Petri Kuukkanen

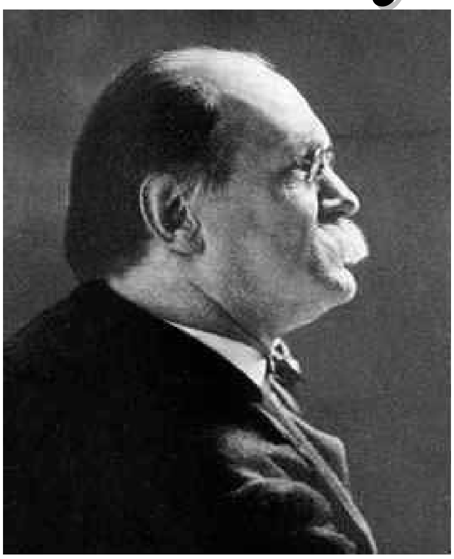
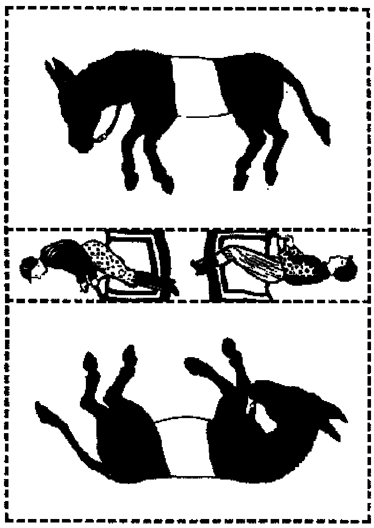
Pelejä ja ongelmia

19.4.2007

Lewis Carroll


- Charles Lutwidge Dodgson
- 1832–1898
- yhdysvaltalainen kirjailija, matemaatikko ja valokuvaaja
- suunnitellut ja sijoittanut kirjoihinsa lukuisia matemaattisia ongelmia

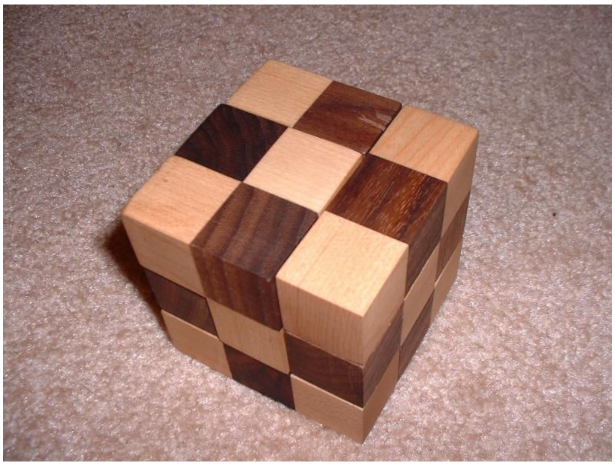
Sam Loyd

- 1841–1911
- yhdysvaltalainen matemaattisten ongelmatehtävien laatija
- suunnitellut mm. lukuisia šakkiongelmia ja tangram-kuvioita
- `http://www.mathpuzzle.com/loyd/`
  The Cyclopedia of Puzzles: Sam Loydin vuonna 1914 julkaisema 5000 ongelmatehtävän kokoelma

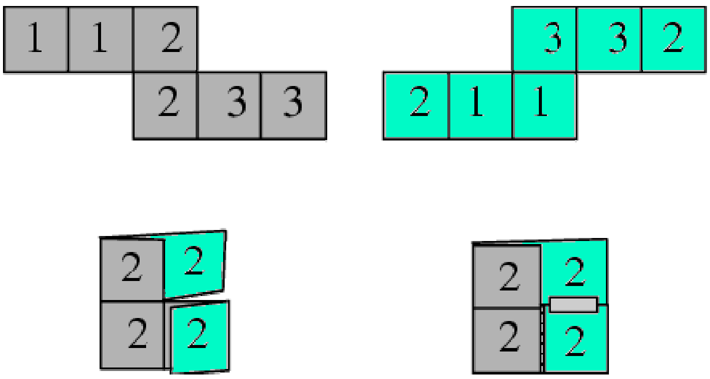
Piet Hein

- 1905–1996
- tanskalainen runoilija, kirjailija, matemaatikko, keksijä ja tiedemies
- suunnitellut mm. Soma-kuution



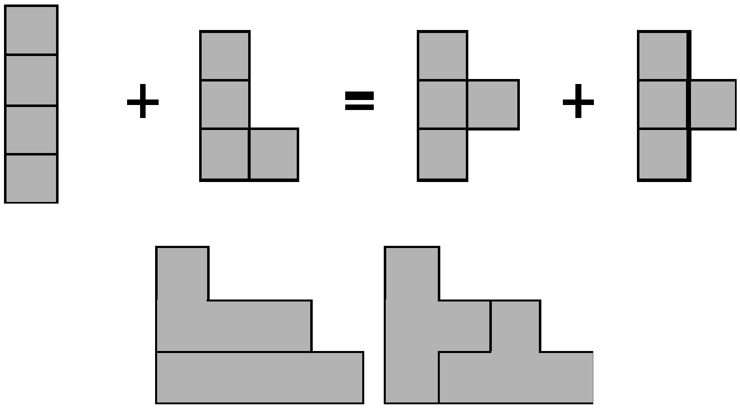
Martin Gardner

- s. 1914
- yhdysvaltalainen matemaatikko ja tiedekirjailija
- suunnitellut ja tutkinut lukemattomia matemaattisia ongelmatehtäviä, kirjoittanut paljon mm. flexagoneista
- julkaissut yli 60 kirjaa
- Scientific American -lehden Mathematical Games -kolumnin kirjoittaja vuosina 1956–1981



Erich Friedman

- s. 1965
- yhdysvaltalainen matemaatikko ja matemaattisten ongelmatehtävien laatija, tutkija ja keräilijä (kokoelmasta on kuvia alla mainitussa osoitteessa)
- http://www.stetson.edu/~efriedma/



I Taikakuvioita

Taikakuvio on symmetrinen lukumuodostelma, jossa lukujen summa, tulo tai jokin muu laskutoimitusten tulos on sama kaikilla kuvion samanmuotoisilla riveillä. Seuraavissa tehtävissä lasketaan vain luonnollisten lukujen summia, mutta yhteenlaskut on helppo korvata esimerkiksi kertolaskuilla ja luonnolliset luvut kokonaisluvuilla, murtoluvuilla tai vaikkapa polynomeilla. Osittain täytetty taikakuvio (sellainen, jossa täyttämättömiä kohtia ei tarvitse arvailla, vaan ne voi laskea) sopii hyvin harjoitus- tai koetehtäväksi.

	1	$\frac{1}{2}$
	0	$1\frac{3}{4}$

Murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskua:

Täytä viereinen taikaneliö niin, että lukujen summa jokaisella vaakasuoralla, pystysuoralla ja vinolla rivillä on 3.

Potenssilaskusääntöjä:

Sijoita oheiset potenssilausekkeet taikaneliöön niin, että lausekkeiden tulo jokaisella vaakasuoralla, pystysuoralla ja vinolla rivillä on 1.

$$\frac{x^2 \cdot x^3}{x^6} \qquad \frac{xx^2}{\left(x^2\right)^2} \qquad \left(xx\right)^2 \qquad xx^0 \qquad \left(\frac{x^3}{x^2}\right)^2$$

$\frac{x^5}{x^2}$	$\left(x^{-2}\right)^2$	
$x^{-6} \cdot x^4$		
		$\frac{x^3}{x^6}$

Mielivaltaisen suuren taikaneliön, jonka sivun pituus on pariton luku, voi rakentaa siamilaisella menetelmällä, toiselta nimeltään de la Louberen menetelmällä, seuraavasti:

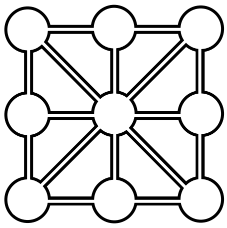
1. *Asetu neliön ylimmän rivin keskimmäiseen ruutuun ja sijoita siihen luku 1.*
2. *Siirry yksi ruutu ylöspäin ja oikealle. Jos et voi siirtyä ylemmäs, siirry alimmalle riville. Jos et voi siirtyä oikealle, siirry vasempaan reunaan.*
3. *Jos ruudussa, jossa nyt olet, on jo luku, palaa takaisin ja siirrykin askel alaspäin.*
4. *Sijoita ruutuun järjestyksessä seuraava luku.*
5. *Jatka kohdasta 2, kunnes neliö on täynnä.*

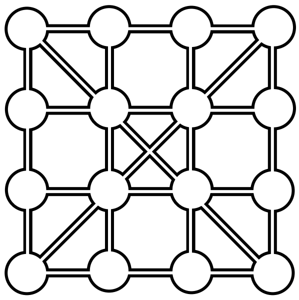
30			**1**	**10**	**19**	**28**
		7	**9**	**18**	**27**	**29**
	6	**8**	**17**	**26**		
5	**14**	**16**	**25**			
13	**15**	**24**				**4**
21	**23**	**32**			**3**	**12**
22	**31**			**2**	**11**	**20**

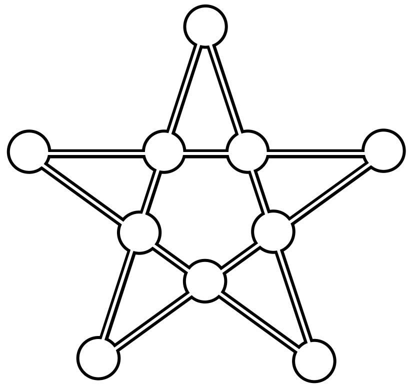
1. ***Vasemmalla***: Sijoita numerot 1–9 ympyröihin niin, että numeroiden summa on sama jokaisella vaakasuoralla, pystysuoralla ja vinolla rivillä.

Keskellä: Sijoita numerot 1–16 ympyröihin niin, että numeroiden summa on sama jokaisella vaakasuoralla, pystysuoralla ja vinolla rivillä.

Oikealla: Sijoita luvuista 1–12 kymmenen pieniin ympyröihin siten, että numeroiden summa on sama jokaisella viidellä neljän pikkuympyrän muodostamalla suoralla rivillä.



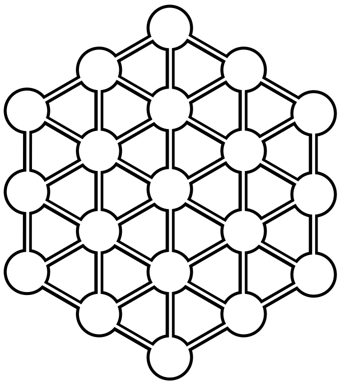


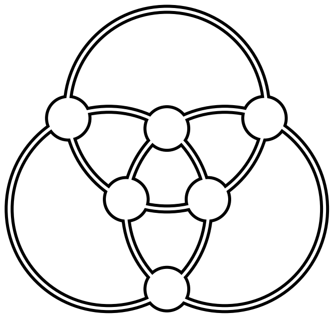


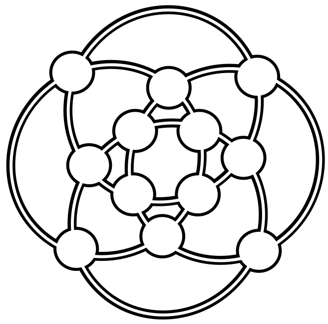
2. ***Vasemmalla***: Sijoita ympyröihin luvut 1–19 niin, että lukujen summa on sama kaikilla viidellätoista suoralla rivillä. (Rivien pituudet vaihtelevat kolmesta viiteen ympyrään.)

Keskellä: Kuvassa on kolme ympyrää, jotka leikkaavat toisiaan kuudessa pisteessä. Sijoita numerot 1–6 leikkauspisteisiin niin, että numeroiden summa on sama jokaisen ympyrän kehällä.

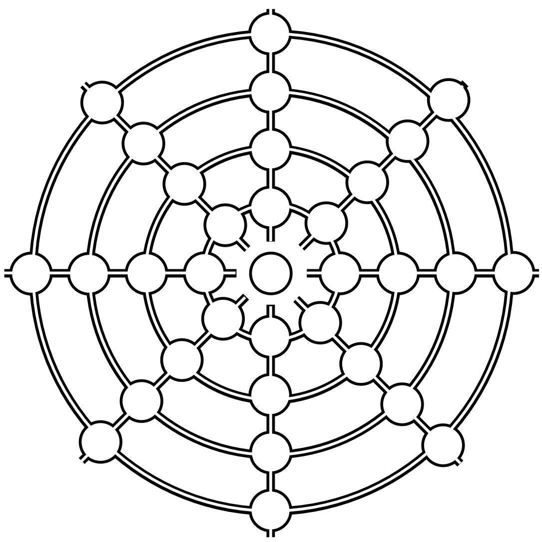
Oikealla: Kuvassa on neljä ympyrää, jotka leikkaavat toisiaan kahdessatoista pisteessä. Sijoita luvut 1–12 leikkauspisteisiin niin, että lukujen summa on sama jokaisen ympyrän kehällä.

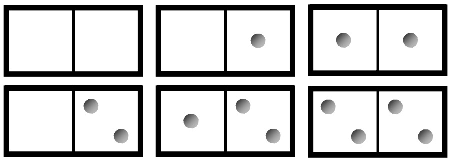






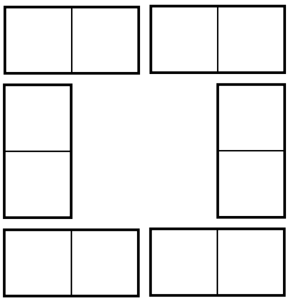
3. Kuvassa on neljä sisäkkäistä ympyrää. Jokaisen ympyrän kehällä on kahdeksan pistettä. Sijoita luvut 1–33 pisteisiin niin, että numeroiden summa on sama jokaisen suuren ympyrän kehällä ja puolet tästä summasta jokaisella neljän pienen ympyrän muodostamalla säteellä, kun keskimmäistä ympyrää ei lasketa mukaan.

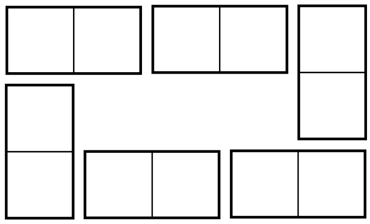


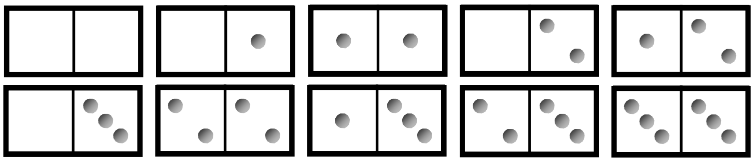


4. ***Vasemmalla***: Sijoita yllä olevat kuusi dominonappulaa alla olevaan neliöön niin, että neliön jokaisella sivulla on yhtä monta pistettä.

Oikealla: Sijoita yllä olevat kuusi dominonappulaa alla olevaan suorakulmioon niin, että suorakulmion jokaisella sivulla on yhtä monta pistettä.

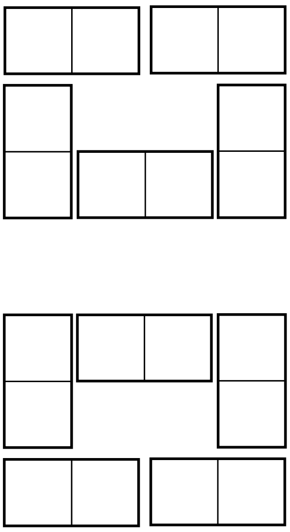


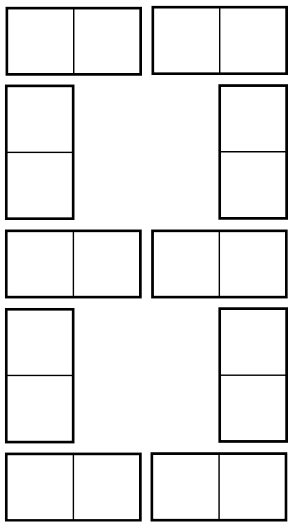




5. ***Vasemmalla***: Sijoita yllä olevat 10 dominonappulaa alla oleviin kahteen suorakulmioon niin, että kaikilla kahdeksalla sivulla (kummassakin suorakulmiossa on neljä sivua) on sama määrä pisteitä.

Oikealla: Sijoita yllä olevat 10 dominonappulaa alla olevaan kuvioon niin, että kaikilla viidellä suoralla (kaksi pystysuoraa, kolme vaakasuoraa) on sama määrä pisteitä.





6. Järjestä 27 kuusisivuista noppaa kuutioksi niin, että näkyvissä olevien silmälukujen summa on sama kaikilla suorilla kuution ympäri kulkevilla kahdentoista silmäluvun poluilla.

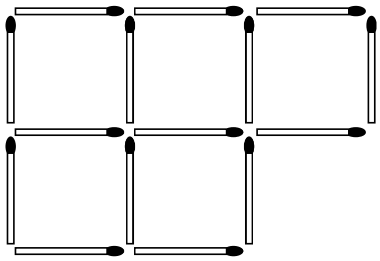
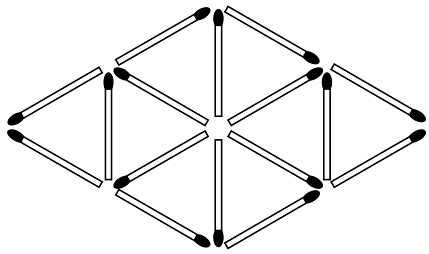
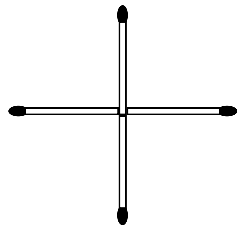
II Tulitikkutehtäviä

Internetistä ja kirjoista löytyy valtavasti valmiita tulitikkutehtäviä. Seuraavassa on joukko kirjoista poimittua ja pari itse keksittyä matematiikkaan liittyvää tehtävää.

7. *Vasemmalla*: Poista kolme tikkua niin, että jäljelle jää kolme neliötä.

Keskellä: Poista neljä tikkua niin, että jäljelle jää neljä samankokoista kolmiota.

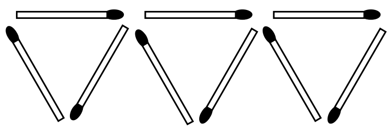
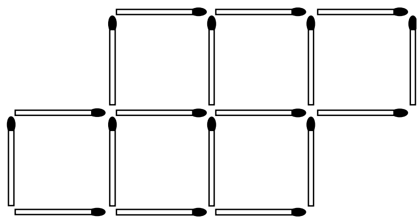
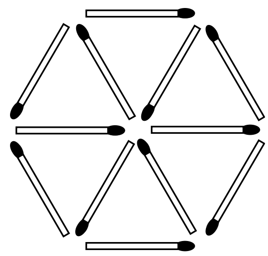
Oikealla: Muodosta neliö siirtämällä yhtä tikkua.

8. *Vasemmalla*: Siirrä kolmea tikkua niin, että jäljelle jää viisi kolmiota.

Keskellä: Poista kaksi tikkua niin, että jäljelle jää neljä neliötä.

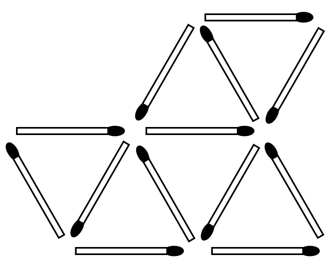
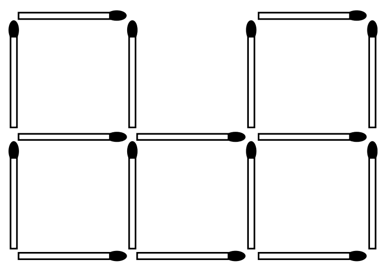
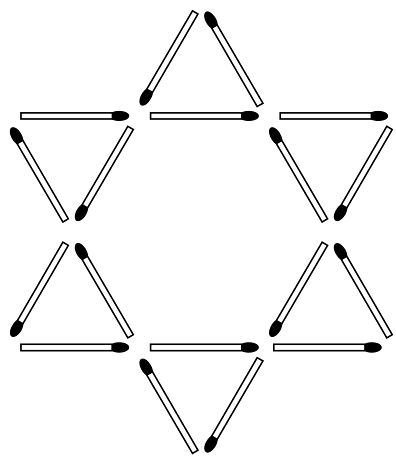
Oikealla: 12 tulitikkua muodostavat kuusi tasasivuista kolmiota. Siirrä neljää tikkua niin, että tulitikut muodostavat kolme tasasivuista kolmiota.

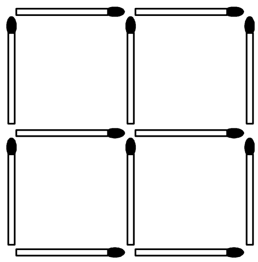
9. *Vasemmalla*: Poista kolme tikkua niin, että jäljelle jää kolme kolmiota.

Keskellä: Siirrä kolmea tikkua niin, että tulitikut muodostavat neljä samankokoista neliötä.

Oikealla: Kuvassa on kahdeksan kolmiota (kuusi pientä ja kaksi isoa). Siirrä kahta tikkua niin, että jäljelle jää kuusi kolmiota.

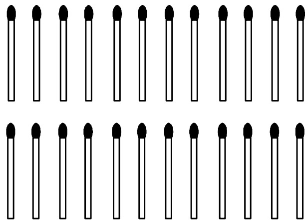
10. 12 tulitikkua muodostavat viisi neliötä (neljä pientä ja yhden ison).



a) Poista kaksi tikkua niin, että jäljelle jää 2 neliötä.
b) Poista kaksi tikkua niin, että jäljelle jää 3 neliötä.
c) Poista yksi tikku niin, että jäljelle jää 3 neliötä.
d) Siirrä kolmea tikkua niin, että tulitikut muodostavat kolme neliötä.
e) Siirrä neljää tikkua niin, että tulitikut muodostavat kolme erikokoista neliötä.
f) Siirrä kahta tikkua niin, että tulitikut muodostavat kuusi neliötä.
g) Siirrä kahta tikkua niin, että tulitikut muodostavat seitsemän neliötä.
h) Siirrä neljää tikkua niin, että tulitikut muodostavat kymmenen neliötä.

11. Kuvassa on 24 tulitikkua. Niistä on helppo muodostaa neliö (sivun pituus kuusi tikkua), kaksi neliötä (sivun pituus kolme tikkua) ja kolme neliötä (sivun pituus kaksi tikkua).

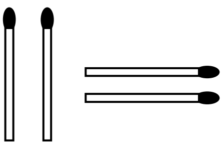
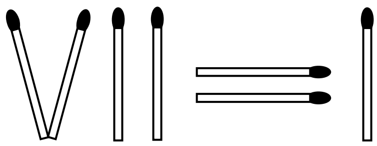
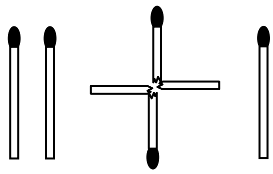
a) Muodosta niistä ensin neljä neliötä, sitten viisi, kuusi, seitsemän, kahdeksan, yhdeksän, kymmenen, yksitoista, kaksitoista, kolmetoista, neljätoista ja lopulta viisitoista neliötä.
b) Muodosta niistä kaksikymmentä neliötä.
c) Muodosta niistä kaksikymmentäyksi neliötä.
d) Muodosta niistä neljäkymmentäkaksi neliötä.
e) Muodosta niistä satakymmenen neliötä.
f) Muodosta niistä tosi monta neliötä (niin monta kuin pystyt).



12. ***Vasemmalla***: Siirrä yhtä tikkua niin, että muodostuu tosi yhtälö.

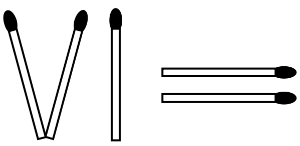
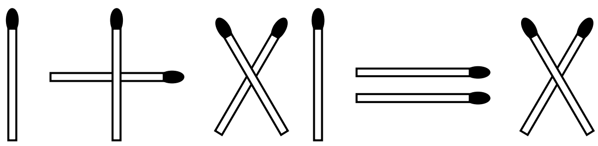
Keskellä: Siirrä yhtä tikkua niin, että muodostuu tosi yhtälö.

Oikealla: Muodosta viidestä tulitikusta lauseke, jonka arvo on neljä. Katkenneita tikkuja ei saa suoristaa.

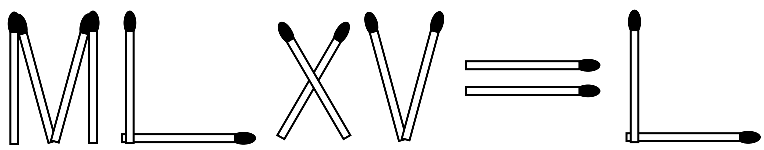




13. ***Vasemmalla***: Siirrä yhtä tikkua niin, että muodostuu tosi yhtälö.

Oikealla: Muuta yhtälö todeksi koskematta yhteenkään tulitikkuun.

14. Siirrä kolmea tikkua niin, että muodostuu tosi yhtälö.

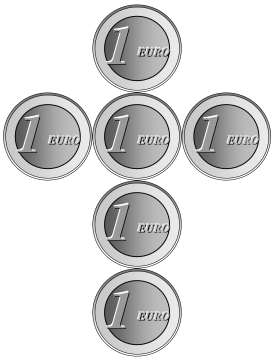


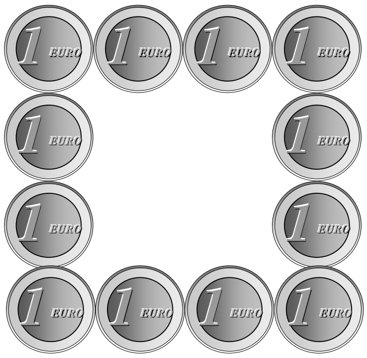
III Kolikkotehtäviä

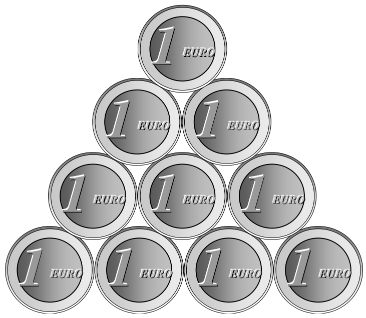
15. *Vasemmalla*: Kuvassa on kaksi kolikoiden muodostamaa riviä – toisessa rivissä on kolme, toisessa neljä kolikkoa. Siirrä yhtä kolikkoa niin, että muodostuu kaksi kolikkoriviä, joissa kummassakin on neljä kolikkoa.

Keskellä: Kuvassa on kahdentoista kolikon muodostama neliö, jonka joka sivulla on neljä kolikkoa. Tee kolikosta neliö, jonka jokaisella sivulla on viisi kolikkoa.

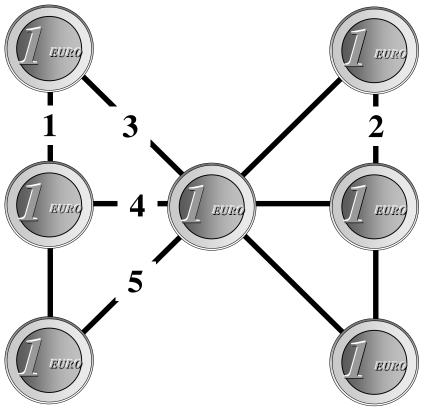
Oikealla: Kuvan kymmenen kolikkoa muodostavat kolmion. Siirrä kolmea kolikkoa niin, että kolmio kääntyy ylösalaisin.





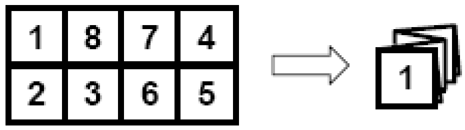


16. Kuvan seitsemän kolikkoa muodostavat viisi kolmen kolikon riviä. Lisää kuvioon kaksi kolikkoa niin, että uudessa kuviossa on kymmenen kolmen kolikon riviä.



IV Taittelutehtäviä

17. Leikkaa ruudukot irti ja taittele ne yhden ruudun kokoisiksi nipuiksi niin, että ykkösellä merkitty ruutu on päällimmäisenä ja muut ruudut sen alla numerojärjestyksessä. Numeroiden ei tarvitse jäädä oikein päin.



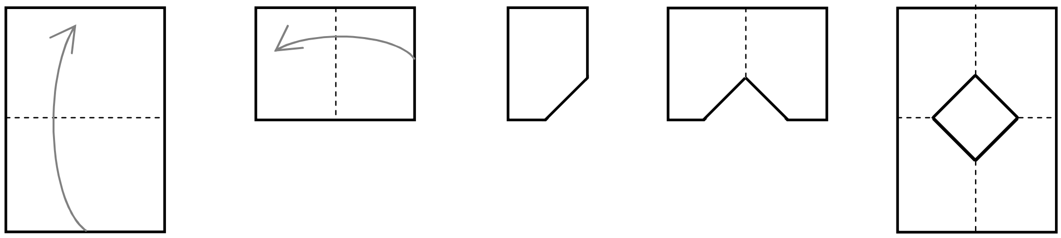
1	8	7	4
2	3	6	5

1	8	2	7
4	5	3	6

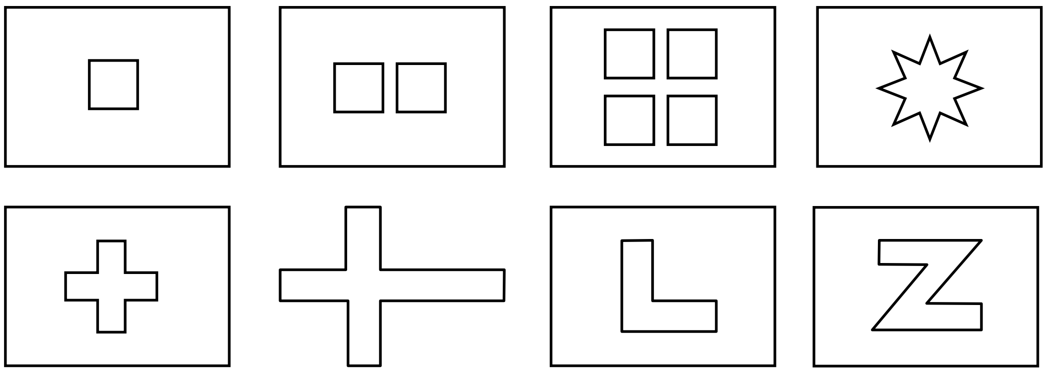
Hauska kaikenikäisille sopiva geometriaan ja symmetriaan liittyvä tehtävä, jonka haittapuolina ovat suuri paperin kulutus ja syntyvä paperisilppu, on seuraavanlainen:

Taittele paperiarkki siten, että saat yhdellä suoralla leikkauksella tehdyksi arkkiin annetun muotoisen reiän.

Esimerkki: Ota A4-kokoinen arkki. Taita arkin alempi puolisko ylemmän päälle, sitten oikea puolisko vasemman puoliskon päälle. Leikkaa taitelman oikeasta alakulmasta pois tasakylkisen kolmion muotoinen pala ja avaa arkki. Arkin keskellä on vinoneliön muotoinen reikä.

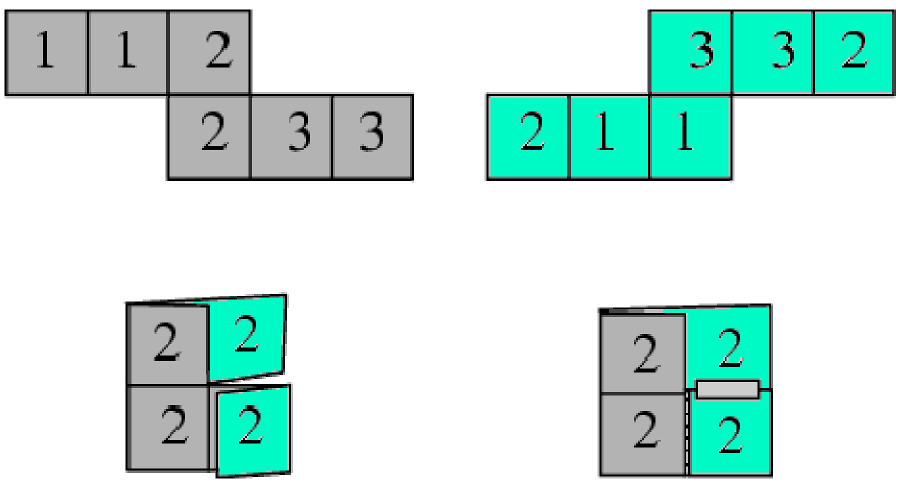


18. Miten arkki pitää taitella, jotta yhdellä suoralla leikkauksella saadaan seuraavat reiät?



Flexagon on paperista taiteltu ja liimailtu monikulmio, josta voi taittaa näkyviin useita eri pintoja. Esimerkiksi hexa-hexa-flexagon rakennetaan paperiliuskasta, jonka kummallakin puolella on 18 tasasivuista kolmiota. Kun liuska taitellaan spiraaliksi, ja liuskan päät liimataan yhteen, syntyy kuusikulmio, josta voi taittaa näkyviin kuusi erillistä pintaa – esimerkiksi kuusi erilaista kuvaa.

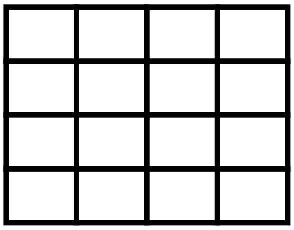
19. Etsi tietoa flexagoneista ja askartele sellainen. (Kannattaa käyttää tarpeeksi suurta paperiarkkia, taitteleminen on muuten vaikeaa.)

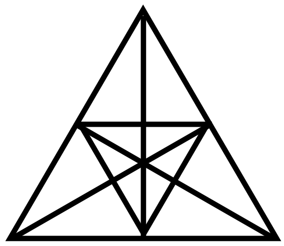


V Geometriaa

20. ***Vasemmalla***: Kuinka monta suorakulmiota kuvassa on?

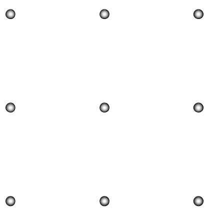
Oikealla: Kuinka monta kolmiota kuvassa on?

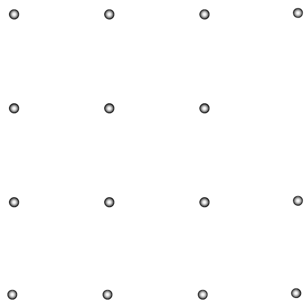




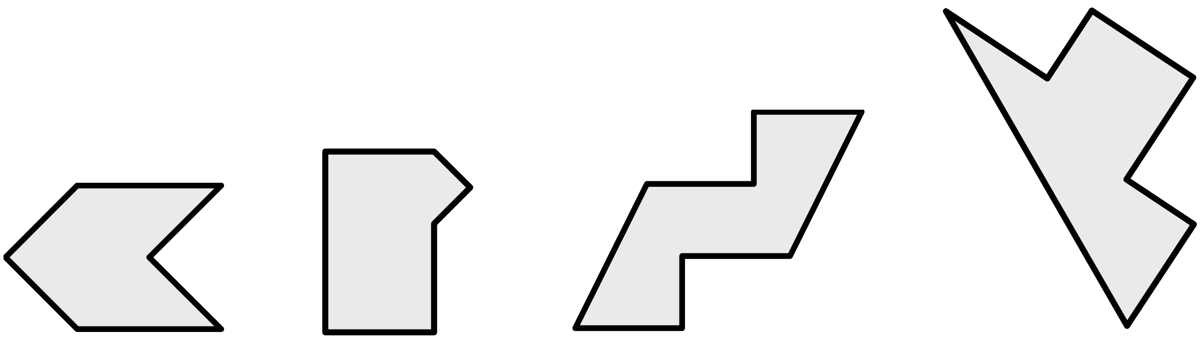
21. ***Vasemmalla***: Yhdistä yllä olevat yhdeksän pistettä neljällä suoralla viivalla nostamatta kynää välillä paperilta niin, että käyt kussakin pisteessä vain kerran.

Oikealla: Yhdistä yllä olevat viisitoista pistettä kuudella suoralla viivalla nostamatta kynää välillä paperilta niin, että käyt kussakin pisteessä vain kerran.





22. Jaa kuvio yhdellä suoralla leikkauksella kahteen osaan ja muodosta osista neliö.



23. Jaa tasasivuinen kolmio kolmeksi yhdenmuotoiseksi kuvioksi niin, että

a) kaikki kuviot ovat samankokoisia
b) kaikki kuviot ovat erikokoisia
c) kaksi kuvioista on samankokoisia, kolmas erikokoinen.

24.
a) Jaa neliö yhdeksäksi suorakulmioksi, joiden pidempi sivu on kaksi kertaa lyhyemmän pituinen.
b) Jaa suorakulmio, jonka sivujen pituudet ovat 32 ja 33, yhdeksäksi erikokoiseksi neliöksi.
c) Jaa suorakulmio, jonka sivujen pituudet ovat 65 ja 47, kymmeneksi erikokoiseksi neliöksi.
d) Jaa neliö, jonka sivun pituus on 112, kahdeksikymmeneksiyhdeksi erikokoiseksi neliöksi.
e) Jaa neliö, jonka sivun pituus on 175, kahdeksikymmeneksineljäksi erikokoiseksi neliöksi.

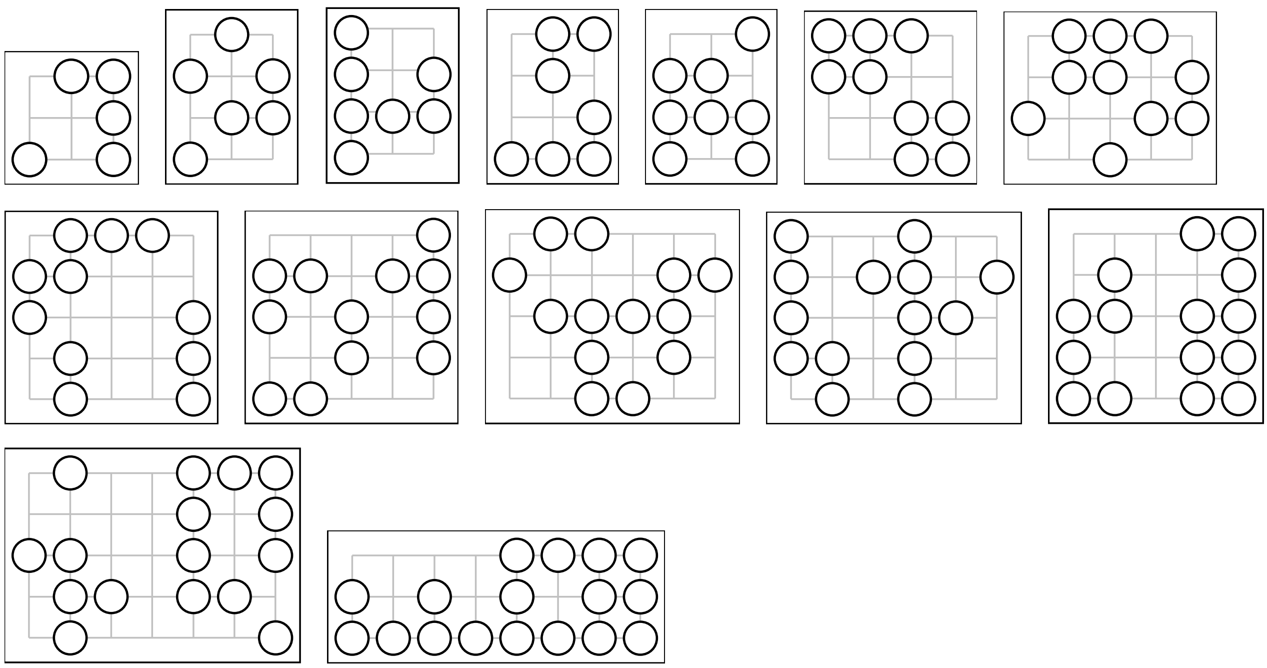
25. *Haberdasherin ongelma*: Jaa tasasivuinen kolmio kolmella leikkauksella neljään osaan ja kokoa osista neliö.

26. Jaa neliö, jonka sivun pituus on 1,

a) viideksi kolmioksi, joista jokaisen pinta-ala on alle 0,21.
b) viideksi kolmioksi, joiden pinta-alat muodostavat geometrisen sarjan.
c) viideksi tasakylkiseksi kolmioksi, jotka ovat kaikki erimuotoisia.
d) seitsemäksi tasakylkiseksi suorakulmaiseksi kolmioksi, jotka ovat kaikki erikokoisia.
e) kahdeksaksi suorakulmaiseksi kolmioksi, joiden kateettien pituuksien suhde on 1:2, ja jotka ovat kaikki erikokoisia.
f) kahdeksaksi teräväkulmaiseksi kolmioksi.
g) kahdeksaksi kolmioksi, joista yhdessäkään ei ole sivua, jonka pituus on yli 5/8.

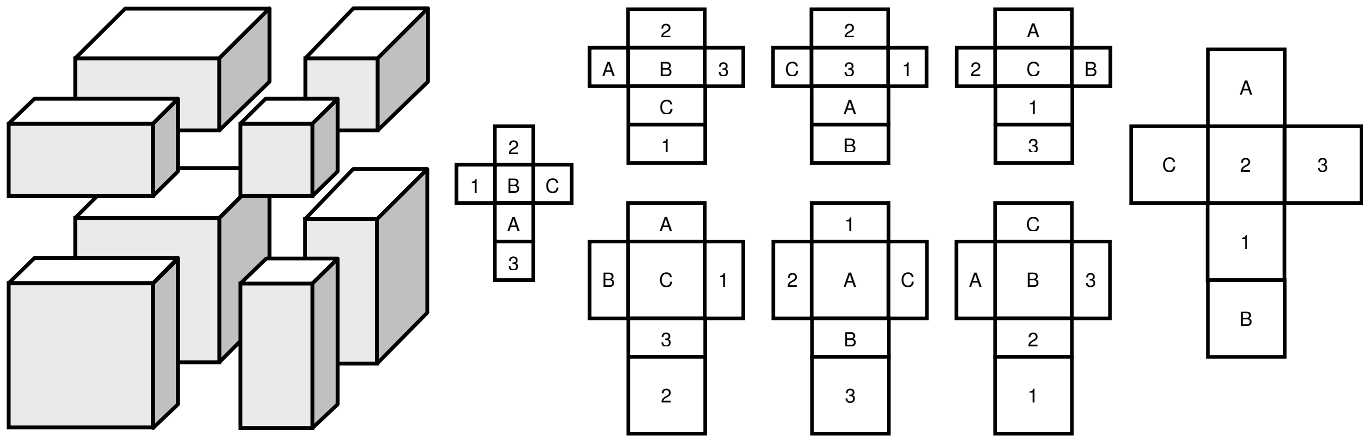
27. Asettele seitsemän tasasivuista kolmiota, joiden sivujen pituus on 1/2, neliöön, jonka sivun pituus on 1.

28. Numeroi ympyrät niin, että niiden välinen etäisyys kasvaa: kahden peräkkäisen ympyrän välisen etäisyyden on aina oltava kahden edellisen ympyrän välimatkaa suurempi. *(Erich Friedman, 2000)*



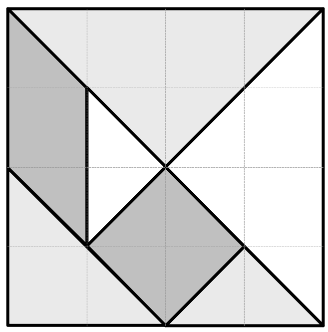
VI Palapelejä

Binomikuutio: Alla on kahdeksan suorakulmaista särmiötä, joista voi koota kuution. Kun särmiöiden lyhyitä sivuja merkitään *a*:lla ja pitkiä *b*:llä, särmiöiden tilavuudet ovat a^3 (pieni kuutio), a^2b (kolme pitkulaista särmiötä), ab^2 (kolme kuution puolikasta) ja b^3 (suurempi kuutio). Särmiöistä kootun kuution sivun pituus on $a + b$. Niinpä paloilla voidaan näyttää, että $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

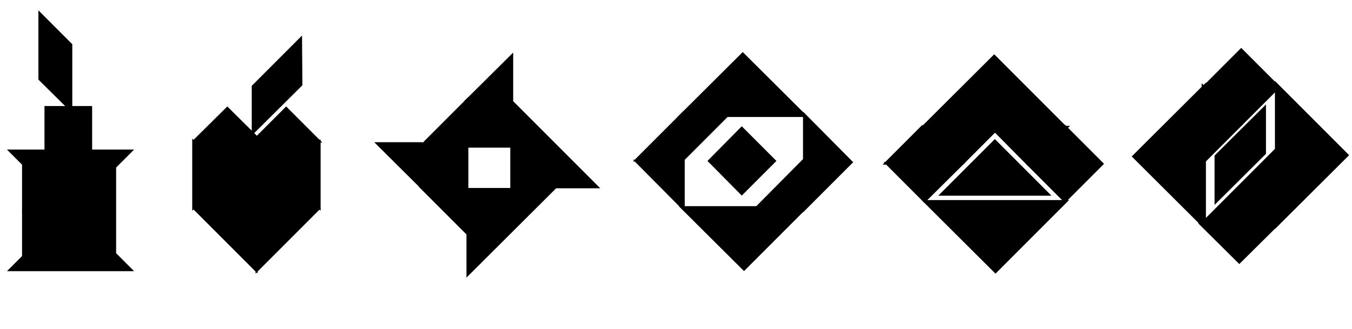


Kun palojen mitat valitaan niin, että $b = 2a$, ja niiden tahkot maalataan yllä olevien kaavioiden mukaisesti (A, B, C, 1, 2 ja 3 ovat kuusi selvästi toisistaan poikkeavaa värisävyä), syntyy mielenkiintoinen palapeli. Tehtävänä on koota paloista kuutio, jonka kaikki tahkot ovat yksivärisiä ja vastakkaiset tahkot keskenään samanvärisiä. Tehtävällä on vain kaksi ratkaisua. Toisessa näkyviin jäävät värit A, B ja C, toisessa värit 1, 2 ja 3.

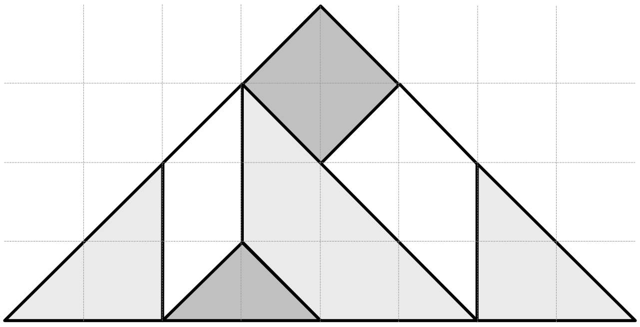
Tunnetuimpia matemaattisia palapelejä lienee **Tangram**, noin 200 vuotta vanha kiinalainen päättelytehtävä, jossa seitsemästä yksinkertaisesta palasesta koetetaan muodostaa annettuja kuvioita. Tangram-tehtäviä on laadittu tuhansia ja niitä löytyy vähäisellä vaivalla kirjoista ja Internetistä.



29. Muodosta yllä kuvatuista seitsemästä tangram-palasta alla olevat kuviot.

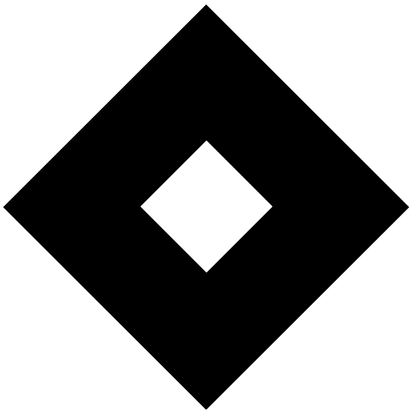


Shonagon-palat (*Sei Shonagon, 1742*) – japanilainen tangram.

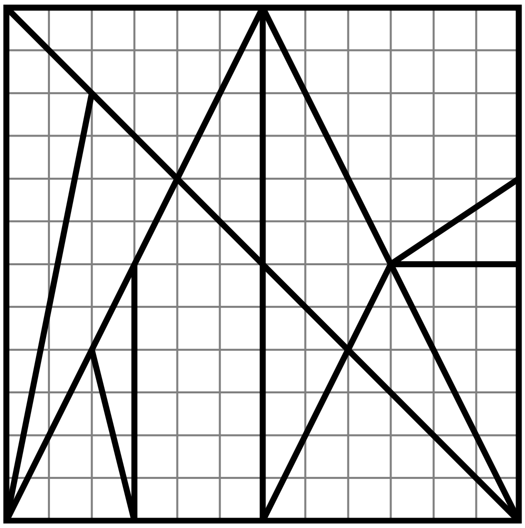


30. Muodosta yllä kuvatuista Shonagon-paloista neliö kahdella eri tavalla.

31. Muodosta Shonagon-paloista alla oleva kuvio.

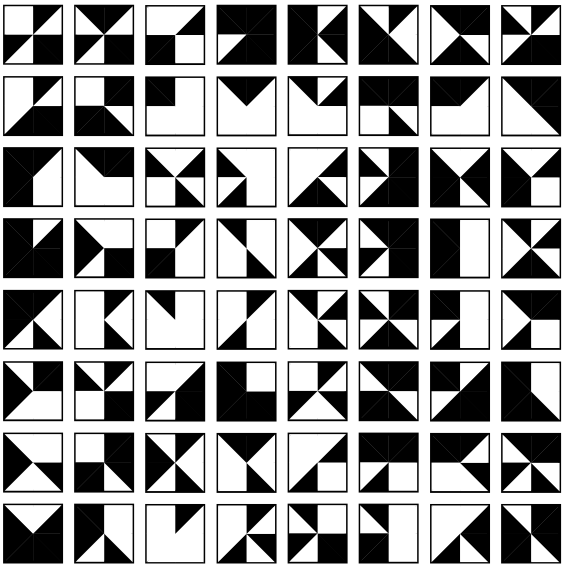


Arkimedeen neliö (toisilta nimiltään Stomachion, Ostomachion tai Syntemachion) on vanhin kirjassa julkaistu matemaattinen palapeli. Neliö, jonka sivun pituus on 12 yksikköä, on jaettu neljäksitoista monikulmioksi, joiden pinta-alat ovat kokonaislukuja. Monikulmioista voi koota lukuisia kuvioita.



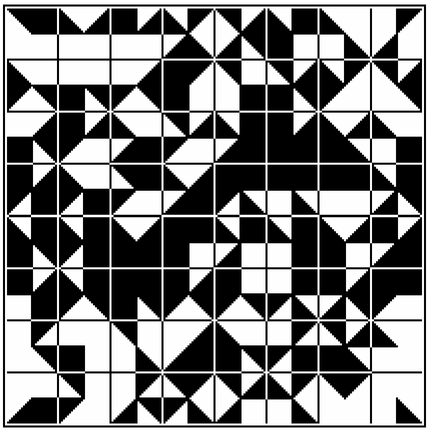
32. Askartele itsellesi Arkimedeen neliö, ja rakenna sen paloista näyttäviä kuvioita.

IZZI (*Frank Nichols, 1992*) sisältää 64 neliön muotoista palaa. Jokainen pala on jaettu samalla tavalla kahdeksaksi suorakulmaiseksi kolmioksi. Osa kolmioista on väritetty mustiksi, osa valkoisiksi niin, että jokainen pala on erilainen. (Erilaisia paloja olisi mahdollista tehdä 70, mutta tässä pelissä 6 väritystä on jätetty käyttämättä.) Paloista on tarkoitus rakentaa 8 × 8 palan neliö, jossa vierekkäisten palojen värit vastaavat toisiaan. Kuvassa palat on aseteltu erään ratkaisun mukaiseen järjestykseen.



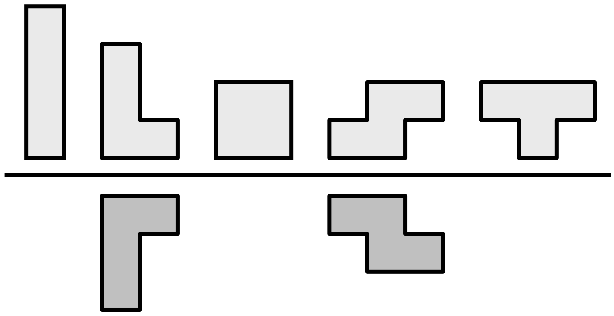
33. Rakenna Izzi-paloista 8 × 8 palan kokoinen neliö, jossa vierekkäisten palojen reunojen väritykset vastaavat toisiaan. Yllä olevassa kuvassa on eräs ratkaisu, mutta etsi niitä lisää.

34. Rakenna paloista samanlainen neliö kuin tehtävässä 1, mutta tee se niin, että paloissa näkyvät lävistäjät muodostavat kuvion. Esimerkiksi alla palojen lävistäjät muodostavat vinoneliön.



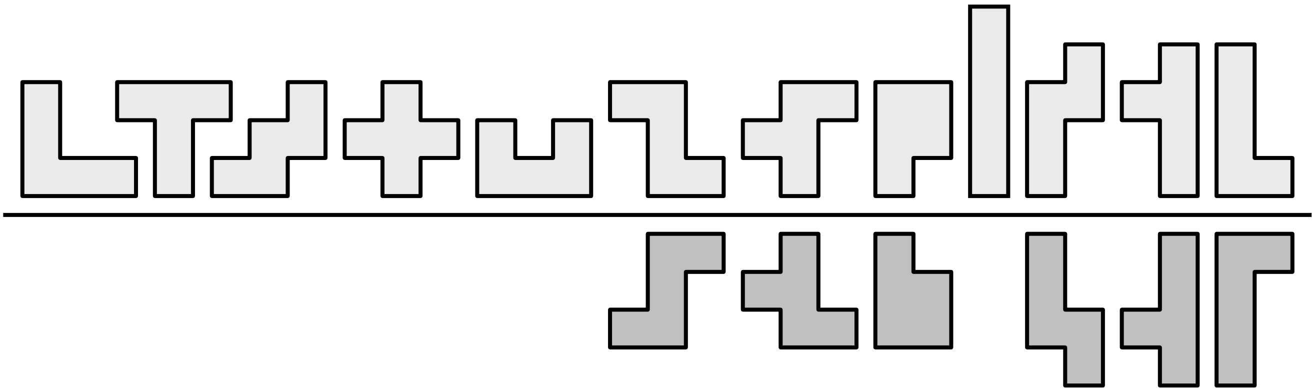
Sana *polyomino* viittaa paloihin, jotka koostuvat neliöistä. Jokaisen palasarjan joka palassa on yhtä monta neliötä ja palasarjan nimi riippuu neliöiden lukumäärästä.

Tetromino-paloissa on neljä neliötä. Paloja on kaikkiaan viisi (tai seitsemän, jos niitä ei saa kääntää ympäri). Palojen useimmin käytetyt nimet ovat kuvan mukaisesssa järjestyksessä I, L, O, S ja T.

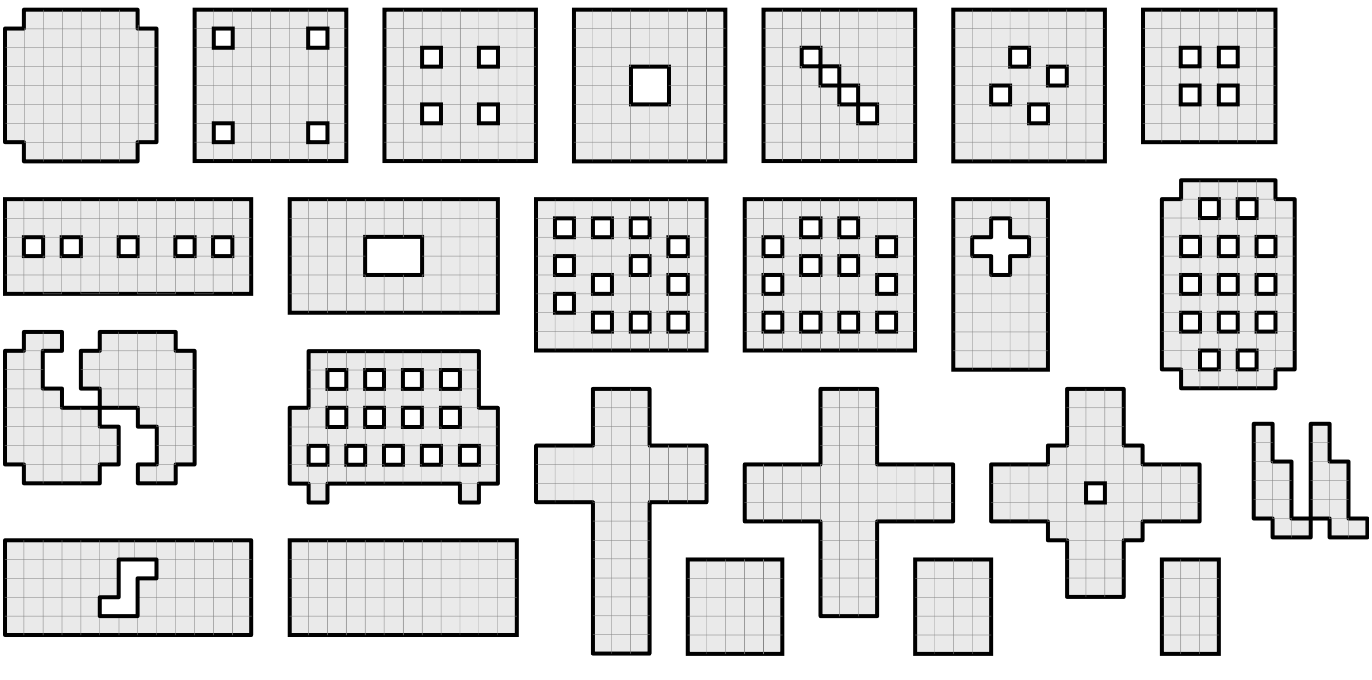


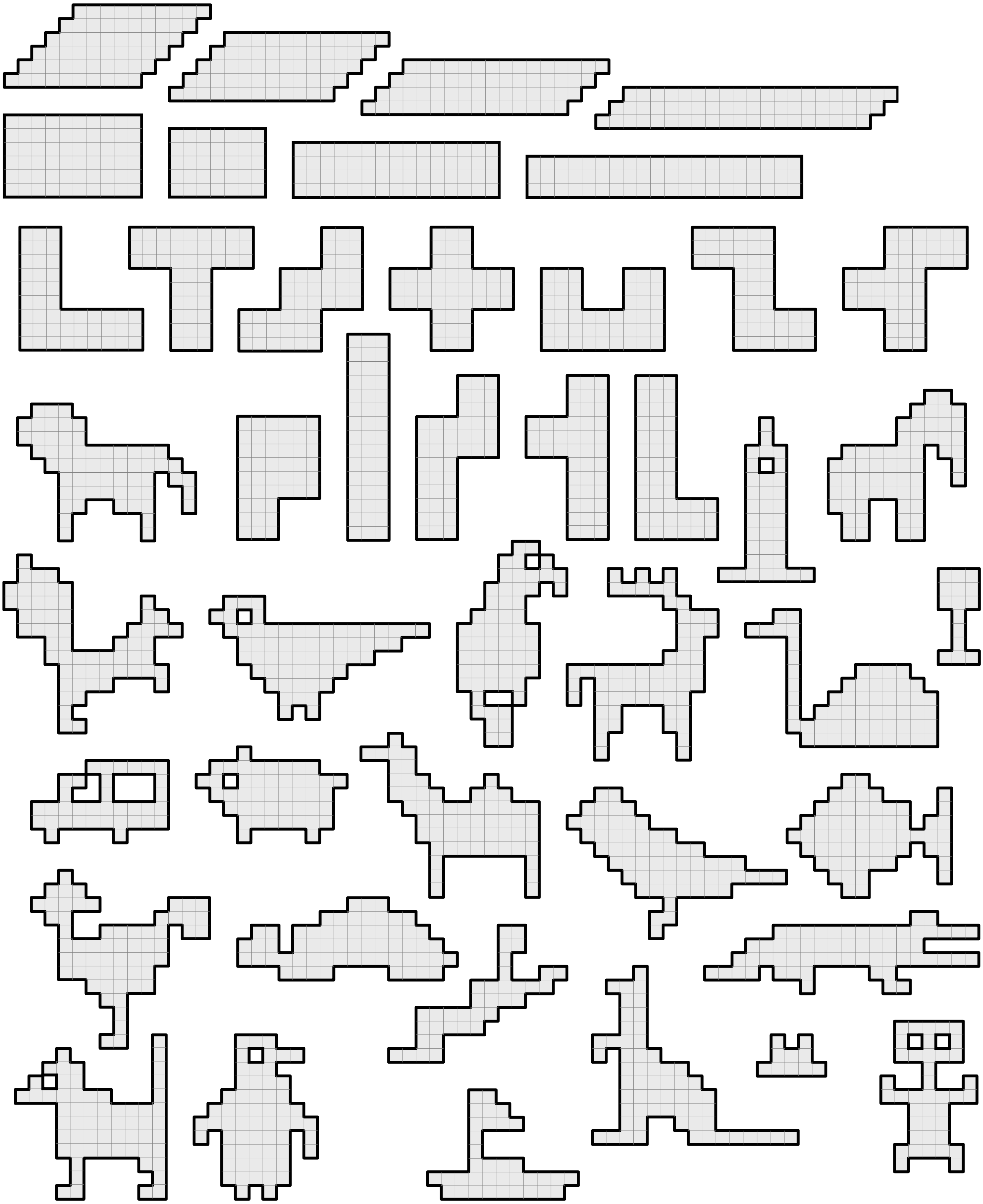
35. Etsi alue, jonka voi täyttää kaikilla viidellä tetromino-palalla. Paloja saa peilata, mutta alue on täytettävä käyttäen vain yhtä palaa, ja täyttämisen on onnistuttava kaikilla viidellä palalla. Ratkaisuissa on annettu alue, jonka pinta-ala on 32 (täyttämiseen tarvitaan 8 palaa) ja alue, jonka pinta-ala on 64 (täyttämiseen tarvitaan 16 palaa).

Pentomino-paloissa on viisi neliötä. Erilaisia paloja on 12 (tai 18, jos paloja ei saa kääntää ympäri), ja niiden nimet ovat kuvan mukaisessa järjestyksessä V, T, W, X, U, Z, F, P, I, N, Y ja L.



36. Kokoa kahdellatoista pentomino-palalla nämä kuviot. Paloja saa kääntää ympäri.

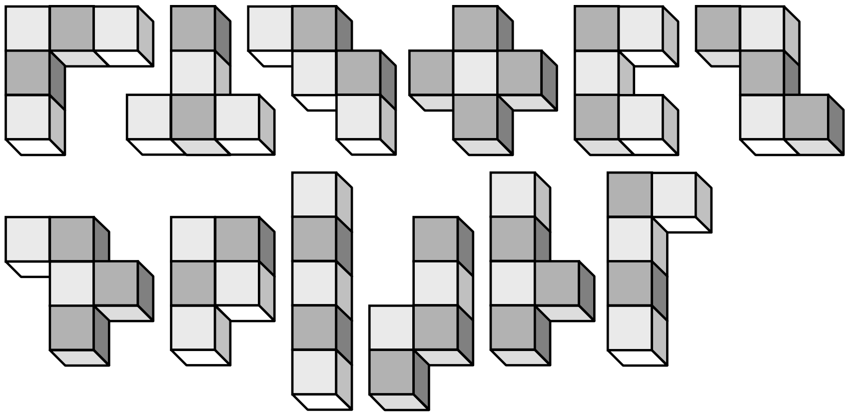




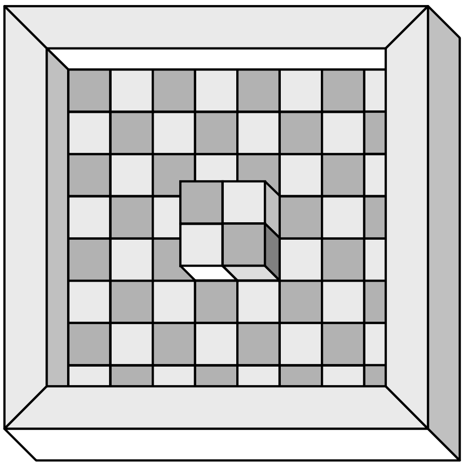
37. Jos pentomino-palat on koottu kuutioista, niistä voi rakentaa suorakulmaisia särmiöitä. Rakenna kahdellatoista kuutioista koostuvalla pentomino-palalla särmiö, jonka mitat ovat

a) 2 × 3 × 10 b) 2 × 5 × 6 c) 3 × 4 × 5

Pentomino-palapeleihin saa lisää syvyyttä tekemällä paloista ruudutettuja esimerkiksi alla olevan kuvan mukaisesti.



38. Rakenna alla oleva laatikko, ja asettele palat siihen niin, että tummat ja vaaleat kuutiot vuorottelevat.



39. Rakenna paloista suorakulmainen särmiö, jonka koko on

a) 1 × 3 × 20,

b) 1 × 4 × 15,

c) 1 × 5 × 12,

d) 1 × 6 × 10,

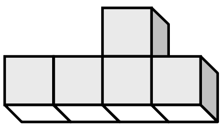
e) 2 × 3 × 10,

f) 2 × 5 × 6,

g) 3 × 4 × 5 kuutiota.

Vain yksi yllä olevista särmiöistä on mahdoton rakentaa niin, että tummat ja vaaleat kuutiot vuorottelevat (en kerro mikä).

Y-palapelissä käytetään kahtakymmentäviittä Y:n muotoista pentomino-palaa:



40. Rakenna Y-paloista suorakulmainen särmiö, jonka mitat ovat

a) 1 × 5 × 10 kuutiota (tarvitset 10 palaa),

b) 2 × 5 × 6 kuutiota (tarvitset 12 palaa),

c) 3 × 4 × 5 kuutiota (tarvitset 12 palaa),

d) 2 × 4 × 10 kuutiota (tarvitset 16 palaa),

e) 2 × 5 × 8 kuutiota (tarvitset 16 palaa),

f) 4 × 4 × 5 kuutiota (tarvitset 16 palaa),

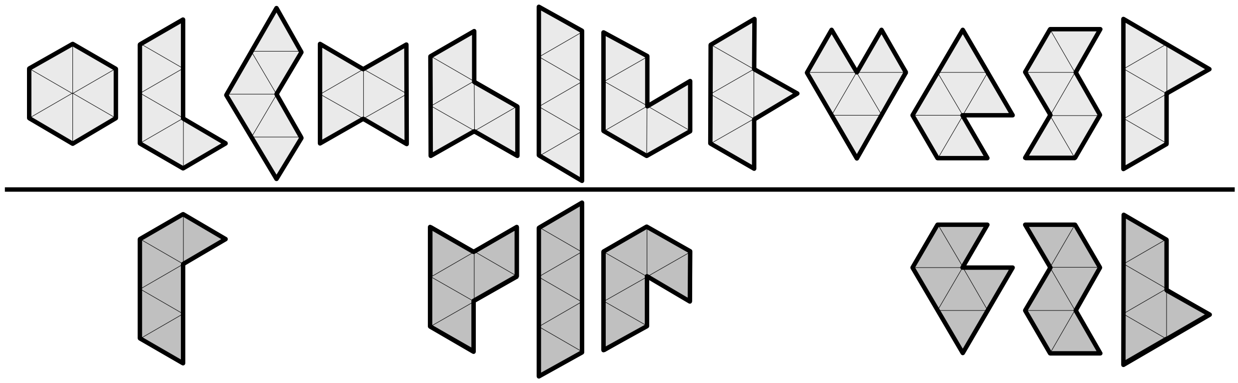
g) 4 × 5 × 5 kuutiota (tarvitset 20 palaa),

h) 2 × 5 × 11 kuutiota (tarvitset 22 palaa),

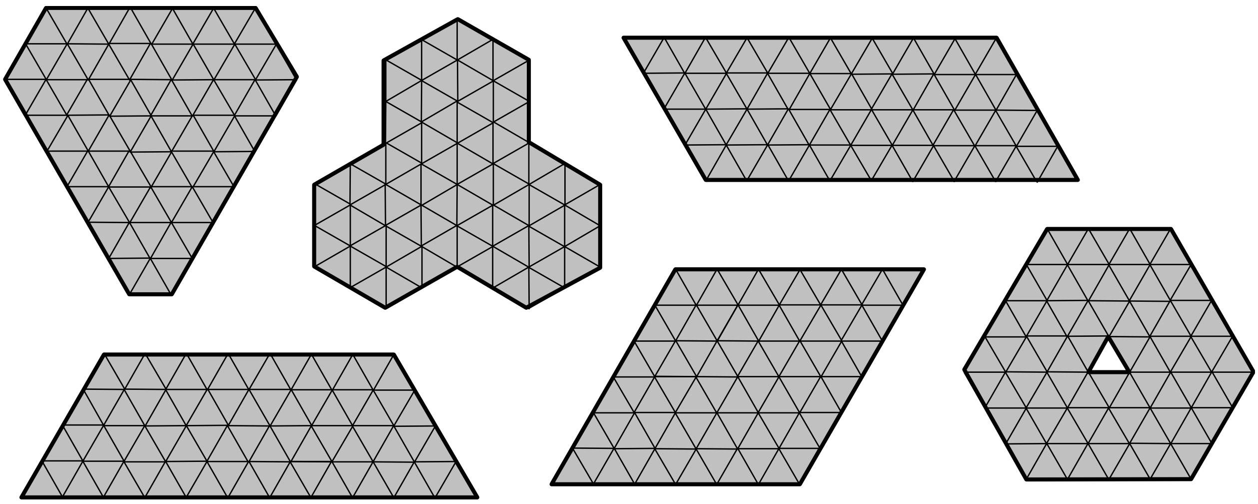
i) 2 × 4 × 15 kuutiota (tarvitset 24 palaa),

j) 5 × 5 × 5 kuutiota (tarvitset kaikki 25 palaa).

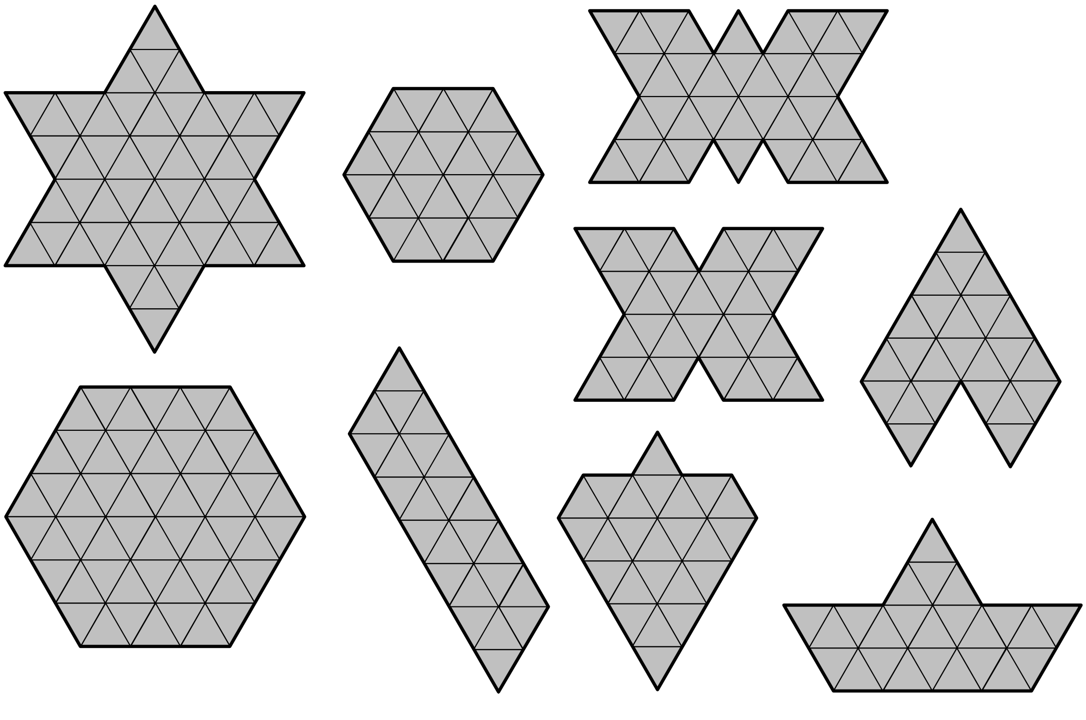
Sana *polyiamond* viittaa paloihin, jotka koostuvat tasasivuisista kolmioista. **Hexiamond**-paloissa on kuusi tasasivuista kolmiota, ja niitä on kaikkiaan kaksitoista (yhdeksäntoista, jos paloja ei saa kääntää ympäri). Palojen nimet ovat kuvan mukaisessa järjestyksessä: kuusikulmio (Hexagon), mutka (Crook), hihamerkki / lepakko (Chevron / Bat), perhonen (Butterfly), kyltti / pistooli (Signpost / Pistol), palkki / suunnikas (Bar / Rhomboid), koukku / kenkä (Hook / Shoe), kruunu (Crown), hummeri (Lobster), pursi (Yacht), käärme (Snake) ja sfinksi / nuija (Sphinx / Club).

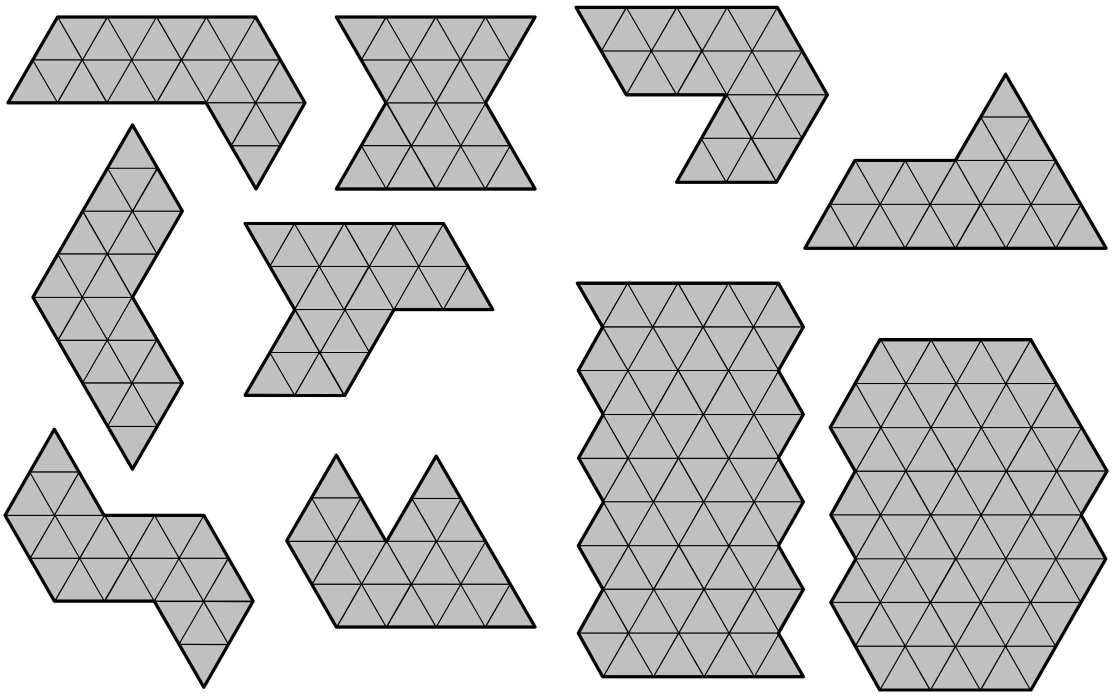


41. Kokoa kahdestatoista hexiamond-peruspalasta seuraavat kuviot. Paloja saa kääntää ympäri.

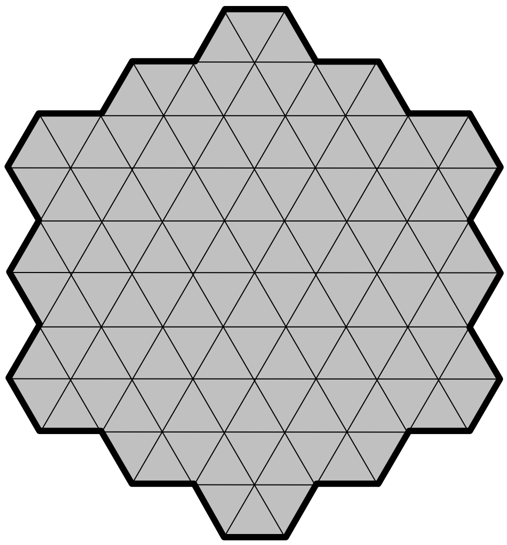


42. Kokoa seuraavat kuviot käyttäen osaa hexiamond-peruspaloista. Paloja saa kääntää ympäri.

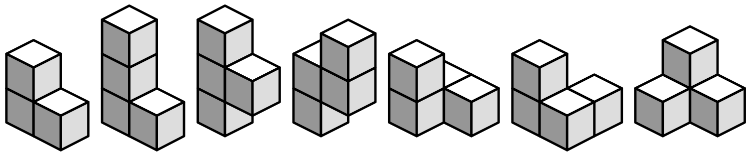




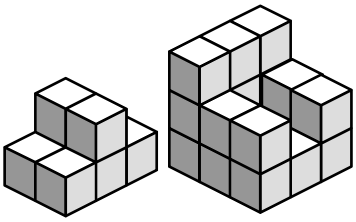
43. Kokoa seuraava kuvio käyttäen kaikkia 19 hexiamond-palaa. Paloja ei saa kääntää ympäri.



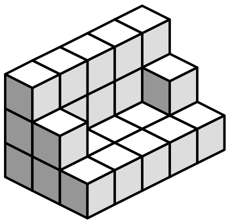
Soma-kuutio on palapeli, jonka tanskalainen matemaatikko-tiedemies-runoilija Piet Hein suunnitteli istuessaan Werner Heisenbergin pitämällä kvanttimekaniikan luennolla. (Luennoilla kannattaa istua.) Soma-paloja on seitsemän ja niistä voidaan koota muun muassa kuutio.



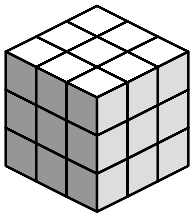
44. Muodosta soma-paloista seuraavat rakennelmat. (Verkosta löytyy tuhansia muita rakennelmia.)



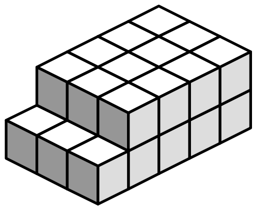
kuution osat *(vaikea)*



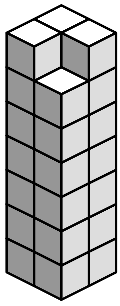
sohva



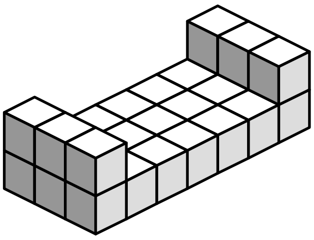
kuutio *(240 ratkaisua)*



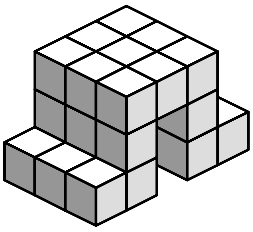
auto



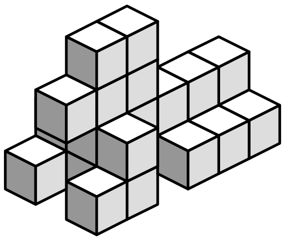
torni



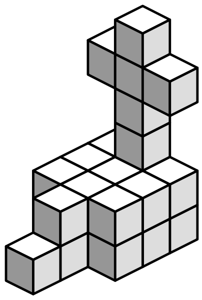
vuode



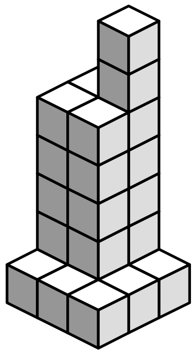
portti



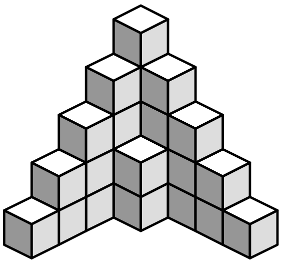
koira



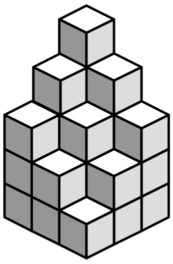
hauta



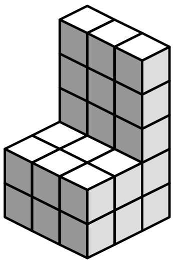
pilvenpiirtäjä 1



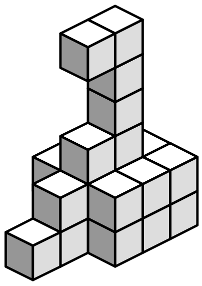
kulmakivi



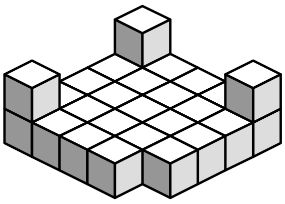
kristalli



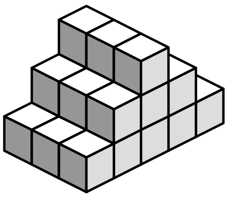
tuoli



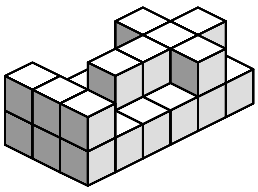
hirttolava



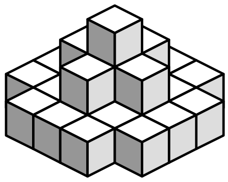
linna



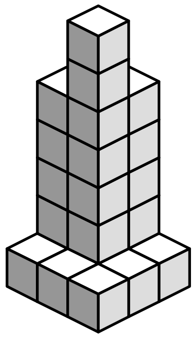
portaat



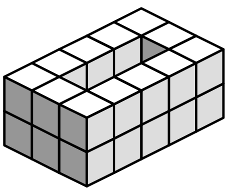
hautakivi



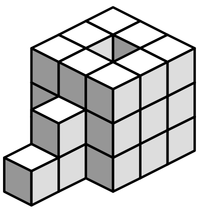
pyramidi



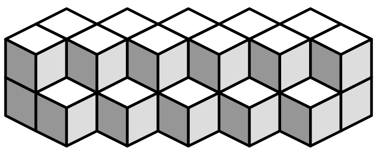
pilvenpiirtäjä 2



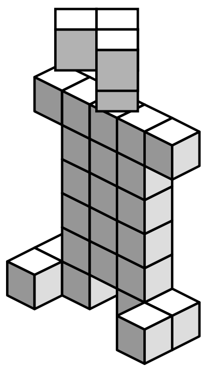
kylpyamme



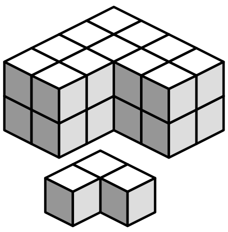
kaivo



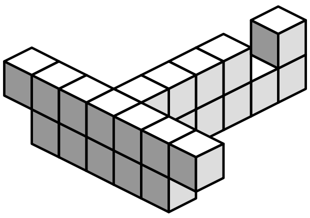
penkki



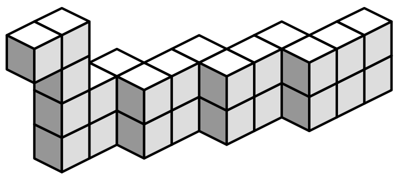
robotti



kaksinkertainen



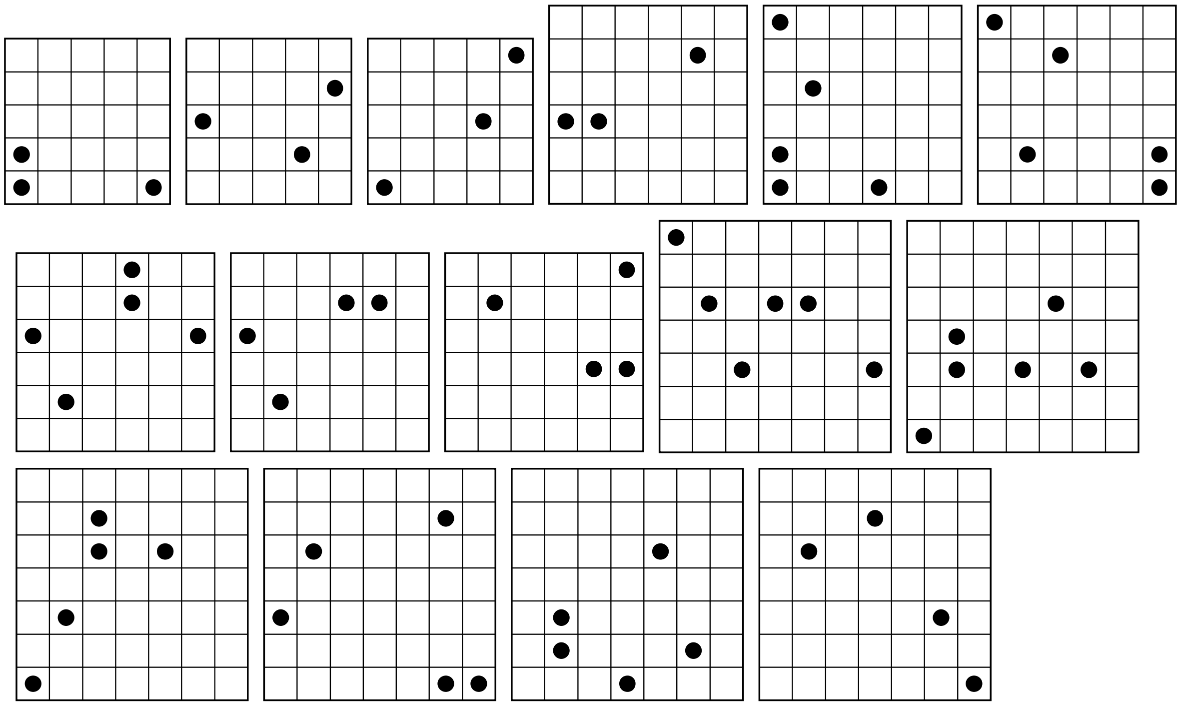
lentokone



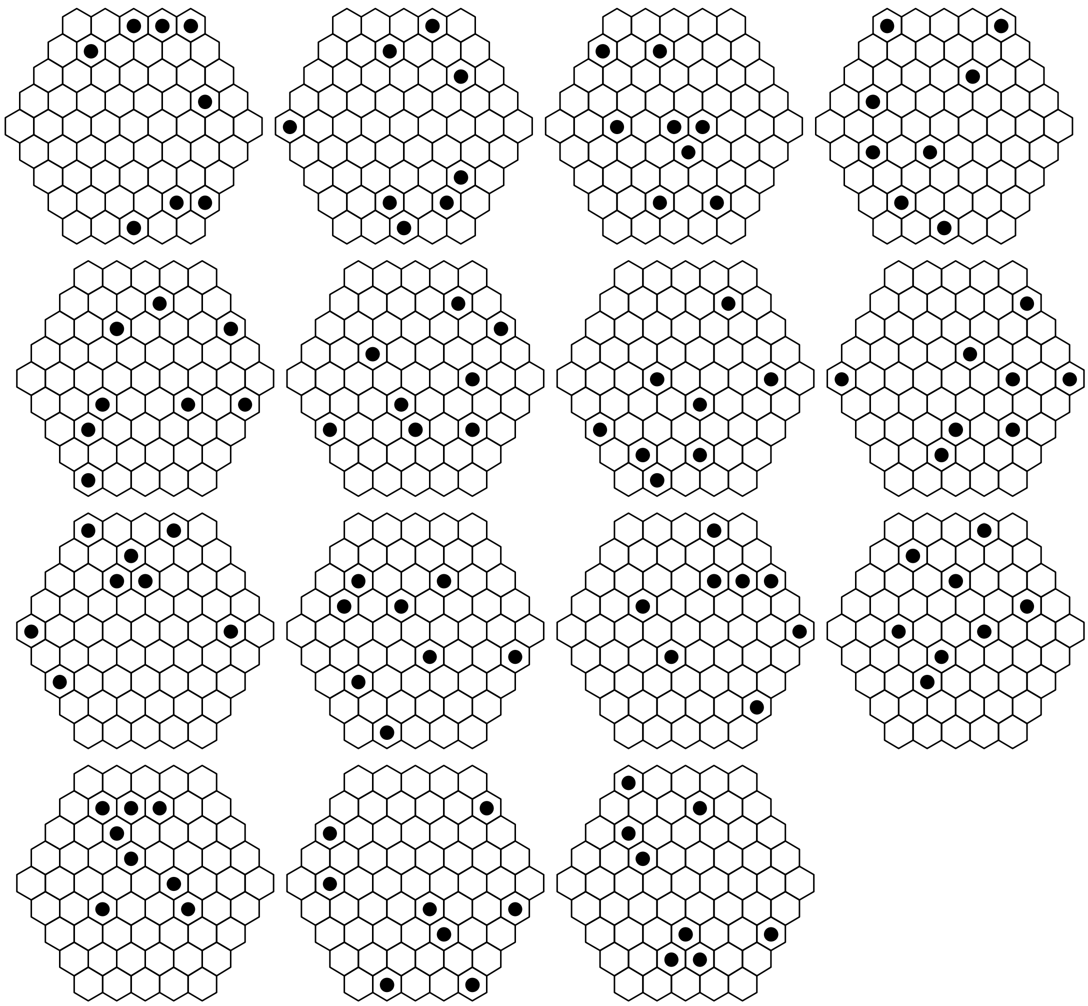
käärme

VII Erich Friedman

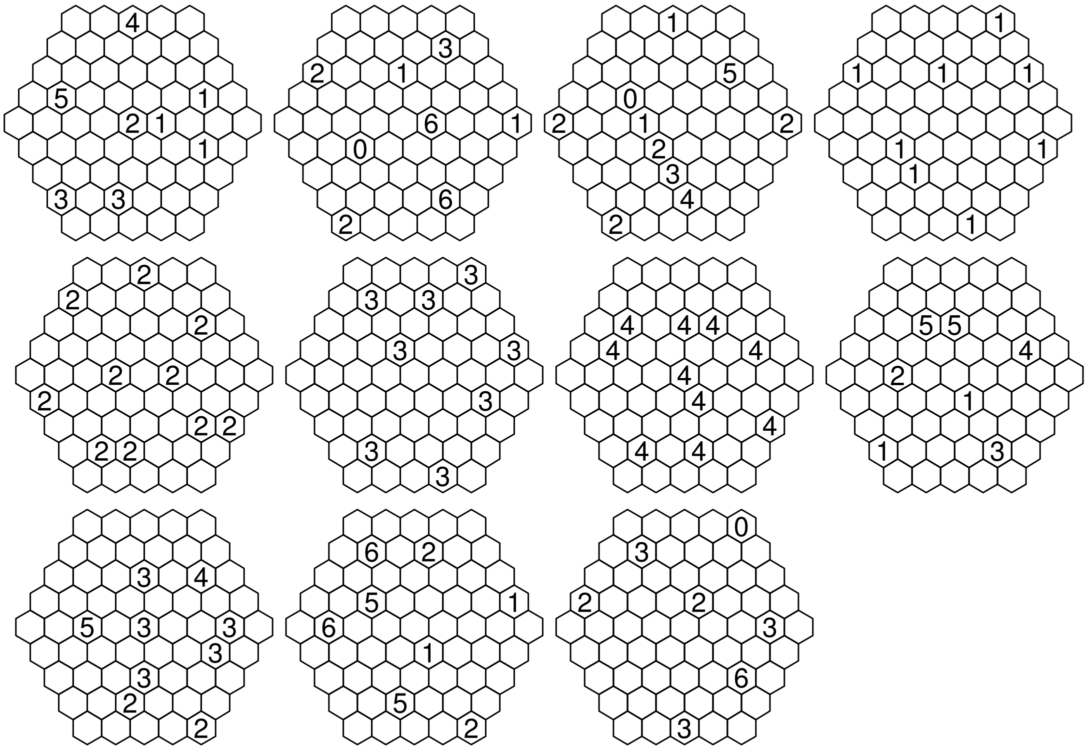
45. Piirrä polku, joka käy kerran jokaisessa tyhjässä ruudussa. Polun suunta saa muuttua vain sen törmätessä itseensä, palloon tai ruudukon reunaan. *(Erich Friedman, 2004)*



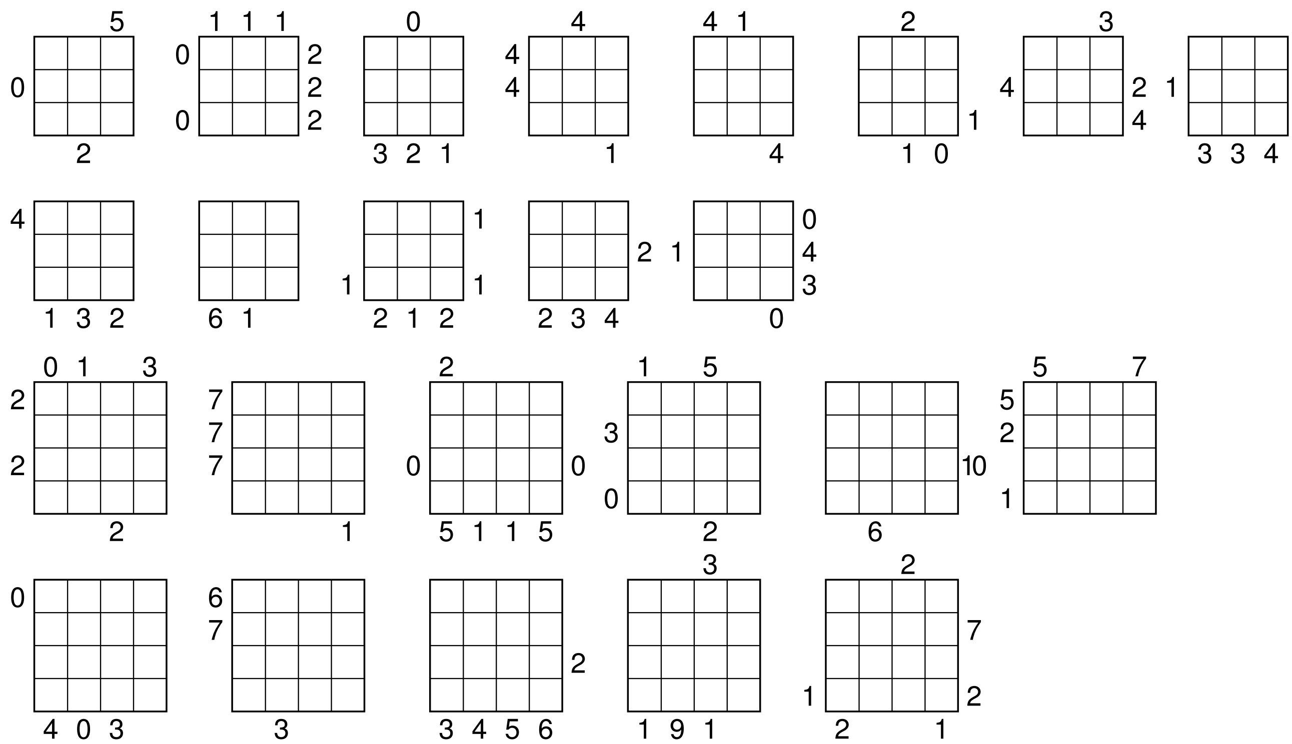
46. Piirrä polku, joka käy kerran jokaisessa tyhjässä kuusikulmiossa. Polun suunta saa muuttua vain sen törmätessä itseensä, palloon tai ruudukon reunaan. *(Erich Friedman, 2004)*



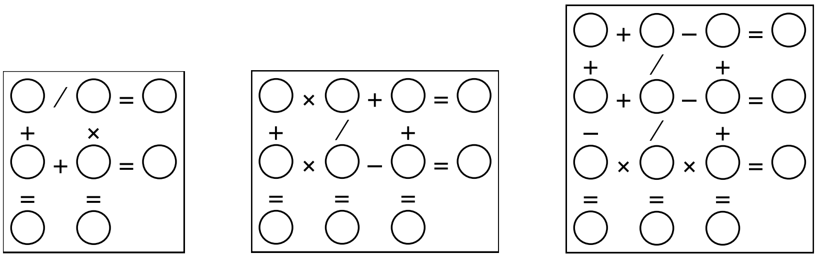
47. Kulje kuusikulmiosta toiseen kääntymättä kertaakaan yli 60 astetta ja palaa lopuksi lähtöpisteeseesi. Älä astu numeroituihin kuusikulmioihin. Kukin luku kertoo, kuinka moneen luvun ympärillä olevaan kuusikulmioon reitti osuu. *(Erich Friedman, 1998)*



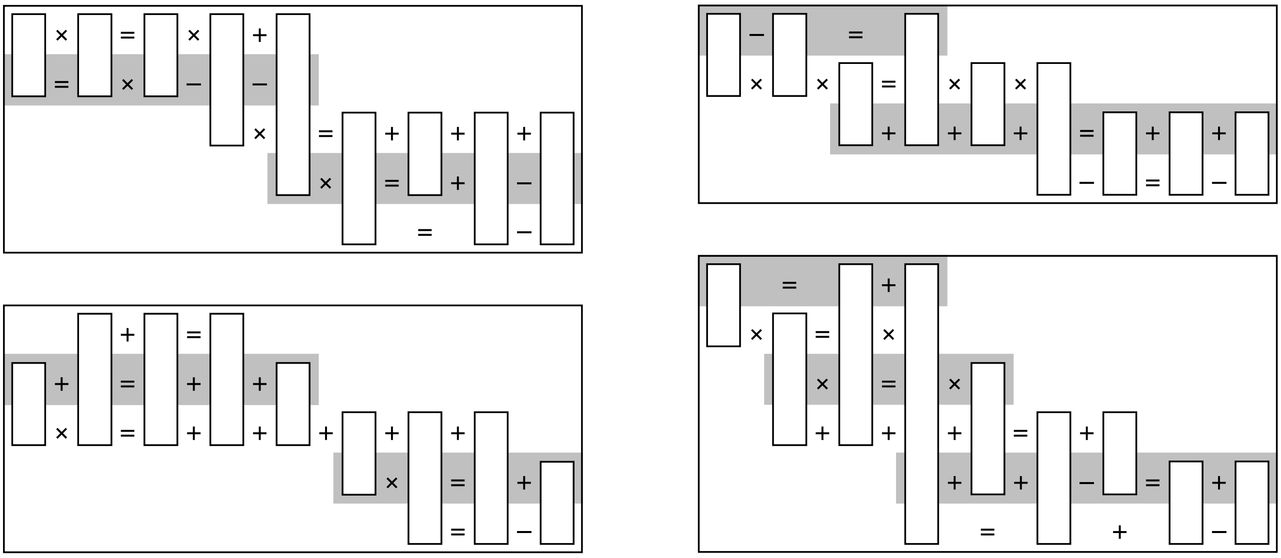
48. Piirrä jokaiseen ruutuun pallo tai ruudun lävistäjän suuntainen peili. Jokainen luku kertoo, montako kertaa luvun kohdalta ruudukkoon lähtevä valonsäde kulkee pallon läpi. Valonsäteet kulkevat vain vaaka- ja pystysuoraan, ja ne voivat kulkea saman pallon läpi monta kertaa. *(Erich Friedman, 1997)*



49. Sijoita luvut 1–*n* tyhjiin ympyröihin niin, että kaikki yhtälöt ovat tosia. *(Erich Friedman, 1998)*



50. Sijoita luvut 1–9 tyhjiin laatikoihin niin, että kaikki yhtälöt ovat tosia. *(Erich Friedman, 1999)*



51. Piirrä ruudukkoon viivoja pitkin joukko suorakulmioita niin, että suorakulmioilla ei ole yhteisiä kärkipisteitä eikä yhteistä reunaviivaa muualla kuin reunaviivojen leikkauspisteissä. Jokainen luku kertoo lukua ympäröivien suorakulmioiden pinta-alojen summan. *(Erich Friedman, 2000)*

	10					8	
3						11	
			9			11	

	31					12	
			0				
				20			
	24					10	

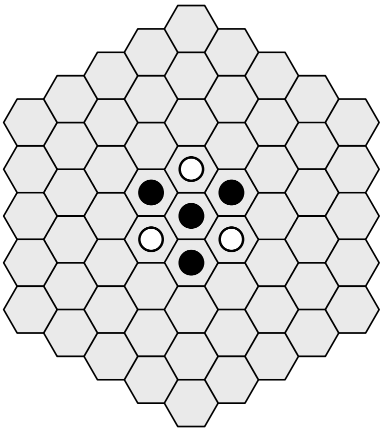
		0					
	17						
			16				
		15					
						14	
		18					

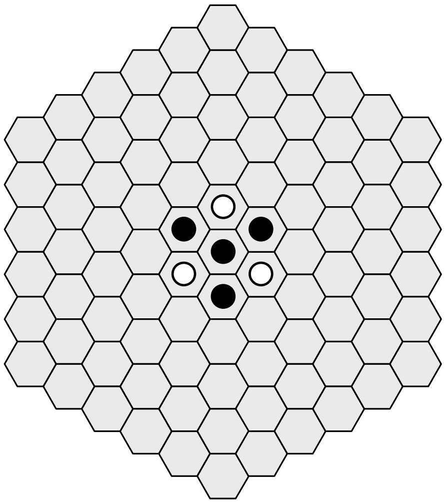
		12					12
				12			
	12			12			
					12		12
	12						
						12	

	25				8		
				13		25	
	6						

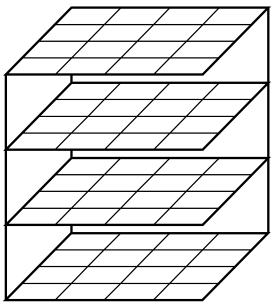
VIII Muunnelmia tutuista lautapeleistä

Monista lautapeleistä voidaan laatia mielenkiintoisia muunnelmia. Esimerkiksi **Othelloa** eli **Reversiä**, jota tavallisesti pelataan laudalla, jossa on 8 × 8 neliömäistä ruutua, voidaan mainiosti pelata myös kuusikulmaisilla ruuduilla. Alla on kuvattu kahden erikokoisen kuusikulmiolaudan alkuasetelmat. Valkea aloittaa. Pienemmällä laudalla on kaikkiaan 61 ruutua, suuremmalla 91.

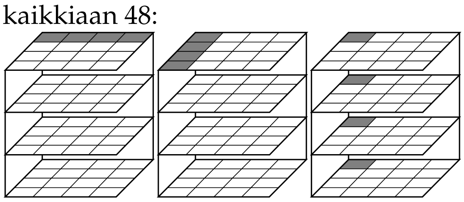




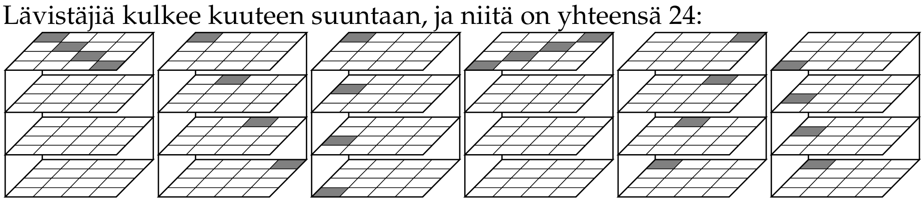
Ristinollaa, jota tavallisesti pelataan neliömäisillä ruuduilla, voidaan pelata myös kuusikulmioista muodostetulla tai kolmiulotteisella pelialueella. 4 × 4 × 4 ruudun kokoisen pelialueen voi piirtää alla olevan mallin mukaisesti. Tavoitteena on saada neljän ruudun mittainen suora rivi. (3 × 3 × 3 ruudun kokoinen pelialue olisi epäreilu, sillä aloittaja voittaisi aina sijoittamalla merkkinsä keskimmäiseen ruutuun. Kun kuution sivun pituus on 4 ruutua, peli on lähes tasapuolinen.)



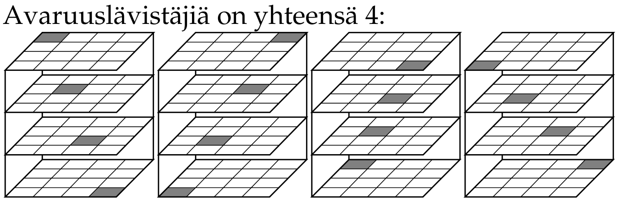
Rivejä on yllä olevassa kuutiossa kaikkiaan kaikkiaan 76. Suoria rivejä kulkee kolmeen suuntaan, ja niitä on kaikkiaan 48:



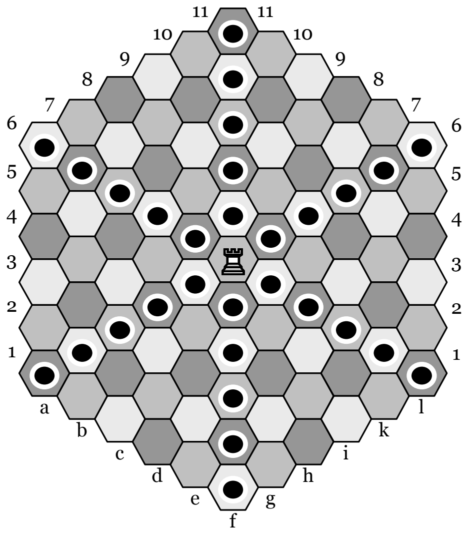
Lävistäjiä kulkee kuuteen suuntaan, ja niitä on yhteensä 24:



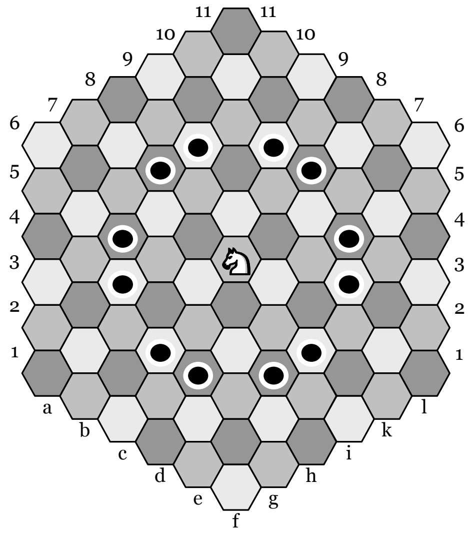
Avaruuslävistäjiä on yhteensä 4:



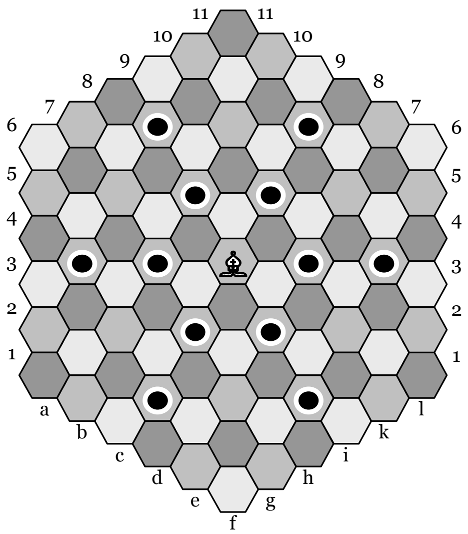
Šakin muunnelmia on kehitetty lukemattomia. On kokeiltu esimerkiksi kolmiulotteisia lautoja ja kuusikulmaisia ruutuja. Eräs tapa siirtää nappuloita kuusikulmaisilla ruuduilla on esitetty seuraavissa kuvissa. Säännöt ovat Glińskin ja McCooeyn kehittämiä.



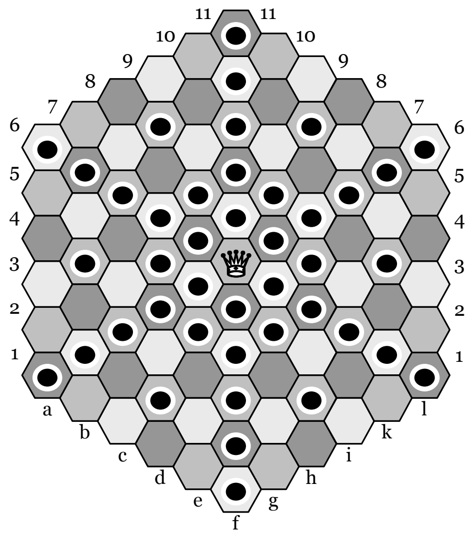
Torni.



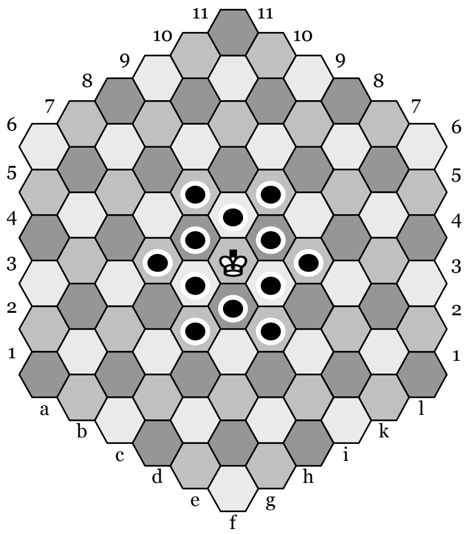
Ratsu voi hypätä muiden nappuloiden yli.



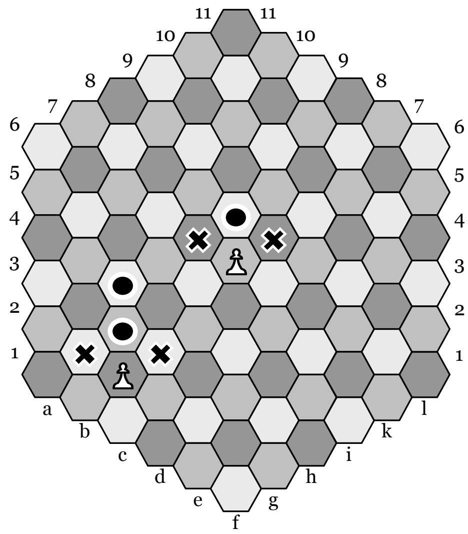
Lähetti voi siirtyä vain ruutuun, joka on samanvärinen kuin lähetin nykyinen ruutu.



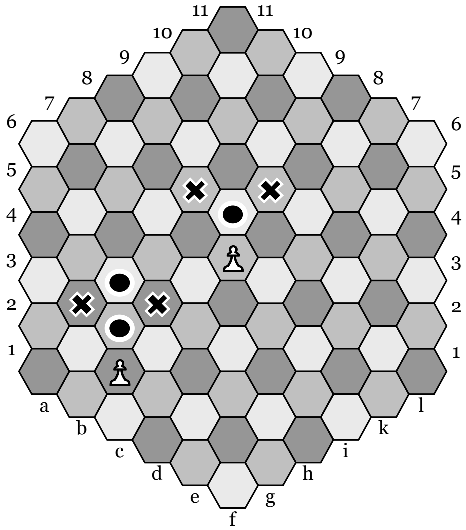
Kuningatar voi siirtyä kaikkiin ruutuihin, joihin torni tai lähetti voisi siirtyä.



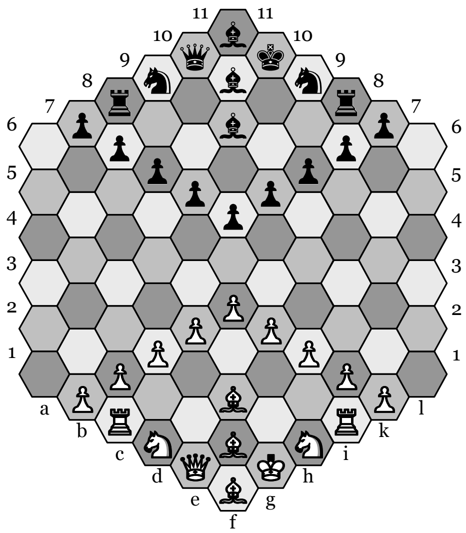
Kuningas. Glińskin ja McCooeyn säännöissä ei ole tornitusta.



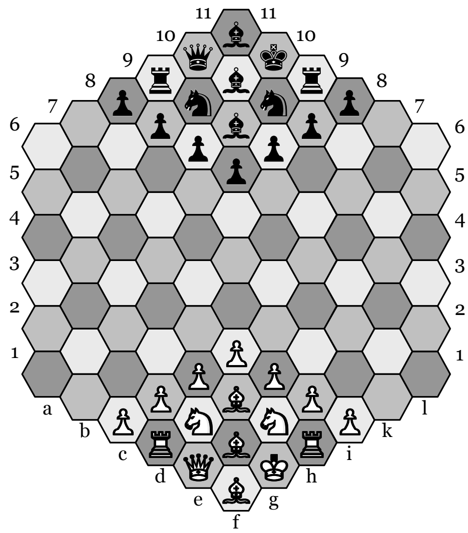
Sotilaan liikkuminen Glińskin säännöissä. Syöminen on merkitty rastilla.



Sotilaan liikkuminen McCooeyn säännöissä.



Glińskin alkuasetelma.



McCooeyn alkuasetelma.

Lopuksi muutamia ongelmia tavallisilla šakin säännöillä. Nämä eivät kuitenkaan ole tavanomaisia šakkitehtäviä.

52. Aseta šakkilaudan tyhjiin ruutuihin kuningas, kuningatar, torni, lähetti, ratsu ja sotilas. Jokainen luku kertoo, kuinka moni nappula uhkaa kyseistä ruutua. Sotilas kulkee ylöspäin, mutta sen voi sijoittaa myös laudan alimmalle tai ylimmälle riville. *(Erich Friedman, 1999)*

	1		6				
				2			
			0				

		4					
						4	
0							
		4					

1	0				0		1
0							
			0	0			0
						0	0
					0		
					0		1

		3					0
				5			
			3				0

	0	0			0		
							0
							0
0					4		0
							0
		0			0	0	0

0							0
		1	1	1	1		
		1	1	1	1		
		1	1	1	1		
		1	1	1	1		
0							
0						0	

1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	2	2	1	1	2
					2	1	

0							
0	0						
	0	0					
		0	0				
			0	0			
				0	0		
		2			0	0	
						0	0

		0	0				
		1		1			
		2		2			
		3		3			
		4		4			
						0	

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
1							
		2					
				3			

		2				3	
			2				
	3					3	
				3			
		1					

53. a) Lähde ratsulla liikkeelle šakkilaudan vasemmasta yläkulmasta ja käy jokaisessa ruudussa täsmälleen kerran.

b) Lähde ratsulla liikkeelle šakkilaudan vasemmasta yläkulmasta, käy laudan jokaisessa ruudussa täsmälleen kerran ja palaa takaisin lähtöruutuun.

c) Aseta šakkilaudalle viisi kuningatarta niin, että laudan jokainen ruutu on käytössä tai uhattuna.

d) Aseta šakkilaudalle viisi kuningatarta ja viisi ratsua niin, että mitkään kaksi nappulaa eivät uhkaa toisiaan. (Erilaisia ratkaisuja symmetriat huomioon ottaen on kuusitoista.)

e) *The Eight Queens problem*: Aseta šakkilaudalle kahdeksan kuningatarta niin, että ne eivät uhkaa toisiaan. (Erilaisia ratkaisuja on kaksitoista.)

f) Aseta šakkilaudalle kahdeksan kuningatarta niin, että ne eivät uhkaa toisiaan, eikä yksikään kuningatar ole laudan kummallakaan lävistäjällä. (Erilaisia ratkaisuja on kaksi.)

g) *The Eight Plus One Queens problem*: Aseta šakkilaudalle 9 kuningatarta ja yksi sotilas niin, että kuningattaret eivät uhkaa toisiaan (16 ratkaisua). *(Chatman, Fricke and Skaggs: The Queens Separation Problem, 2004)*

h) *The Eight Plus Two Queens problem*: Aseta šakkilaudalle 10 kuningatarta ja 2 sotilasta niin, että kuningattaret eivät uhkaa toisiaan (5 ratkaisua).

i) Aseta šakkilaudalle 14 lähettiä niin, että ne eivät uhkaa toisiaan.

j) Aseta šakkilaudalle 8 lähettiä niin, että laudan jokainen ruutu on käytössä tai uhattuna.

k) Aseta šakkilaudalle 12 ratsua niin, että laudan jokainen ruutu on käytössä tai uhattuna.

l) Aseta šakkilaudalle 16 sotilasta niin, että mitkään kolme sotilasta eivät ole samalla suoralla. (Suorat voivat kulkea mihin tahansa suuntaan.)

IX Yatzy kuudella nopalla

Tavallisessa viiden nopan yatzyssa kukin pelaaja heittää vuorollaan viittä 6-sivuista noppaa ja koettaa saada alla kuvattuja yhdistelmiä. (Joissakin maissa pistelaskusta jätetään tavallisesti bonus ja pari pois.)

	selitys	pisteet	A	B	C
ykköset	$n \times$ ⚀	$n \times 1$			
kakkoset	$n \times$ ⚁	$n \times 2$			
kolmoset	$n \times$ ⚂	$n \times 3$			
neloset	$n \times$ ⚃	$n \times 4$			
viitoset	$n \times$ ⚄	$n \times 5$			
kuutoset	$n \times$ ⚅	$n \times 6$			
bonus	*kuudelta ylimmältä riviltä vähintään 63 pistettä*	+ 50			
sattuma	*mitkä tahansa kuusi silmälukua*	*silmälukujen summa*			
pari	a a ($a =$ ⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄ *tai* ⚅)	$2 \times a$			
kaksi paria	a a b b ($a \neq b$)	$2 \times (a + b)$			
kolme samaa	a a a	$3 \times a$			
pieni suora	⚀⚁⚂⚃ *tai* ⚁⚂⚃⚄ *tai* ⚂⚃⚄⚅	15			
täyskäsi	a a b b b ($a \neq b$)	$2 \times a + 3 \times b$			
iso suora	⚀⚁⚂⚃⚄ *tai* ⚁⚂⚃⚄⚅	20			
neljä samaa	a a a a	$4 \times a$			
yatzy	a a a a a	50			
yhteensä		**0–395**			

Yatzyn sääntöjä on helppo muuttaa niin, että noppien määrä ei olekaan viisi, tai silmälukujen määrä ei olekaan kuusi. Seuraavassa on eräs itse tehty pistelaskujärjestelmä kuuden nopan yatzylle.

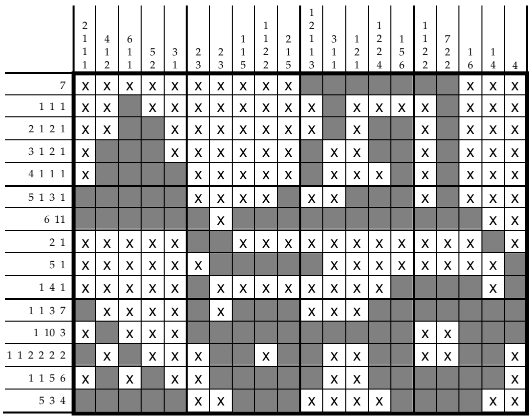
	selitys	pisteet	A	B	C
ykköset	$n \times$ ⚀	$n \times 10$			
kakkoset	$n \times$ ⚁	$n \times 20$			
kolmoset	$n \times$ ⚂	$n \times 30$			
neloset	$n \times$ ⚃	$n \times 40$			
viitoset	$n \times$ ⚄	$n \times 50$			
kuutoset	$n \times$ ⚅	$n \times 60$			
pieni bonus	*kuudelta ylimmältä riviltä vähintään 630 pistettä*	+ 100			
iso bonus	*kuudelta ylimmältä riviltä vähintään 840 pistettä*	+ 200			
superbonus	*kuudelta ylimmältä riviltä vähintään 1050 pistettä*	+ 500			
sattuma	*mitkä tahansa kuusi silmälukua*	*5 × silmälukujen summa*			
pari	a a ($a =$ ⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄ *tai* ⚅)	$25 \times a$			
kaksi paria	a a b b ($a \neq b$)	$15 \times (a + b)$			
kolme samaa	a a a	$35 \times a$			
pieni suora	⚀⚁⚂⚃ *tai* ⚁⚂⚃⚄ *tai* ⚂⚃⚄⚅	130			
pieni täyskäsi	a a b b b ($a \neq b$)	$20 \times (a + b)$			
iso suora	⚀⚁⚂⚃⚄ *tai* ⚁⚂⚃⚄⚅	200			
neljä samaa	a a a a	$60 \times a$			
iso täyskäsi	a a a b b b *tai* a a b b b b ($a \neq b$)	$35 \times (a + b)$			
kolme paria	a a b b c c ($a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$)	$35 \times (a + b + c)$			
täyssuora	⚀⚁⚂⚃⚄⚅	500			
viisi samaa	a a a a a	$180 \times a$			
yatzy	a a a a a a	1000			
yhteensä		**0–7090**			

X Japanilaisia numeroristikoita

Erilaiset loogista ajattelua ja yksinkertaista matematiikkaa vaativat ristikot ovat suosittuja Japanissa. Niitä on helppo löytää lehdistä, kirjoista ja Internetistä. Ne kehittävät loogista ajattelukykyä, ovat mukavaa ajanvietettä ja sopivat yksinkertaisten sääntöjensä ansiosta kaikenikäisille. Joitakin ristikkotyyppejä (Edel, Kakro) oppilaat voivat laatia toisilleen. Toisia (SuDoku) he voivat täytellä silloin, kun opettaja ei keksi heille tärkeämpää tekemistä.

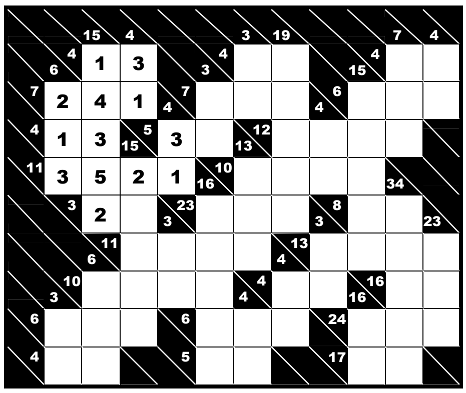
SuDoku on Yhdysvalloissa kehitetty, sieltä Japaniin ja äskettäin edelleen Eurooppaan levinnyt ristikko. Siinä täytetään neliönmuotoisia ruudukoita numeroilla tai kirjaimilla niin, että sama symboli ei esiinny kahta kertaa samalla vaakarivillä, pystyrivillä eikä samassa ruudukon osassa. Ruudukko on aina osittain valmiiksi täytetty niin, että vain yksi ratkaisu on mahdollinen. Tavallisin SuDoku-ristikon koko on 9×9 ruutua, mutta muitakin vaihtoehtoja on. Kaikentasoisia ja -kokoisia SuDokuja löytyy nykyään kaikkialta. Tässä eräs WWW-osoite:
`<http://www.dailysudoku.co.uk/sudoku/index.shtml>`.

						7			8	4	2
					C		9		6	5	B
		3						A		9	C
			C		2						A
		A		C		5	1				6
	5	4			B	6	A			8	
	6			3	7	8			A	B	
1				A	6		B		9		
2						9		8			
B	4		6						3		
5	C	2		1		3					
3	7	1			9						



Sanoilla **japanilainen ristikko** tarkoitetaan tavallisesti kuvaristikkoa, josta Japanissa käytetään joskus nimeä **Edel**. Siinä väritetään suorakulmaisen ruudukon ruutuja vihjeiden perusteella yhdellä tai useammalla värillä niin, että muodostuu kuva. Vihjeet ovat numeroita, jotka kertovat, kuinka monta samanväristä ruutua on kuvassa peräkkäin. Ruudukon sivujen pituudet ovat yleensä viidellä jaollisia lukuja kymmenen ja sadan väliltä, mutta periaatteessa mitkä tahansa koot ovat mahdollisia. Japanilaisia ristikoita oppilaat voivat laatia helposti toisilleen esimerkiksi piirtämällä kuvan ruutupaperille ja laskemalla sitten vihjeet kuvan reunoille. Valmiita Edeleitä löytyy paljon varsinkin lehdistä.

Kakro on Suomessa hiukan vähemmän tunnettu SuDokun kaltainen numeroristikko. Toisin kuin SuDoku ja Edel, Kakro on yleensä mahdollista ratkaista useammalla tavalla. Se muistuttaa tavallista sanaristikkoa, mutta vastaussanat kirjoitetaan numeroin ja jokaisen sanan vihjeenä on sanassa esiintyvien numeroiden summa. Yhdessäkään sanassa ei mikään numero saa esiintyä kuin kerran. Kakroja on mukava täyttää ja helppo laatia, eikä niidenkään ratkaiseminen vaadi yhteenlaskua kummempia matemaattisia taitoja. Ristikon laatiminen käy kätevästi ruutupaperilla näin:



1. *Rajaa mukavan kokoinen alue, esimerkiksi 10×10 ruutua.*
2. *Varjosta ylin vaakarivi ja vasein pystyrivi kokonaan, mutta niin varovaisesti, että varjostuksen päälle voi vielä kirjoittaa.*
3. *Varjosta yhtä varovasti ruutuja sieltä täältä niin, että yli viisikirjaimisia sanoja ei esiinny.*
4. *Täytä valkoiset ruudut numeroilla niin, että sama numero ei esiinny kahta kertaa yhdessäkään vaaka- tai pystysuoraan kulkevassa sanassa.*
5. *Laske jokaisen vaakasuoraan kulkevan sanan numeroiden summa ja kirjoita luku sanan vasemmalle puolelle varjostetun ruudun oikeaan yläkulmaan.*
6. *Laske jokaisen pystysuoraan kulkevan sanan numeroiden summa ja kirjoita luku sanan yläpuolelle varjostetun ruudun vasempaan alakulmaan.*
7. *Kopioi ristikon varjostukset ja vihjeet toiselle paperille ja anna se kaverin ratkaistavaksi.*

Kaikkia edellä mainittuja ja muutamia muita ristikoita on tietokoneella täytettävissä osoitteessa `<http://www.puzzle.jp/en/>`.

54. Pieniä SuDokuita

1			3
		4	
3			4

a) Sijoita jokaiseen tyhjään ruutuun numero 1:stä ja 4:ään siten, että kukin numero esiintyy vain kerran jokaisella vaakarivillä, jokaisella pystyrivillä ja jokaisessa 2×2-neliössä.

Sijoita jokaiseen tyhjään ruutuun numero 1:stä ja 6:een siten, että kukin numero esiintyy vain kerran jokaisella vaakarivillä, jokaisella pystyrivillä ja jokaisessa 3×2-suorakulmiossa.

b)

5			2		
	3			1	
		6			3
3			4		
	4			6	
		2			1

c)

6					1
	4			5	
		6	2		
		1	5		
	6			2	
5					4

55. Normaalikokoisia SuDokuita

Sijoita jokaiseen tyhjään ruutuun numero 1:stä ja 9:ään siten, että kukin numero esiintyy vain kerran jokaisella vaakarivillä, jokaisella pystyrivillä ja jokaisessa 3×3-neliössä.

a) (melko vaikea)

			2		8			
	2	9		7		6	8	
	4						9	
1								5
	8						4	
6								7
	1						3	
	9	5		1		2	6	
			4		7			

b) (vaikea)

	3						6	
7		6				5		3
	4			2			9	
			3		7			
		9				1		
			8		2			
	9			5			8	
2		5				6		1
	6						4	

56. Iso SuDoku

Sijoita jokaiseen tyhjään ruutuun kirjain A:stä ja P:hen siten, että jokainen kirjain esiintyy vain kerran jokaisella vaakarivillä, jokaisella pystyrivillä ja jokaisessa 4×4-neliössä.

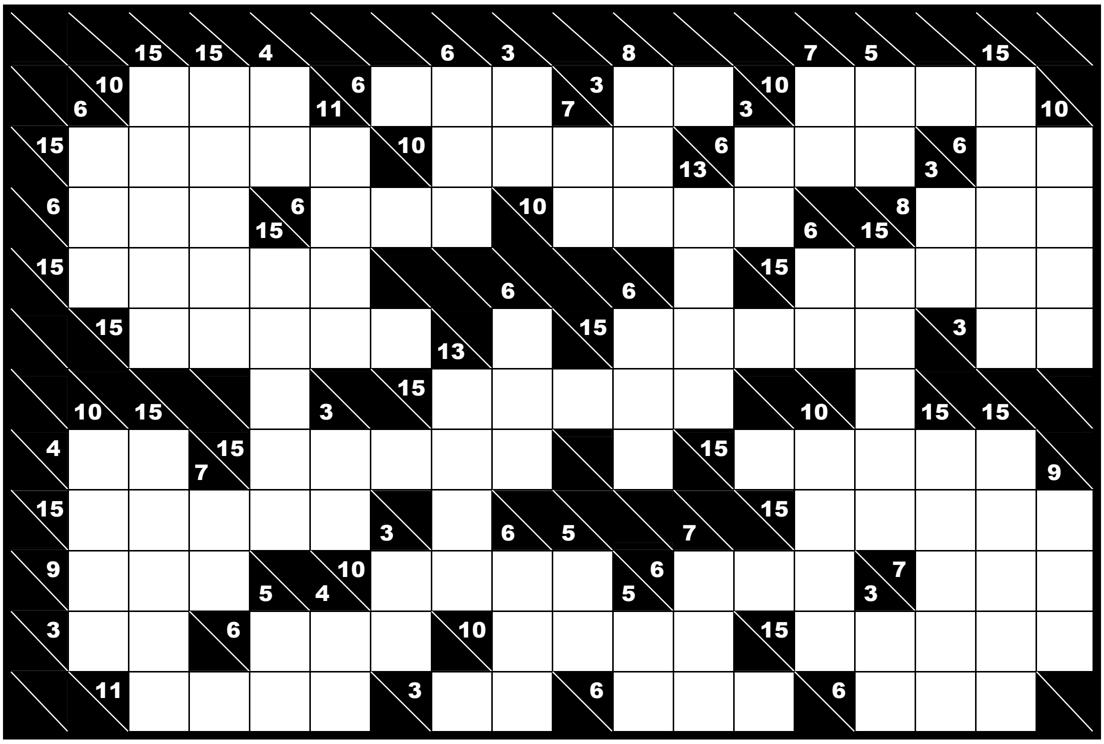
		C	D	E					J			M		O	
E					B				N	O	P		J		
				M				A					F	G	H
	N		P	I		K	L				H				
B	A				E	H					K	N			
			G	B		D	C			P	O		I	L	
J		L				P	O		A		C		E		
N	M		O	J				F			G		A	D	
		A		G		E	F	K	L		J		P		
	H					A			P	M		K			J
K	L	I		O			N				B				F
O			N			I				E		C	D		B
D					G			L			I	P	O	N	M
	G	F	E	D	C		A								I
L	K		M			J		D		F		H			
	O				K			H	G	B					A

57. Kaksi japanilaista kuvaristikkoa

				1		1			
			1	3	1	3	1		
		1	1	1	1	1	1	1	
	6	1	1	1	1	1	1	1	6
5									
1 1									
1 1 1 1									
1 1 1 1									
1 1 1 1									
1 1									
1 1 1 1									
1 3 1									
1 1									
5									

					4		2	1	1	1	1			4		
	2	3	4	5	1	6	3	4	3	3	3	7	7	1	4	2
6																
2 2																
2 1 3																
14																
16																
16																
2 1 2 1																
2 2																

58. Kakro

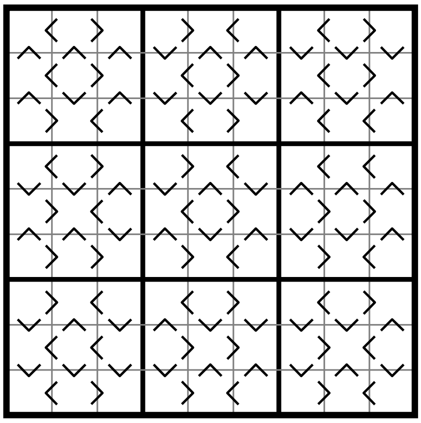


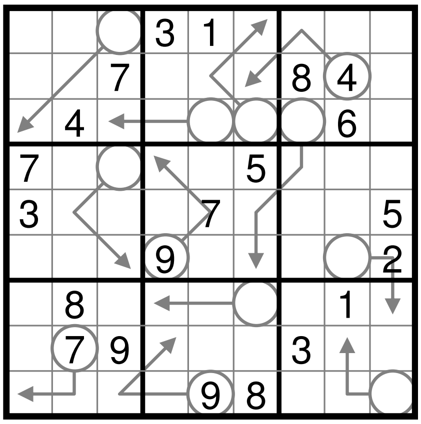
XI Sudoku-muunnelmia

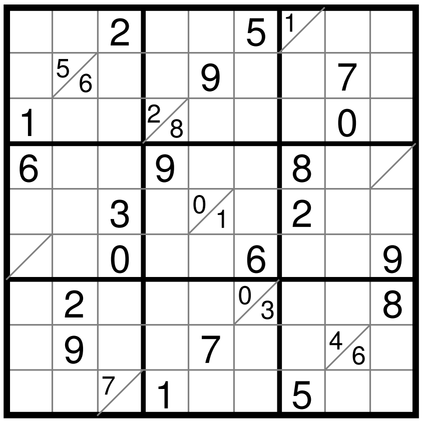
59. ***Vasemmalla***: Ruutujen väleissä on pienempi kuin ja suurempi kuin –merkkejä, joita ratkaisun numeroiden tulee tavallisten sääntöjen lisäksi noudattaa. Esimerkissä ratkaisuja on vain yksi, vaikka yhtään numeroa ei ole annettu valmiiksi. *(Puzzler, 1999)*

Keskellä: Tavallisten sääntöjen lisäksi jokaisen ympyrässä olevan numeron tulee olla ympyrästä lähtevän nuolen osoittamien numeroiden summa.

Oikealla: Kymmenen numeroa (0–9) esiintyy jokaisella vaaka- ja pystyrivillä ja jokaisessa laatikossa. Joka rivillä on ruutu, jossa on yhtä aikaa kaksi numeroa. *(Nanpure Fan, 2004)*





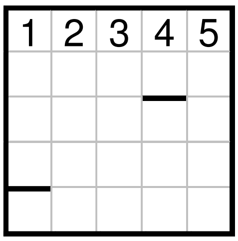


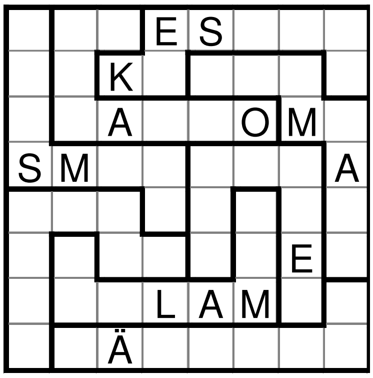
60. ***Vasemmalla***: Yksi vaikeimmista koskaan julkaistuista tavallisista sudoku-ristikoita.

Keskellä: Meta-sudoku – neliö on jaettava ruudukon viivoja pitkin viideksi erimuotoiseksi viiden ruudun kokoiseksi alueeksi niin, että syntyy sudoku, jolla on yksikäsitteinen ratkaisu. *(Wei-Hwa Huang)*

Oikealla: 8 × 8 –sudoku, jossa numerot on korvattu kirjaimilla ja neliönmuotoiset alueet epäsäännöllisillä kahdeksan ruudun kokoisilla alueilla. Kirjaimet K, E, S, Ä, L, O, M ja A esiintyvät kerran jokaisella vaaka- ja pystysuoralla rivillä ja jokaisella alueella.

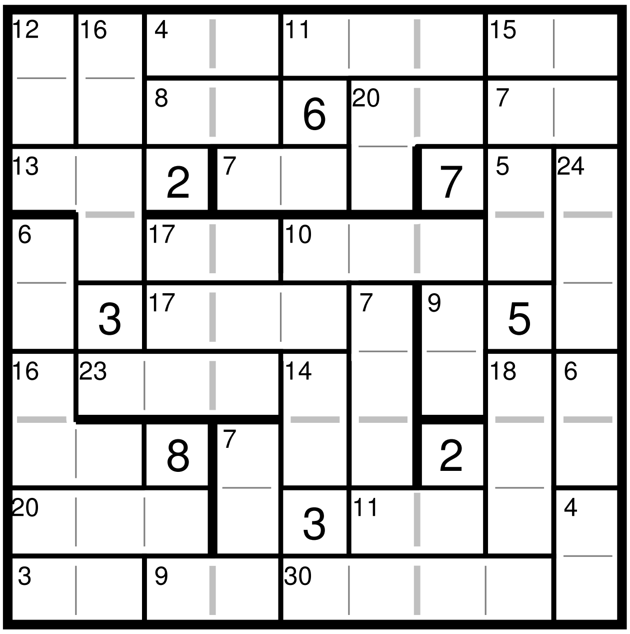
					1			2
	1			2			3	
4			5					
		4						6
	7			3			1	
8						9		
5					8			
				1			7	
		6	4			5		

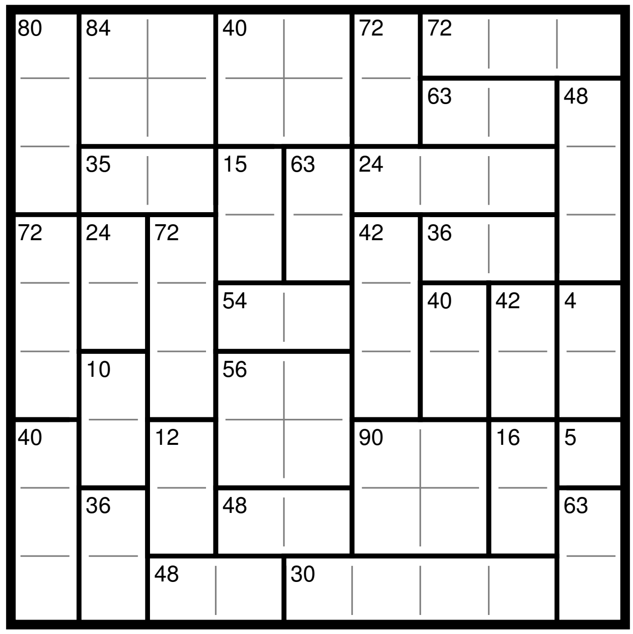




61. ***Vasemmalla***: Tavallisten sääntöjen lisäksi ruudukkoon on rajattu alueita. Kunkin alueen vasempaan yläkulmaan merkitty luku on alueella olevien numeroiden summa. Mikään numero ei esiinny saman alueen sisällä kahta kertaa. *(Puzzler, 2002)*

Oikealla: Numerot 1–9 esiintyvät kerran jokaisella vaaka- ja pystyrivillä. Jokaisen suorakulmaisen alueen vasemmassa yläkulmassa oleva luku on alueella olevien numeroiden tulo. *(Nikoli, 2000)*

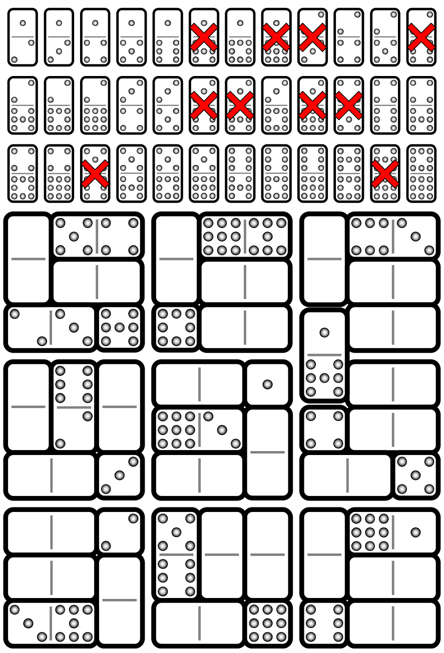


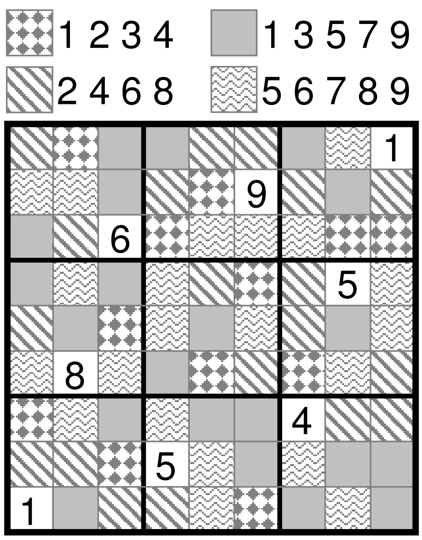


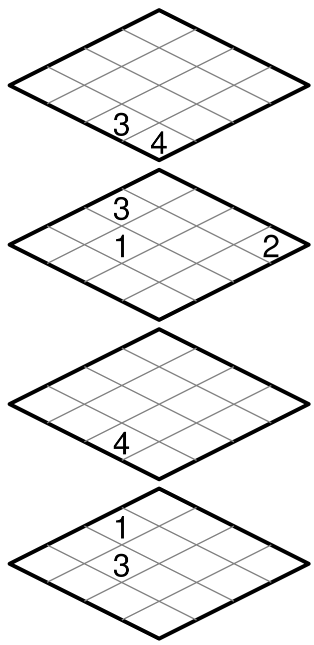
62. ***Vasemmalla***: Sudoku, joka täytetään ruudukon yläpuolella luetelluilla dominopaloilla. Ruudukkoon valmiiksi asetetut palat on merkitty rastilla. *(Ed Pegg Jr.)*

Keskellä: Tavallisten sääntöjen lisäksi jokaiseen ruutuun sopivien numeroiden joukkoa on rajoitettu värikoodien avulla. *(Nanpure Fan, 2004)*

Oikealla: Pieni kolmiulotteinen sudoku: numerot 1–4 esiintyvät kerran jokaisella leveys- korkeus- ja syvyyssuuntaisella rivillä. *(Uwe Wiedemann, 2006)*



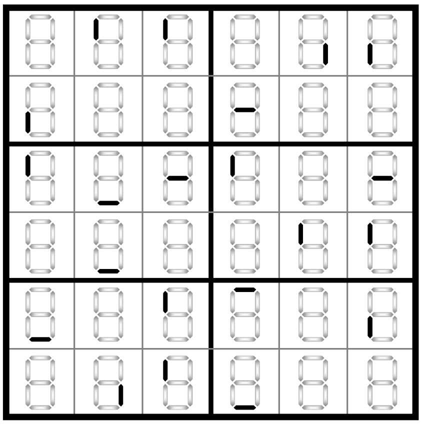


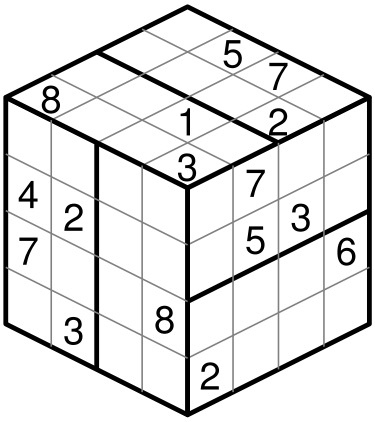


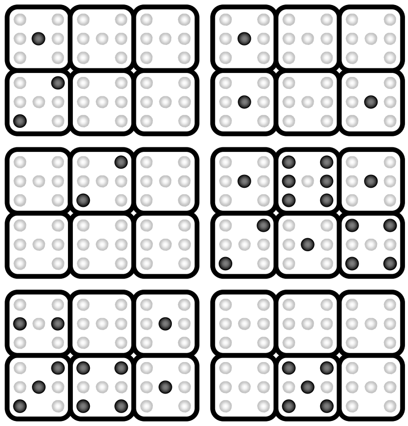
63. ***Vasemmalla***: 7-segmentti-numerot yhdestä kuuteen esiintyvät jokaisella vaaka- ja pystyrivillä ja jokaisessa laatikossa. Vihjeet on annettu näyttämällä joitakin ratkaisun numeroita osittain. *(Cihan Altay, 2005)*

Keskellä: Kuutionmuotoinen sudoku. Numerot 1–8 esiintyvät kerran kaikilla 12 rivillä ja kaikilla kuudella alueella. *(Puzzler, 1999)*

Oikealla: Silmäluvut yhdestä kuuteen esiintyvät kerran jokaisella vaaka- ja pystyrivillä ja jokaisella 3 × 2 –alueella. Silmäluvut kaksi ja kolme kulkevat aina vasemmalta alhaalta oikealle ylös. Vihjeet on annettu näyttämällä joitakin ratkaisun numeroita osittain tai kokonaan. *(Puzzler, 1999)*



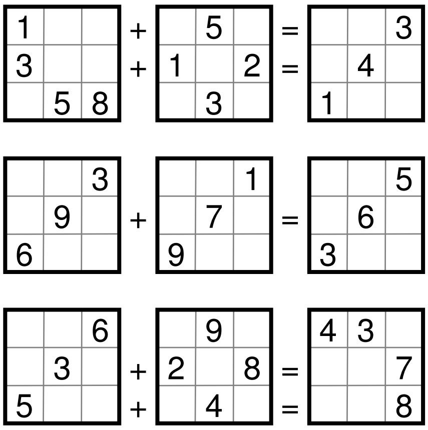




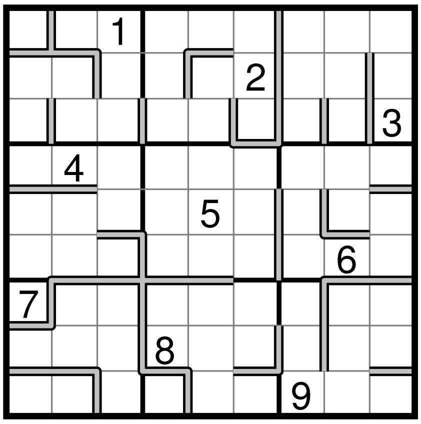
64. ***Vasemmalla***: Tavallisten sääntöjen lisäksi ruudukkoon merkittyjen yhtälöiden on oltava voimassa. Esimerkissä on viisi yhtälöä, joista jokaisessa kahden kolminumeroisen luvun summa on kolminumeroinen luku. *(Ed Pegg Jr.)*

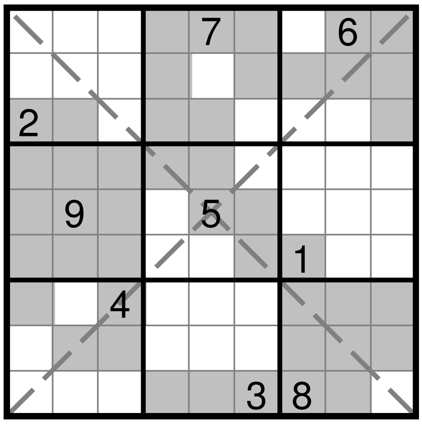
Keskellä: Tavalliset säännöt ovat voimassa. Lisäksi ruudukkoon on merkitty kaikki kohdat, joissa suuruusjärjestyksessä peräkkäiset numerot ovat vierekkäin tai allekkain. *(Hitotsu Chigai Nanpure)*

Oikealla: Tavallisten sääntöjen lisäksi numerot 1–9 esiintyvät vain kerran myös lävistäjillä. Lisäksi missään tummennetussa ruudussa ei saa olla suurempaa numeroa kuin kyseisellä 3×3-alueella on tummennettuja ruutuja. Kunkin alueen suurimmat sallitut tummennetuissa ruuduissa olevat numerot on annettu vihjeiksi. *(Alexandre Owen Muniz)*



1‖2 , 2‖3 , …, 8‖9





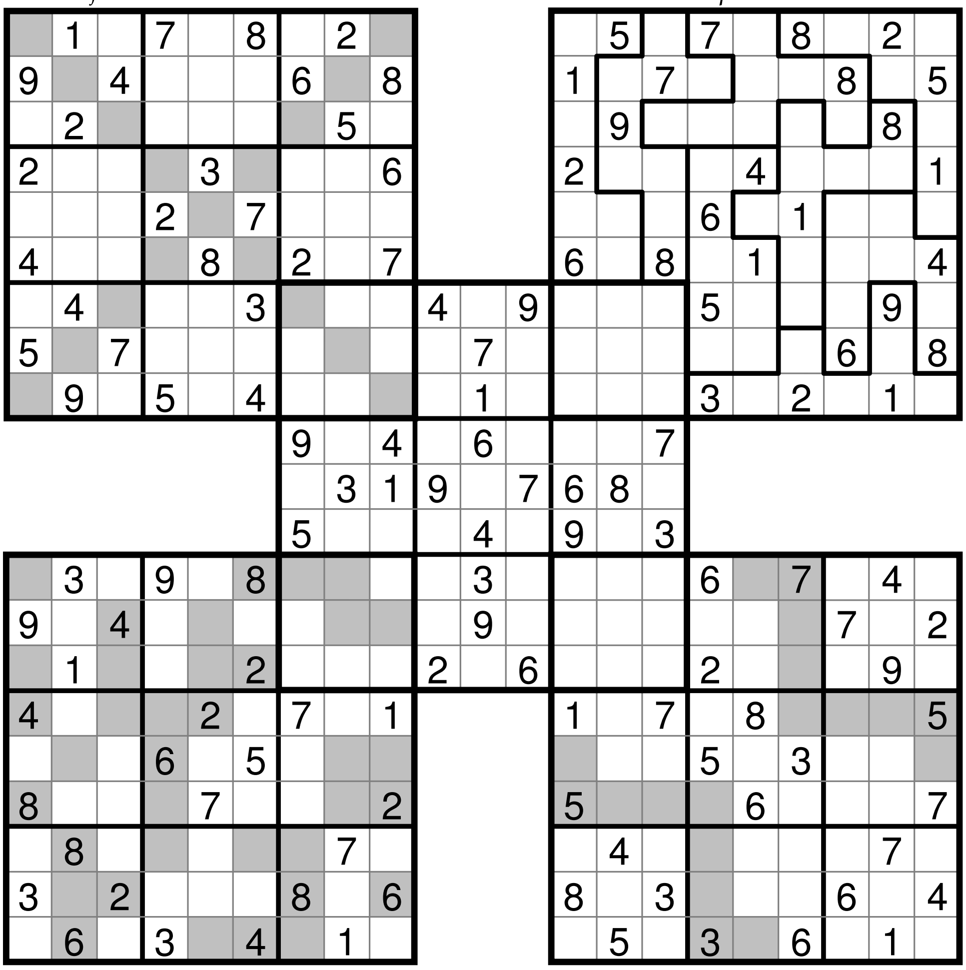
65. Numero 1 esiintyy kerran, numero 2 kahdesti, numero 3 kolme kertaa ja numero 4 neljästi jokaisella vaaka- ja pystysuoralla rivillä ja jokaisessa laatikossa. Samat numerot eivät esiinny vierekkäin eivätkä allekkain. *(Uwe Wiedemann, 2006)*

4		4					1		3
	1							2	
3		1					3		3
3		2					2		4
	3							1	
2		3					3		3

Paljon lisää Uwe Wiedemannin suunnittelemia sudokun muunnelmia on sivulla http://www.sachsentext.de/ (sama sivusto englanniksi: http://www.sachsentext.de/en/).

66. Samurai-sudoku: viisi erityyppistä sudokua osittain päällekkäin. *Lävistäjissä* jokainen numero esiintyy kerran myös lävistäjillä. *Epäsäännöllisissä alueissa* neliönmuotoiset laatikot on korvattu epäsäännöllisillä yhdeksän ruudun kokoisilla alueilla. *Parillisessa ja parittomassa* tummennettuihin ruutuihin tulee vain parillisia numeroita ja tummentamattomiin vain parittomia. *Ylimääräisissä alueissa* on varjostettu ylimääräisiä yhdeksän ruudun kokoisia alueita, joissa jokainen numero esiintyy vain kerran. *(Number Place, 2004)*

Lävistäjät *Epäsäännölliset alueet*

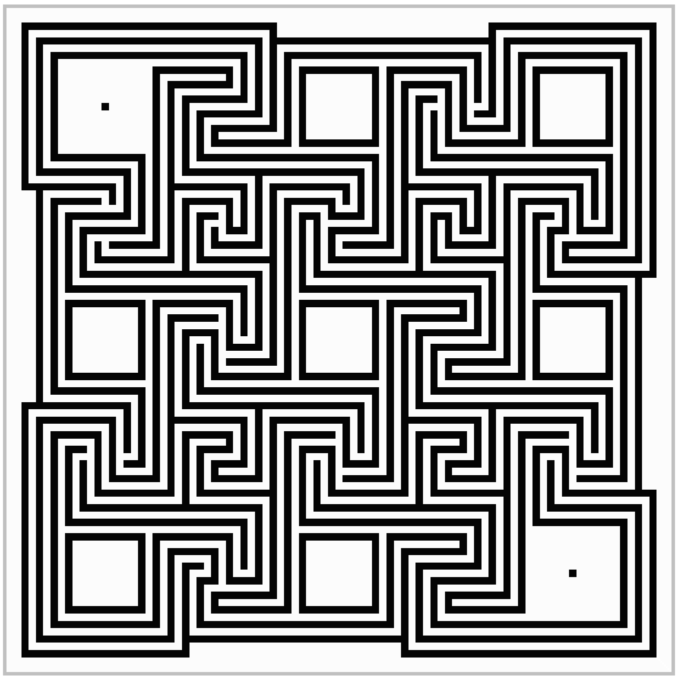
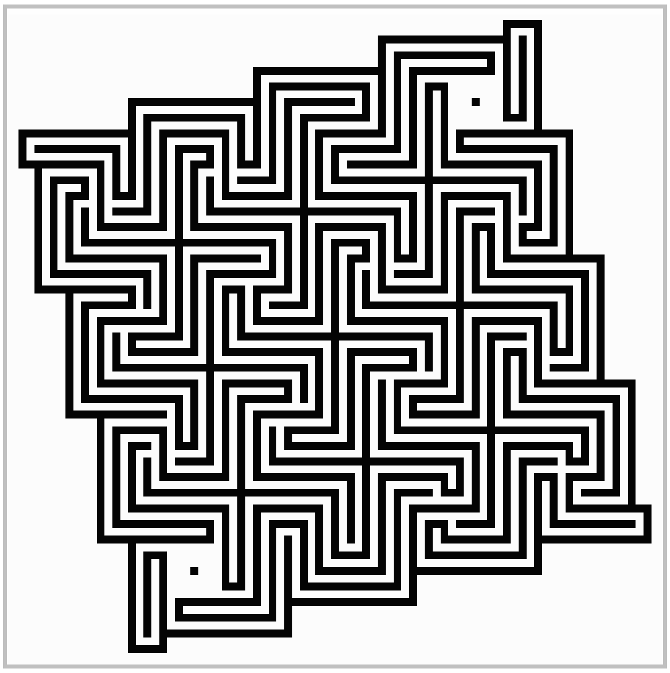
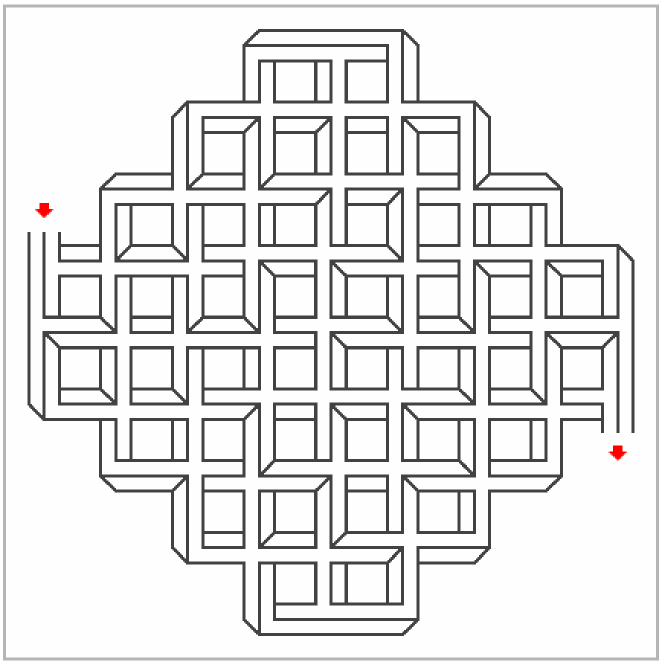
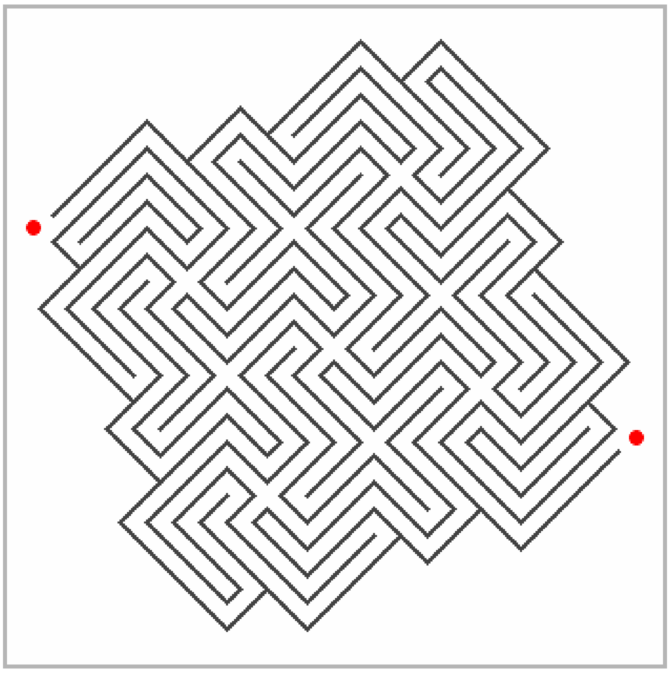


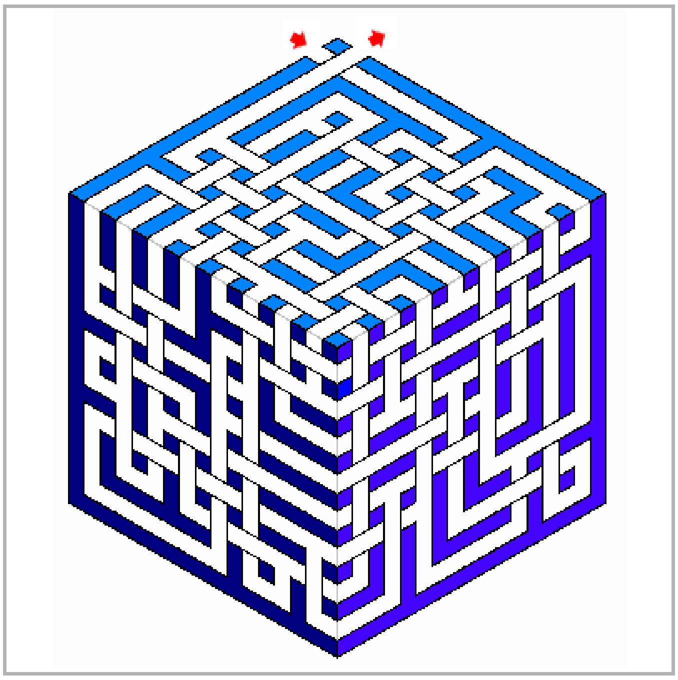
Parillinen ja pariton *Ylimääräiset alueet*

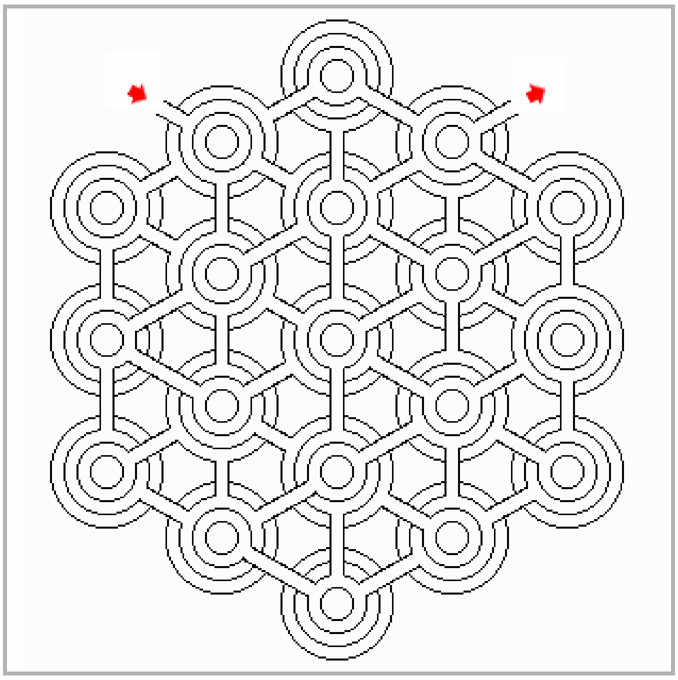
XII Labyrintteja

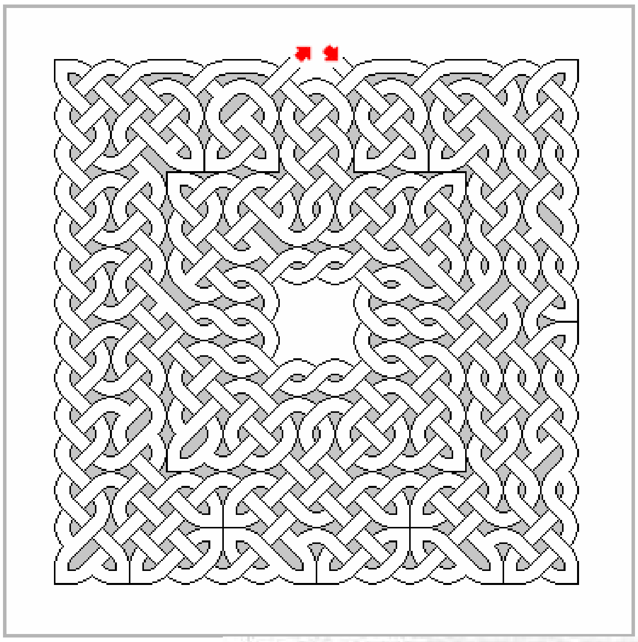
Andrea Gilbert on koonnut sivustolleen <http://www.clickmazes.com/> valtavasti suunnittelemiaan upeita labyrintteja. Tässä muutamia näytteitä.

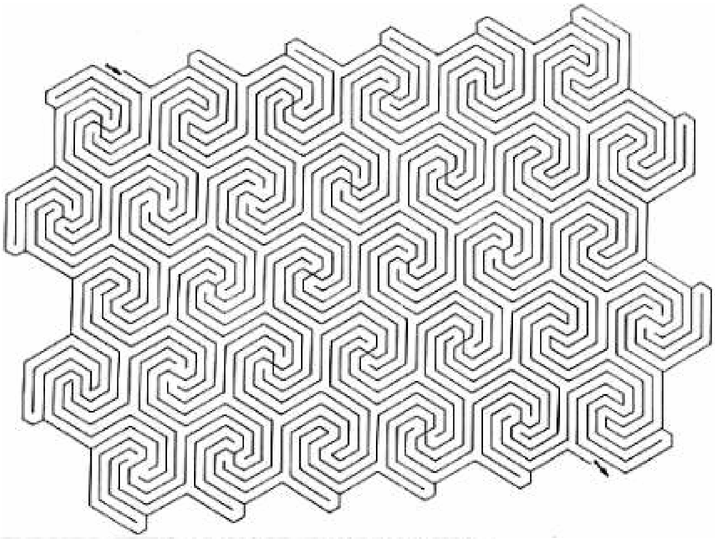
67. Ratkaise labyrintit.

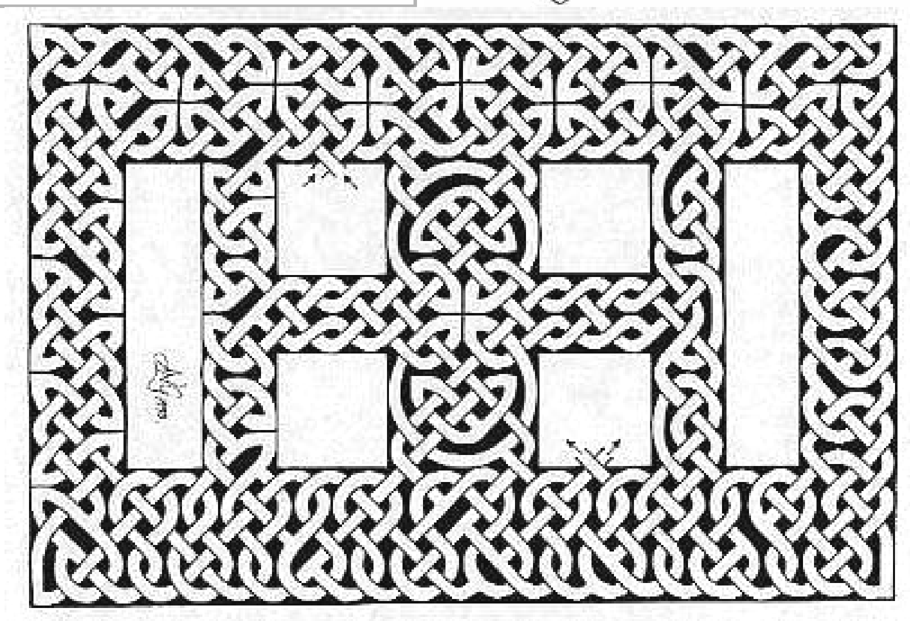















Lähteitä

Brandreth, Gyles (ed.): The Big Book of Puzzles and Games

Gardner, Martin: Hexaflexagons and Other Mathematical Diversions

Gardner, Martin: Martin Gardner's New Mathematical Diversions from Scientific American

Gardner, Martin: Rolig Matematik

Karilas, Yrjö (toim.): Antero Vipunen

`http://mathworld.wolfram.com/` (6.10.2006)

`http://www.puzzle.jp/` (20.11.2005)

`http://www.sachsentext.de/` (6.10.2006)

`http://www.stetson.edu/%7Eefriedma/puzzle.html` (6.10.2006)

`http://www.clickmazes.com/` (19.4.2007)

Tämä materiaali on toistaiseksi saatavissa pdf-tiedostoina osoitteista

`www.cs.tut.fi/~kuukkane/Ongelmia.pdf` ja

`www.cs.tut.fi/~kuukkane/Ratkaisuja.pdf`