

Tehtävä 1

Selvitä jollain tavalla, perustele, tai laske.

a) Millä k :n arvolla yhtälöllä $(x-3) \cdot (x-k)=0$ on vain yksi ratkaisu?

b) Polynomista $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ tiedetään, että $P(1)=5$.

Määritä polynomin kertoimien summa $a+b+c+d$.

c) Anna kaksi esimerkkiä sellaisesta 2. asteen polynomista $P(x)$, joka on jaollinen binomilla $(x+3)$ ja jolle $P(5)=0$.

RATKAISU:

a) tapa 1: Jotta olisi vain yksi ratkaisu, tulee juurten olla samat:

$\text{solve}((x-3) \cdot (x-k)=0, x) \Rightarrow x=k \text{ or } x=3$, siis $k=3$.

tapa 2: Diskriminatini on oltava nolla: $(x-3) \cdot (x-k) = 0 \Leftrightarrow x^2 + (-k-3)x + (-3 \cdot -k) = 0$,

$$D = (-k-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot k \quad \text{solve}((-k-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot k = 0, k) \rightarrow k=3.$$

b) $P(1)=a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 5$, eli $a+b+c+d = 5$.

c) $P_1(x)=(x-5)(x+3)$ ja $P_2(x)=-(x-5)(x+3)$ [$P(x)=a(x-5)(x+3)$, $a \neq 0$]

Tehtävä 2

2. Ovatko väittämät oikein vai väärin?

a) Polynomin termien lukumäärä ei voi olla pienempi kuin sen asteluku.

b) Polynomin termien lukumäärä ei voi olla suurempi kuin sen asteluku.

c) Kahden polynomin tulo on aina polynomi.

d) Kun polynomista vähennetään toinen polynomi, sen asteluku pienenee.

e) Kun polynomista vähennetään polynomi, sen asteluku ei voi kasvaa.

f) Kahden polynomin tulon asteluku on tekijöiden astelukujen summa.

RATKAISUT:

a) väärin, esim. yksiterminen 3. asteen polynomi $P(x)=x^3$

b) väärin, esim. kaksiterminen 1. asteen polynomi $P(x)=x+5$

c) oikein. $P(x) \cdot Q(x)$ on polynomi.

d) väärin, esim. jos 1. asteen polynomista x vähennetään polynomi x^2 , niin saadaan

2. asteen polynomi $x-x^2$. Siis asteluku ei pienentynyt, vaan jopa kasvoi.

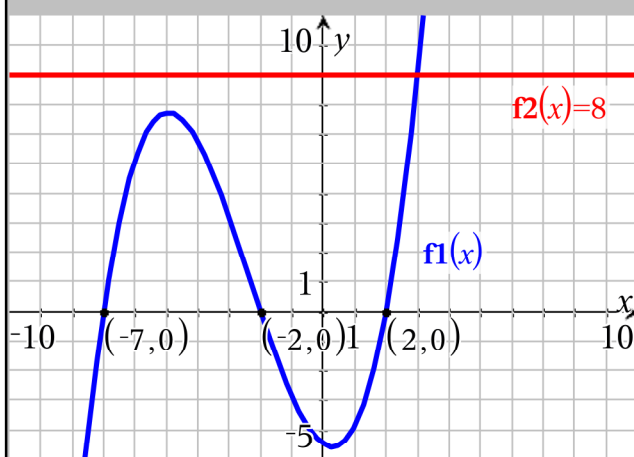
e) väärin, (katso kohta d)

f) oikein

Tehtävä 3

3. Tutki kuvaa, ja vastaa kysymyksiin.

- a) Millä **negatiivisilla** x :n arvoilla $f_1(x) \leq 0$?
- b) Ratkaise graafisesti epäyhtälö $8 < f_1(x)$.
- c) Ratkaise graafisesti epäyhtälö $f_1(x) > 0$.
- d) Muodosta 3. asteen polynomifunktio $f_1(x)$.



ratkaisut:

- a) $x \leq -7$ tai $-2 \leq x < 0$
- b) $x > 3$
- c) $-7 < x < -2$ tai $x > 2$
- d) $p(x) := a \cdot (x - (-7)) \cdot (x - (-2)) \cdot (x - 2)$
 $\text{solve}(p(3)=8, a) \Rightarrow a = \frac{4}{25}$
 $P(x) = a(x+7)(x+2)(x-2), a \approx 0,15 \dots 0,17$

tarkistukset laskimella:

- a) $\text{solve}(p(x) \leq 0, x) | a = \frac{4}{25}$ and $x < 0 \Rightarrow -2 \leq x < 0$ or $x \leq -7$
- b) $\text{solve}(8 < p(x), x) | a = \frac{4}{25} \Rightarrow x > 3$
- c) $\text{solve}(p(x) > 0, x) | a = \frac{4}{25} \Rightarrow -7 < x < -2$ or $x > 2$

Tehtävä 4

4. Laske yhtälön $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ ratkaisujen keskiarvo, eli paraabelin symmetria-akselin paikka.

ratkaisu:

Yhtälön ratkaisut x_1 ja x_2 ovat:

$$x_1 := \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \quad \text{ja} \quad x_2 := \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Lukujen keskiarvo:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow \frac{-b}{2 \cdot a} \quad \text{!}$$

Vastaus: Ratkaisujen keskiarvo on $\frac{-b}{2a}$.

Huomautus:

Jos 2. asteen yhtälöllä on kaksi nollakohtaa, huippu on niiden puolivälissä.

Paraabelin huippu sijaitsee symmetria-akselilla, joka on suora $x = \frac{-b}{2a}$.

Tehtävä 5

5. Polynomista $P(x)$ tiedetään kolme asiaa:

- 1) se on 2. asteen polynomi
- 2) kuvaajan huippu sijaitsee pisteessä $(3, -2)$
- 3) $x=5$ on polynomin nollakohta

a) Määritä polynomin toinen nollakohta.

b) Onko polynomin kuvaaja ylös-, vai alaspäin avautuva paraabeli?

c) Määritä polynomin lauseke.

ratkaisu:

a) Nollakohdat ovat symmetrisesti huipun molemmiin puolin:

Huipun x -koordinaatti on 3 ja nollakohdan x -koordinaatti on 5,

siis toinen nollakohta on $x=3-2=1$ (tapa 2: keskiarvolla $\text{solve}\left(\frac{5+x}{2}=3, x\right) \Rightarrow x=1$)

b) Koska huippu on nollakohtien alapuolella, niin ylöspäin avautuva paraabeli.

c) $P(x)=a(x-1)(x-5)$ ja $P(3)=-2$, joista saadaan $\text{solve}(a \cdot (3-1) \cdot (3-5)=-2, a) \Rightarrow a=\frac{1}{2}$

$P(x)=\frac{1}{2}(x-1)(x-5)$ **Huom.** $a>0$, joten nyt kannattaa tarkistaa b-kohdan vastaus...ok ylöspäin

Tehtävä 6

6. Laadi merkkikaavio ja ratkaise sen avulla epäyhtälö $-(x-3)(x-2)(x^2+3x+8)>0$.

ratkaisu:

Muokataan 1. tekijä muotoon $(-x+3)$ ja tehdään merkkikaavio:

$\text{solve}(-x+3=0, x) \Rightarrow x=3$ -/+

$\text{solve}(x-2=0, x) \Rightarrow x=2$ +/-

$\text{solve}(x^2+3 \cdot x+8=0, x) \Rightarrow \text{false}$ Eli ei nollakohtia +

Merkkikaavio: 2 3

$-x+3$ - | + | +

$x-2$ + | + | -

$x^2+3 \cdot x+8$ + | + | +

tulo - | + | -

vastaus: $-(x-3)(x-2)(x^2+3x+8)>0$, kun $2<x<3$.

tarkistus laskimella: $\text{solve}(-(x-3) \cdot (x-2) \cdot (x^2+3 \cdot x+8)>0, x) \Rightarrow 2<x<3$

Tehtävä 7

7. Ukkelin pitäisi rakentaa koiralleen suorakulmion muotoinen aitaus, jonka yhtenä sivuna on 3 m leveä talon seinä. Paljonko aitaa kolmelle muulle sivulle tarvitaan yhteensä, kun koira vaatii liikkumiseen 24 m^2 tilaa?

ratkaisu:

$$\text{solve}(3 \cdot x = 24, x) \Rightarrow x = 8$$

$$3 + 8 + 8 = 19$$

Vastaus: Aitaa tarvitaan 19 metriä.