujärjestyksen mukaan ennen jakolaskua. Ks. laskujärjestys.)

**Jos halutaan ratkaista prosenttiluku p, peruskaava muuttuu muotoon** **p = b / a \* 100**.

Esim. opiskelijaryhmässä on viisi miestä ja 25 naista. Montako prosenttia on miesten osuus ryhmästä? Ryhmän koko on 5 + 25 = 30 ja miesten osuus siitä 5 / 30 \* 100 = 16,66666 ≈ 16,67 %.

**Jos halutaan ratkaista perusarvo a, kaava on muodossa a = b / p \* 100**.

Kun sijoitetaan kaavaan edellisen esimerkin luvut, saadaan a = 5 / 16,67 \* 100 eli a = 29,99 ≈ 30.

Jos lasketaan promilleja, korvataan kaavassa luku 100 luvulla 1000. Osaomistajan työttömyysvakuutusmaksu vuonna 2016 on 0,46 % eli 4,6 ‰. Jos halutaan tietää montako euroa (prosentti- tai promillearvo) on 1500,00 euron bruttopalkasta on suoritettava seuraava laskutoimitus: 4,6 / 1000 \* 1500 = 6,90 tai 0,4,6/ 100 \* 1500 = 6,90 tai 0,0046 \* 1500 = 6,90.

#### Korotetun tai alennetun arvon laskeminen

Jos perusarvoa korotetaan lisäämällä siihen siitä prosentteina laskettu luku, saadaan korotettu eli lisätty arvo. Esim. kun alkuperäistä hintaa 450 euroa korotetaan 25 %, lasketaan ensin korotuksen osuus 450 \* 25 / 100 = 112,50, mikä lisätään alkuperäiseen hintaan ja saadaan korotettu hinta 450 + 112,50 = 562,50. Vaihtoehtoinen tapa on muodostaa kerroin 1 + korotus % / 100, joka on tässä tapauksessa 1,25 (450 \* 1,25 = 562,50). Jos alkuperäistä hintaa ei tiedetä, mutta tiedetään, että sitä oli korotettu 25 %, saadaan se selville jakamalla korotettuhinta 562,50 kertoimella 1,25 tai kertomalla se kertoimen vastaluvulla 1/1,25 eli 0,8:lla.

Jos perusarvoa alennetaan vähentämällä siitä prosentteina laskettu luku, saadaan alennettu tai vähennetty arvo. Esim. kun alkuperäistä hintaa 450 euroa alennetaan 25 %, lasketaan ensin alennuksen osuus, joka on sama kuin edellisen tehtävän korotus 450 \* 25 / 100 = 112,50, mikä vähennetään alkuperäisestä hinnasta ja saadaan alennettu hinta 450 - 112,50 = 337,50. Vaihtoehtoisesti tässäkin voidaan muodostaa kerroin 1 – alennus % /100 eli tässä tapauksessa kerroin on 0,75 (450 \* 0,75 = 337,50). Jos alkuperäistä hintaa ei tiedettäisi, mutta tiedettäisi, että sitä on alennettu 25 %, voidaan alennetusta hinnasta selvittää alkuperäinen jakamalla 337,50 kertoimella 0,75 tai kertomalla sen vastaluvulla 1/0,75. Näitä kertoimia käytetään esimerkiksi silloin, kun halutaan muuttaa kerralla suuri joukko hintoja samassa suhteessa.

#### PERUSARVON MÄÄRITTÄMINEN

Muutosprosenttia laskettaessa tärkeintä on ensin määrittää perusarvo. Perusarvosta lasketaan prosenttiarvo. Jos perusarvo on määritetty väärin, on prosenttiarvokin väärin. Perusarvon määrittämisessä auttavat seuraavat ohjeet:

* Perusarvo on alkuperäinen arvo (vanha hinta, aikaisempi palkka…), johon vertailu kohdistuu (pienempi kuin, suurempi kuin).
* Taaraa laskettaessa bruttopaino,
* liuos- ja seoslaskuissa kokonaismäärä
* myyntikatetta laskettaessa myyntihinta.
* Perusarvon voi tunnistaa päätteestä –sta,- stä (palka**sta,** määrä**stä), -a, -ä, -ta tai –tä (**euroa, esinettä…) tai edeltävästä kuin sanasta.

# KORKOLASKENTA

Korko on korvaus pääoman käytöstä. Korkolasku on keino selvittää maksettavien korkomenojen ja saatavien korkotuottojen määrä sekä tehdä vertailuja eri maksutapojen ja rahoitusmuotojen välillä.

Korkolaskennan termit:

Pääoma = sijoitettu tai velaksi saatu rahamäärä

Korkoprosentti = korkokanta

Korkoaika = talletus- tai laina-aika

Korko = rahamääräinen korvaus pääoman käytöstä

Kasvanut pääoma = pääoman ja koron summa.

**Lainan pääoma on 5000 euroa ja korkokanta 2,5 %. Vuoden korko on 5000 \* 2,5 / 100 = 125 euroa.**

Aina pääoma ei ole kuitenkaan käytössä koko vuotta. Silloin koron määrittämisessä käytetään korkopäiviä eli aikaa päivinä, jonka pääoma on ollut käytössä. Korkopäivien laskennassa on käytössä kolme eri laskentatapaa: englantilainen, ranskalainen ja saksalainen tapa. Englantilaisessa tavassa korkopäivät lasketaan todellisten kalenteripäivien mukaan. Jakajana käytetään lukua 365 ja karkausvuonna 366. Ranskalaisessa tavassa korkopäivät lasketaan todellisten kalenteripäivien mukaan, mutta jakajana käytetään lukua 360. Saksalaisessa tavassa jokaisessa kuukaudessa lasketaan olevan 30 päivää ja jakaja on 12 \* 30 = 360.

Suomessa käytetään yleisesti englantilaista tapaa, mutta verottaja käyttää pääasiassa saksalaista tapaa paitsi perintö- ja lahjaveron osalta englantilaista tapaa. Euroalueen rahamarkkinoilla käytetään ranskalaista tapaa ja esim. Euriboriin sidottujen lainojen korkopäivät lasketaan tätä tapaa käyttäen. Korkopäiviä laskettaessa kahden päivämäärän välillä ei yleensä lueta mukaan ensimmäistä päivämäärää, mutta jälkimmäinen luetaan. Esim. korkopäiviä välillä 1.3.2016 – 31.3.2016 on 30 todellisia korkopäiviä laskettaessa.

Lainan pääoma on 5000 euroa ja korkokanta 2,5 %. 30 päivän korko on englantilaisen tavan mukaan laskettuna vuonna 2016: 5000 \* 2,5 \* 30 / (100 \* 366) ≈ 10,25 euroa ja vuonna 2017: 5000 \* 2,5 \* 30 / (100 \* 365) ≈ 10,27 euroa. Ranskalaisen tavan mukaan laskettuna korko olisi kumpanakin vuonna : 5000 \* 2,5 \* 30 / (100 \* 360) ≈ 10,42 euroa.

Kun korko lisätään pääomaan, saadaan kasvanut pääoma. Se lasketaan seuraavalla kaavalla:

**pääoma \* (1 + korkoaika \* korko%/100)**

Kaava muodostetaan samaan tapaan kuin prosenttilaskennan lisäyskerroin. Lainan pääoma on 5000 euroa ja korkokanta 2,5 %. Vuoden korko englantilaisen tavan mukaan laskettuna lisätään pääomaan: 5000 \* ( 1 + 1 \* (2,5 / 100)) = 5125 euroa. Korkoaika on yksi, koska korkokin on vuosikorko. Seuraavassa esimerkissä lasketaan kasvanutta pääoma 30 päivän korkoajalle (30/365) edellisen esimerkin luvuilla: 5000 \* ( 1 + 30/365 \* (2,5 / 100)) = 5010,27.

Laina maksetaan takaisin yhdessä tai useammassa erässä. lyhennystavan mukaan lainat jaetaan tasalyhenteisiin ja tasaerälainoihin.

#### TASALYHENTEINEN LAINA

Tasalyhenteisessä lainassa lyhennyserä on vakio. Lyhennyksen yhteydessä maksettava korko ja samalla koko maksettava yhteissumma pienenee lainan määrän pienentyessä.

esim. Yritys otti 5000 euron lainan 31.12. 20x0 rahoituslaitokselta. Luoton Euribor-korko oli nostamishetkellä ja ensimmäisen vuoden ajan 2,17 %. Seuraavan vuoden korko oli 2,08 % ja viimeisen vuoden 2,05 %. Lyhennys ja korko maksettiin puolivuosittain viidessä erässä. Koska kysymys oli Euribor-korosta, lasketaan korkopäivät ranskalaista tapaa käyttäen.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| pvm | pääoma | lyhennys | korkopäivät | korko % | korko | lyhennyserä yht. |
| 1.7.20x1 | 5000 | 1000 | 182 | 2,17 | 54,85 | 1054,85 |
| 31.12.20x1 | 4000 | 1000 | 183 | 2,17 | 44,12 | 1044,12 |
| 1.7.20x2 | 3000 | 1000 | 182 | 2,08 | 31,55 | 1031,55 |
| 31.12.20x2 | 2000 | 1000 | 183 | 2,08 | 21,15 | 1021,15 |
| 1.7.20x3 | 1000 | 1000 | 182 | 2,05 | 10,36 | 1010,36 |

TASAERÄ- ELI ANNUITEETTILAINA

Tällä periaatteella maksettavissa lainoissa on kaksi tapaa: maksuerä (lyhennys + korko) pidetään samansuuruisena ja laina-aikaa muutetaan, jos korko muuttuu tai maksuerää tarkistetaan, jos korko muuttuu, jolloin laina-aika ei muutu.

esim. Yritys otti 5000 euron lainan 31.12. 20x0 rahoituslaitokselta. Luoton korko on nostamishetkellä 2,17 %. Lyhennys ja korko maksetaan puolivuosittain viidessä tasaerässä. Laina-aika on kaksi ja puoli vuotta.

**Tasaerän suuruus lasketaan kaavan mukaan:**

**Kaavassa**

A = tasaerä

N = lainan määrä = 5000

i = vuotuinen korko desimaalimuodossa = 0,0217

n = laina-aika vuosina = 2,5

m = maksukertoja vuodessa = 2

Kun edellisen esimerkin luvut sijoitetaan kaavaan, saadaan tasaeräksi 1032,78 euroa.

A = 0,0217 / 2 \* (1 + 0,0217 / 2)5 / ((1 + 0,0217 / 2)5 -1) \* 5000 = 0,01085 \* 1,010855/(1,010855 - 1)\* 5000 = 1032,784 ≈ 1032,78.

(Huom! Lukuja ei saa pyöristää välivaiheissa, vaan se on tehtävä vasta lopussa)

Excelissä kaava on tämän näköinen:

=0,0217/2\*(1+0,0217/2)^(2\*2,5)/((1+0,0217/2)^(2\*2,5)-1)\*5000

# KUMULATIIVINEN LASKENTA

Kumulatiivinen tarkoittaa kerääntyvää tai kertyvää. Kumulatiiviseen laskentaan törmää erityisesti palkkatulon ennakonpidätyksen laskennassa. Kumulatiivisessa laskennassa summaa kerrytetään ja se kasvaa ajan kuluessa, palkanlaskennassa palkkakausittain. Kumulatiivisessa ennakonpidätystavassa kumulatiivista tuloa verrataan veropäivien kumulatiiviseen tulorajaan ja siitä laskettavasta ennakonpidätyksestä vähennetään aikaisemmin suoritettu kumulatiivinen ennakonpidätys.

Esimerkissä on laskettu ennakonpidätys kumulatiivista tapaa käyttäen kuukausipalkkaiselle työntekijälle, jonka kuukausipalkka 2500,00. Lomaraha 1000,00 on maksettu heinäkuussa.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| perus% | 23 % | lisä% | 35 % | tuloraja | 31000 |  |
| palkkakausi | rahapalkka | kum. Palkka | kum. Tuloraja | kum. Ep. | kauden ep | maksettava palkka |
| tammikuu | 2500 | 2500 | 2583,33 | 575,00 | 575,00 | 1925,00 |
| helmikuu | 2500 | 5000 | 5166,67 | 1150,00 | 575,00 | 1925,00 |
| maaliskuu | 2500 | 7500 | 7750,00 | 1725,00 | 575,00 | 1925,00 |
| huhtikuu | 2500 | 10000 | 10333,33 | 2300,00 | 575,00 | 1925,00 |
| toukokuu | 2500 | 12500 | 12916,67 | 2875,00 | 575,00 | 1925,00 |
| kesäkuu | 2500 | 15000 | 15500,00 | 3450,00 | 575,00 | 1925,00 |
| heinäkuu | 3500 | 18500 | 18083,33 | 4305,00 | 855,00 | 2645,00 |
| elokuu | 2500 | 21000 | 20666,67 | 4870,00 | 565,00 | 1935,00 |
| syyskuu | 2500 | 23500 | 23250,00 | 5435,00 | 565,00 | 1935,00 |
| lokakuu | 2500 | 26000 | 25833,33 | 6000,00 | 565,00 | 1935,00 |
| marraskuu | 2500 | 28500 | 28416,67 | 6565,00 | 565,00 | 1935,00 |
| joulukuu | 2500 | 31000 | 31000,00 | 7130,00 | 565,00 | 1935,00 |
| yht. | 31000 |  |  |  | 7130 | 23870,00 |
|  |  |  |  |  |  |  |

Tässä on esitetty edellisen taulukon laskukaavat.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| perus% | 0,23 | lisä% | 0,35 | tuloraja | 31000 |  |
| palkkakausi | rahapalkka | kum. Palkka | kum. Tuloraja | kum. Ep. | kauden ep | maksettava palkka |
| tammikuu | 2500 | =B3 | =$F$1/12 | =JOS(C3<D3;C3\*$B$1;D3\*$B$1+(C3-D3)\*$D$1) | =E3 | =B3-F3 |
| helmikuu | 2500 | =B4+C3 | =$F$1/12+D3 | =JOS(C4<D4;C4\*$B$1;D4\*$B$1+(C4-D4)\*$D$1) | =E4-E3 | =B4-F4 |
| maaliskuu | 2500 | =B5+C4 | =$F$1/12+D4 | =JOS(C5<D5;C5\*$B$1;D5\*$B$1+(C5-D5)\*$D$1) | =E5-E4 | =B5-F5 |
| huhtikuu | 2500 | =B6+C5 | =$F$1/12+D5 | =JOS(C6<D6;C6\*$B$1;D6\*$B$1+(C6-D6)\*$D$1) | =E6-E5 | =B6-F6 |
| toukokuu | 2500 | =B7+C6 | =$F$1/12+D6 | =JOS(C7<D7;C7\*$B$1;D7\*$B$1+(C7-D7)\*$D$1) | =E7-E6 | =B7-F7 |
| kesäkuu | 2500 | =B8+C7 | =$F$1/12+D7 | =JOS(C8<D8;C8\*$B$1;D8\*$B$1+(C8-D8)\*$D$1) | =E8-E7 | =B8-F8 |
| heinäkuu | 3500 | =B9+C8 | =$F$1/12+D8 | =JOS(C9<D9;C9\*$B$1;D9\*$B$1+(C9-D9)\*$D$1) | =E9-E8 | =B9-F9 |
| elokuu | 2500 | =B10+C9 | =$F$1/12+D9 | =JOS(C10<D10;C10\*$B$1;D10\*$B$1+(C10-D10)\*$D$1) | =E10-E9 | =B10-F10 |
| syyskuu | 2500 | =B11+C10 | =$F$1/12+D10 | =JOS(C11<D11;C11\*$B$1;D11\*$B$1+(C11-D11)\*$D$1) | =E11-E10 | =B11-F11 |
| lokakuu | 2500 | =B12+C11 | =$F$1/12+D11 | =JOS(C12<D12;C12\*$B$1;D12\*$B$1+(C12-D12)\*$D$1) | =E12-E11 | =B12-F12 |
| marraskuu | 2500 | =B13+C12 | =$F$1/12+D12 | =JOS(C13<D13;C13\*$B$1;D13\*$B$1+(C13-D13)\*$D$1) | =E13-E12 | =B13-F13 |
| joulukuu | 2500 | =B14+C13 | =$F$1/12+D13 | =JOS(C14<D14;C14\*$B$1;D14\*$B$1+(C14-D14)\*$D$1) | =E14-E13 | =B14-F14 |
| yht. | =SUMMA(B3:B14) |  |  |  | =SUMMA(F3:F14) | =SUMMA(G3:G14) |
|  |  |  |  |  |  |  |