Luku 2.1 Klassinen todennäköisyys

Esimerkki
Heitetään kahta arpakuutiota. Millä todennäköisyydellä silmälukujen summa
a) on 7?
b) ei ole 7?
Ratkaisu: Havainnollistetaan alkeistapauksia kuviolla:

	1	2	3	4	5	6
1						x
2					x	
3				x		
4			x			
5		x				
6	x					

a) Suotuisia alkeistapauksia on 6, ja eri alkeistapauksia on yhteensä $6 \cdot 6 = 36.$

Todennäköisyys on $P\left(\text{silmälukujen summa on } 7\right) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}.$

b) Tapahtumat "summa on 7" ja "summa ei ole 7" ovat toistensa vastatapahtumia. Näin ollen

todennäköisyys on $P\left(\text{silmälukujen summa ei ole } 7\right) = 1 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}.$

Luku 2.2 Tilastollinen ja geometrinen todennäköisyys

Esimerkki
a) Seurustelun ensimmäisen 90 päivän aikana Mikko näkee tyttöystäväänsä 78 päivänä. Millä tilastollisella todennäköisyydellä Mikko näkee tyttöystäväänsä satunnaisesti valittuna päivänä?
b) Busseja tulee pysäkille 30 minuutin välein. Millä todennäköisyydellä matkustaja joutuu odottamaan yli 20 minuuttia, jos hän saapuu pysäkille satunnaiseen aikaan?

Ratkaisu:

a) $A = \text{Mikko näkee tyttöystäväänsä}$

Tilastollinen todennäköisyys on $P(A) = \dfrac{78}{90} = 0{,}8666... \approx 0{,}87 = 87\ \%.$

b) 30 minuutin jakso jakaantuu 20 minuutin jaksoon, jossa odotus on 20 min tai vähemmän, ja 10 minuutin jaksoon, jossa odotus on yli 20 min.

$$P(\text{odotus yli } 20 \text{ min}) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

Luku 2.3 Kertolaskusääntö

Esimerkki
a) Autoon tulee tarkasteluaikana rengasvika 3,0 % todennäköisyydellä ja sähkövika 8,6 % todennäköisyydellä. Viat ovat toisistaan riippumattomia. Millä todennäköisyydellä kumpaakaan vikaa ei esiinny tarkasteluaikana?
b) Korttipakasta vedetään kolme korttia niin, että aiemmin vedettyjä kortteja ei palauteta pakkaan. Millä todennäköisyydellä kaikki vedetyt kortit ovat samaa maata?
Ratkaisu:

a) $A = \text{ ei rengasvikaa}$ $\quad B = \text{ei sähkövikaa}$

$$P(A) = 100\ \% - 3{,}0\ \% = 97\% = 0{,}97$$

$$P(B) = 100\ \% - 8{,}6\% = 91{,}4\ \% = 0{,}914$$

Koska viat ovat riippumattomia toisistaan, niin

$$P(A \text{ ja } B) = 0{,}97 \cdot 0{,}914 = 0{,}886... \approx 0{,}89 = 89\ \%.$$

b) Korttipakassa on 52 korttia, ja jokaisessa maassa on 13 korttia. Korttien määrä muuttuu nostettaessa, joten tapahtumat eivät ole riippumattomia.

Ensimmäinen kortti saa olla mitä tahansa. Sen vetämisen jälkeen tätä maata on 12, ja kortteja yhteensä 51. Jos toinenkin kortti on samaa maata, niin sen jälkeen tätä maata on 11 kpl ja kortteja yhteensä 50. Kertolaskusäännön nojalla todennäköisyys on

$$P(3 \text{ samaa maata}) = 1 \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} = 0{,}0517... \approx 5{,}2\ \%.$$

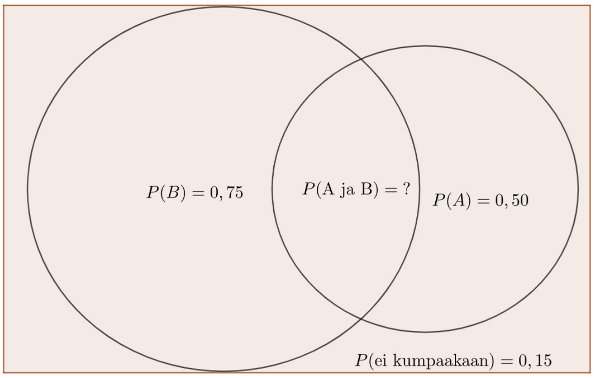
Luku 2.4 Yhteenlaskusääntö

Esimerkki
Teatterin väliajalla on myynnissä pullaa ja juomia. Yleisöstä 50 % tilaa pullan ja 75 % juoman. 15 % ei tilaa kumpaakaan.
a) Havainnollista tilannetta Venn-diagrammilla.
b) Kuinka monta prosenttia yleisöstä tilaa sekä pullan että juoman?

Ratkaisu: Koska 15 % ei tilaa kumpaakaan, niin 85 % tilaa pullan tai juoman.

$$A = \text{tilaa pullan} \qquad B = \text{tilaa juoman}$$

a)



b) Yhteenlaskusäännön nojalla:

$$P(A \text{ tai } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ ja } B)$$

$$P(A \text{ ja } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ tai } B)$$

$$P(A \text{ ja } B) = 0{,}50 + 0{,}75 - 0{,}85 = 0{,}40 = 40\ \%.$$

Permutaatiot ja kombinaatiot

Esimerkki
Ryhmässä on 24 opiskelijaa. Kuinka monella eri tavalla
a) ryhmä voi asettua jonoon
b) ryhmästä voidaan valita 2 opiskelijaa penkkarityöryhmään
c) ryhmästä voidaan valita puheenjohtaja ja sihteeri?

Ratkaisu:

a) Jonoja on $24! = 6{,}20... \cdot 10^{23} \approx 6{,}2 \cdot 10^{23}.$

b) Osajoukossa järjestyksellä ei ole väliä, joten tapoja on

$$\binom{24}{2} = 276.$$

c) Järjestyksellä on väliä, joten tapojen määrä saadaan 2-permutaatiolla:

$$\frac{24!}{(24-2)!} = 24 \cdot 23 = 552.$$

Kombinatoriikkaa ja todennäköisyyksiä

Esimerkki 1: Lotossa arvotaan seitsemän numeroa 40:stä. Millä todennäköisyydellä lotossa saa viisi oikein, kun mahdolliset lisänumerot jätetään huomiotta?

Ratkaisu: Koska numeroita valitaan seitsemän 40:stä, niin erilaisia lottorivejä on $\binom{40}{7}$.

Jos lottorivissä on viisi numeroa oikein, niin kaksi on väärin. Valitaan seitsemästä oikeasta viisi, ja 33 väärästä kaksi. Tällaisia rivejä on $\binom{7}{5} \cdot \binom{33}{2}$.

Todennäköisyys on $\dfrac{\binom{7}{5} \cdot \binom{33}{2}}{\binom{40}{7}} = 0{,}000594... \approx 0{,}059\ \%.$

Esimerkki 2: Monivalintatestissä on 10 kysymystä, joissa on kussakin 4 vastausvaihtoehtoehtoa. Opiskelija arvaa kaikki vastauksensa. Millä todennäköisyydellä hän saa ainakin yhden vastauksen oikein?

Ratkaisu: Tapahtuman "ainakin yksi oikein" vastatapahtuma on "ei yhtään oikein."

Todennäköisyys, että yksittäinen vastaus on väärin, on $\dfrac{3}{4}$. Vastaukset ovat oikein tai väärin toisistaan riippumatta, joten kaikki 10 ovat väärin todennäköisyydellä

$$P\,(\text{ei yhtään oikein}) = \left(\frac{3}{4}\right)^{10}.$$ Siispä

$$P\,(a\text{inakin yksi oikein}) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10} = 0{,}943... \approx 94\ \%.$$

Lisäesimerkki seuraavalle kerralla pohdittavaksi: Luokassa on 30 opiskelijaa. Oletetaan, että kukaan heistä ei ole syntynyt karkausvuonna. Millä todennäköisyydellä ainakin kahdella heistä on sama syntymäpäivä?

Ratkaisu: Lasketaan, millä todennäköisyydellä kaikilla on eri syntymäpäivät:

$$P\,(\text{kaikilla eri syntymäpäivät}) = 1 \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{365-29}{365} \approx 0{,}29$$

Näin ollen

$$P\,(\text{ainakin kahdella sama syntymäpäivä}) \approx 1 - 0{,}29 = 0{,}71 = 71\ \%.$$

Luku 3.4 Toistokoe

Esimerkki (Abitti-kokeen A-osan ohjelmistoilla): Yksittäinen ilotulite on viallinen 0,85 % todennäköisyydellä. Yritys tilaa 120 ilotulitetta. Kuinka suurella todennäköisyydellä niistä kaksi tai enemmän on viallisia? Oletetaan, että ilotulitteet ovat viallisia toisistaan riippumatta.

Ratkaisu: Tapahtuman "kaksi tai enemmän viallisia" vastatapahtuma on "0 tai 1 viallista." Tapahtumat "0 viallista" ja "1 viallinen" ovat erillisiä, joten

$$P\left(0 \text{ tai } 1 \text{ viallista}\right) = P\left(0 \text{ viallista}\right) + P\left(1 \text{ viallinen}\right)$$

$$= 0{,}9915^{120} + \binom{120}{1} \cdot 0{,}0085^{1} \cdot \left(1 - 0{,}0085\right)^{120-1} \approx 0{,}728...$$

Tällöin

$$P\left(\text{kaksi tai enemmän viallisia}\right) = 1 - 0{,}728... \approx 27{,}2\ \%.$$

Vastaus: 27,2 %

Huomautus: Jos kaikki ohjelmistot ovat käytössä, niin Geogebrasta löytyy todennäköisyyslaskuri, joka antaa tuloksen suoraan.