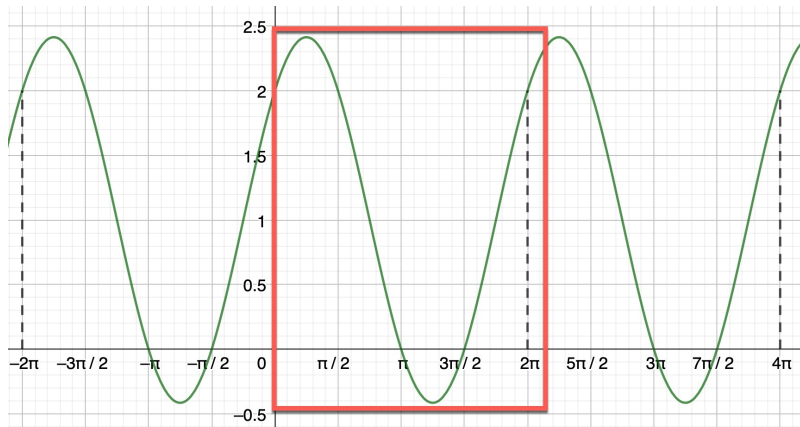


Luku 4.3 Trigonometristen funktioiden suurimpia ja pienimpiä arvoja

Esimerkki

Määritä funktion $f(x) = \sin x + \cos x + 1$ suurin ja pienin arvo ilman teknisiä apuvälineitä.

Ratkaisu: Koska sinin ja kosinin perusjakso on 2π , niin myös funktio f on jaksollinen perusjaksolla 2π . Riittää tarkastella funktiota välillä $[0, 2\pi]$.



Huom! Funktion jaksollisuus näkyy kuvaajassa siten, että kuvaaja toistuu samanlaisena 2π :n mittaisilla väleillä.

Funktio on jatkuva ja derivoituva, joten suljetulla välillä se saa suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteissä tai välillä olevassa derivaatan nollakohdassa.

Päätepisteet:

$$f(0) = \sin 0 + \cos 0 + 1 = 2$$

$$f(2\pi) = 2$$

Derivaatan nollakohdat:

$$f'(x) = \cos x - \sin x + 0 = 0$$

$$-\sin x = -\cos x \quad || \quad : (-\cos x)$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = 1$$

$$\tan x = 1$$

Eräs ratkaisu on $x = \frac{\pi}{4}$, ja kaikki ratkaisut saadaan yhtälöstä

$$x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi, \text{ jossa } n \in \mathbb{Z}. \text{ Näistä välillä } [0, 2\pi] \text{ ovat}$$

$$\frac{\pi}{4} \quad \text{ja} \quad \frac{\pi}{4} + 1 \cdot \pi = \frac{5\pi}{4}.$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1 = \sqrt{2} + 1$$

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + 1 = -\sqrt{2} + 1$$

Vastaus: Suurin arvo on $\sqrt{2} + 1$ ja pienin $-\sqrt{2} + 1$

Esimerkki 2

Johtimessa kulkeva sähkövirta ampeereina (A) noudattaa funktiota

$$i(t) = 4,5 \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right), \quad \text{jossa } t \text{ on aika sekunteina. Määritä}$$

- (a) funktion perusjakso.
- (b) sähkövirran suurin arvo.
- (c) sähkövirran muutosnopeuden suurin arvo.

Ratkaisu:

a) Koska sinin perusjakso on 2π , niin funktion perusjakso on $\frac{2\pi}{100\pi} = 0,02$

Vastaus: 0,02 sekuntia

b) Sinin arvojoukko on $[-1, 1]$. Näin ollen funktio saa suurimman arvonsa, kun

$$\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Suurin arvo on $4,5 \cdot 1 = 4,5$ (A)

Vastaus: 4,5 ampeeria

c) Derivoidaan funktio.

$$u(t) = 4,5 \sin t \quad s(t) = 100\pi t + \frac{\pi}{4}$$

$$u'(t) = 4,5 \cos t \quad s'(t) = 100\pi$$

$$i'(t) = u'(s(t)) \cdot s'(t)$$

$$= 4,5 \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \cdot 100\pi$$

$$= 450\pi \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Kosinin arvojoukko on $[-1, 1]$, joten suurin arvo on

$$450\pi \cdot 1 = 450\pi \approx 1400 \quad (\text{ampeeria/sekunti})$$

Vastaus: 1400 A/s