

1.1. Itseisarvoyhtälö

MAOL

$-a \quad 0 \quad a$

A horizontal number line with arrows at both ends. Three points are marked with vertical tick marks and labeled above as $-a$, 0 , and a . Below the line, two curly braces indicate distances: one from 0 to $-a$ labeled $|a|$, and another from 0 to a labeled $|a|$.

$$(1) \quad |a| \geq 0$$

$$(2) \quad |-a| = |a|$$

$$(3) \quad |ab| = |a||b|$$

$$(4) \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0)$$

(5) $|a^2| = a^2$

$$(6) \quad \sqrt{a^2} = |a|$$

A number line diagram illustrating the distance between two points, a and b . The points are marked on a horizontal line with arrows at both ends. A bracket below the line connects the two points, and the text $|a - b|$ is written below the bracket. The entire diagram is circled in blue.

ESIM 1. Lukujen $3 - \sqrt{3}$ ja $5 - 2\sqrt{3}$ etäisyys on $|3 - \sqrt{3} - (5 - 2\sqrt{3})|$
 $= |3 - \sqrt{3} - 5 + 2\sqrt{3}| = |\underbrace{-2 + \sqrt{3}}_{\leq 0}| = -(-2 + \sqrt{3}) = \underline{\underline{2 - \sqrt{3}}}$

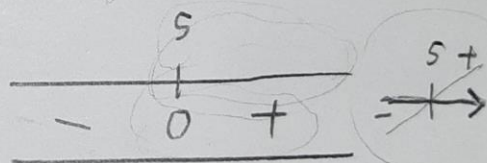
HUOM! Jos itseisarvomerkkien sisällä on lauseke, poistetaan itseisarvomerkit lausekkeen merkkikaavion avulla!

ESIM 2. Esitä ilman itseisarvomerkkejä a) $|2x-10|$ b) $|x^2+16|-x$.

a) $|2x - 10|$

mollakoindat: $2x - 10 = 0$
 $-2x = 10$
 $x = 5$

$2x - 10$



$$|2x - 10| = \begin{cases} 2x - 10 & , \text{ kun } x \geq 5 \\ -2x + 10 & , \text{ kun } x \leq 5 \end{cases}$$

B) $\underbrace{|x^2 + 16|}_{\geq 0} - x = \underline{\underline{x^2 + 16 - x}}$

$$\sqrt{x^2 + 16}$$

Itseisarvoyhtälöksi kutsutaan yhtälöä, jossa muuttuja x on itseisarvomerkkien sisällä.

(1) Yhtälön $|f(x)| = a$ ratkaisu on

• jos $a \geq 0$: $|f(x)| = a$

niin $f(x) = a$ tai $f(x) = -a$

• jos $a < 0$

niin yhtälöllä $|f(x)| = a$ ei ole ratkaisua

ESIM 3. Ratkaise a) $|6x+5|-7=0$

b) $|2x-3| = -5$

B) Ei ratkaisua.

a) $|6x+5|-7=0$

$|6x+5| = 7$

$6x+5 = 7$

$6x = 2$

$x = \frac{2}{6}$

$x = \frac{1}{3}$

tai $6x+5 = -7$

tai $6x = -12$

tai $x = -\frac{12}{6}$

tai $x = -2$

(2) Yhtälön $|f(x)| = |g(x)|$

ratkaisu on $f(x) = g(x)$ tai $f(x) = -g(x)$

ESIM 4. Ratkaise $|2x-3| - |2-x| = 0$.

$$|2x-3| = |2-x|$$

$$2x-3 = 2-x \quad \text{tai} \quad 2x-3 = -(2-x)$$

$$3x = 5$$

$$\text{tai} \quad 2x = -2 + x + 3$$

$$x = \frac{5}{3}$$

$$\text{tai} \quad x = 1$$

(3) Yhtälön (ja epäyhtälön) korotus neliöön puolittain M_j :ssä:

- käytetään, kun yhtälössä on itseisarvoja ja neliöjuuria
- molempien puolien oltava määrittelyjoukossaan ei-negatiiviset

HUOM! Jos yhtälössä on neliöjuuria, muista määrittelyjoukko.

$$\text{Jos } a \geq 0 \text{ ja } b \geq 0 \\ \text{niin } a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$$

ESIM 5. Ratkaise $\frac{|-3k-6|}{\sqrt{k^2+1}} = 3$

$$\parallel \cdot \sqrt{k^2+1}$$

$$\parallel M_j: \\ k^2+1 > 0 \\ \underbrace{\geq 0}_{>0}$$

Siis $k \in \mathbb{R}$

$$\underbrace{|-3k-6|}_{\geq 0} = \underbrace{3\sqrt{k^2+1}}_{\geq 0}$$

$$\parallel (\)^2$$

$$\underbrace{|-3k-6|}_{\geq 0}^2 = \underbrace{(3\sqrt{k^2+1})}_{\geq 0}^2$$

$$(-3k-6)^2 = 9(k^2+1)$$

$$(-3k)^2 - 2 \cdot (-3k) \cdot 6 + 6^2 = 9k^2 + 9$$

$$\cancel{9k^2} + 36k + 36 = \cancel{9k^2} + 9$$

$$36k = -27$$

$$k = -\frac{27}{36} = -\frac{3}{4} \quad (\in M_j)$$

$$\underline{\underline{V: k = -\frac{3}{4}}}$$

(4) Kun ratkaistavaa muuttujaa (esim. x) on myös itseisarvomerkkien ulkopuolella:

Tapa 1: Käytetään itseisarvon määritelmää (käy aina!)

Tapa 2: Sievennä yhtälö muotoon, jossa vain itseisarvolauseke on vasemmalla puolella ja määritä oikealle puolelle M_j niin, että ≥ 0 . Ratkaise kuten yhtälö $|f(x)| = a$, mutta lopuksi tarkista kuuluvatko ratkaisut M_j :oon.

ESIM 4. Ratkaise $|x-2| = 2x$

$$\begin{aligned} x-2 &= 2x & \text{tai} & & x-2 &= -2x \\ x-2x &= 2 & & & 3x &= 2 \\ -x &= 2 & & & x &= \frac{2}{3} \\ x &= -2 & & & & \\ &\notin M_j & & & & \end{aligned}$$

$$M_j: \begin{aligned} 2x &\geq 0 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

$$V: \underline{\underline{x = \frac{2}{3}}}$$

ESIM 5. Ratkaise $x|x+2x+1| = 0$.

Itseisarvon nää mukaan

$$\begin{cases} x \cdot x + 2x + 1 = 0 \\ x \cdot (-x) + 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{kun } x \geq 0 \\ \text{kun } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Kun } x \geq 0$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$x = -1$$

$$KR \nsubseteq$$

$$\notin M_j$$

$$\text{Kun } x < 0:$$

$$-x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$$

$$< 0$$

$$> 0$$

$$\notin M_j$$

$$V: \underline{\underline{x = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}}}$$

1.2. Yhtälöryhmä

Yhtälöryhmällä tarkoitetaan useamman kuin yhden yhtälön joukkoa.

Kun yhtälöitä ja tuntemattomia on kaksi, puhutaan **yhtälöparista**.

Yhtälöryhmän **ratkaisuja** ovat ne muuttujan arvot, jotka toteuttavat kaikki yhtälöryhmän yhtälöt.

HUOM! Jos yhtälöryhmän muuttujien kertoimina on murtolukuja, kannattaa nimittäjät poistaa kertomalla yhtälöt sopivilla luvuilla.

ESIM 1. Ratkaise yhtälöryhmä
$$\begin{cases} x - y + z = -6 \\ 2x + y + z = -1 \\ 4x - 2y + 5z = -15 \end{cases} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Laskimesta:

$$x = -3, y = 4, z = 1$$

yhteenlaskukeino

Eliminoidaan sama muuttuja y:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{cases} x - y + z = -6 \\ 2x + y + z = -1 \end{cases} \\ + & \\ \hline & 3x + 2z = -7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \begin{cases} 2x + y + z = -1 \quad | \cdot 2 \\ 4x - 2y + 5z = -15 \end{cases} \\ + & \\ \hline & 4x + 2y + 2z = -2 \\ + & \\ \hline & 4x - 2y + 5z = -15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 4x + 2y + 2z = -2 \\ 4x - 2y + 5z = -15 \end{cases} \\ + & \\ \hline & 8x + 7z = -17 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 3x + 2z = -7 \\ 8x + 7z = -17 \end{cases} \begin{matrix} || \cdot (-7) \\ || \cdot (2) \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} -21x - 14z = +49 \\ 16x + 14z = -34 \end{cases} \\ + & \\ \hline & -5x = 15 \quad || : (-5) \end{aligned}$$

$$x = -3$$

$$\begin{aligned} \text{Sij: } & 3 \cdot (-3) + 2z = -7 \\ & 2z = 2 \\ & z = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sij: } & \begin{matrix} x & & z \\ -3 & - & +1 \end{matrix} = -6 \\ & -y = -4 \\ & y = 4 \end{aligned}$$

$$\text{Vi: } \begin{cases} x = -3 \\ y = 4 \\ z = 1 \end{cases}$$

Sijaitus keino

ESIM 2. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3x - 2y + 3z = 2 \\ -2x + 2y - 2z = -4 \\ z = 2x + 4y - 1 \end{cases} \quad \text{Sij}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y + 3(2x + 4y - 1) = 2 \\ -2x + 2y - 2(2x + 4y - 1) = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x - 2y + 6x + 12y - 3 = 2 \\ -2x + 2y - 4x - 8y + 2 = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x + 10y = 5 \\ -6x - 6y = -6 \end{cases} \quad \text{Sij} \quad \begin{array}{l} -6x - 6y = -6 \quad || :(-6) \\ x + y = 1 \\ y = 1 - x \end{array}$$

$$9x + 10(1 - x) = 5$$

$$9x + 10 - 10x = 5$$

$$-x = -5$$

$$x = 5$$

$$\text{Siis } y = 1 - 5 = -4$$

$$\text{ja } z = 2 \cdot 5 + 4 \cdot (-4) = 1$$

$$= 10 - 16 - 1 = -7$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V: \\ x = 5 \\ y = -4 \\ z = -7 \end{array} \right.$$

$$x = 5, y = -4, z = -7$$

$$x = 5 \text{ tai } y = -4 \text{ tai } z = -7$$

Yhtälöitä enemmän kuin muuttujia

Ratkaisuja voi olla nolla, yksi tai ääretön määrä.

ESIM 3. Ratkaise yhtälöryhmä a) $\begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ y = 2x - 4 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ 4x - y = 4 \\ 8x + 3y = -2 \end{cases}$ (I)
(II)
(III)

a)

$$\begin{aligned} 2x - 2(2x - 4) &= 4 \\ 2x - 4x + 8 &= 4 \\ -2x &= -4 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$y = 2 \cdot 2 - 4 = 0$$

sij. kolmanteen yhtälöön

$$2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 6$$

$$4 = 6$$

epätosi

V: Ei ratkaisua

$$\begin{aligned} &+ \begin{cases} 2x + y = -1 \\ 4x - y = 4 \end{cases} \\ \hline \end{aligned}$$

$$6x = 3$$

$$x = \frac{1}{2}$$

sij. $\rightarrow$ (I)

$$2 \cdot \frac{1}{2} + y = -1$$

$$y = -2$$

sij. $x, y \rightarrow$ (III) :

$$8 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot (-2) = -2$$

$$4 - 6 = -2$$

$$-2 = -2$$

tosi

V: $x = \frac{1}{2}, y = -2$

Yhtälöitä vähemmän kuin muuttujia

Ratkaisuja on ääretön määrä tai ei yhtään.

ESIM 4. Ratkaise yhtälöryhmä
$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ \frac{x}{3}-\frac{2}{3}y-\frac{z}{3}=0 \end{cases}$$

$\parallel \cdot 3$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y-z=0 \end{cases} \\ \hline \end{array}$$

$$2x - y = 1$$

$$y = 2x - 1$$

sij $\rightarrow$ (I) :

$$x + 2x - 1 + z = 1$$

$$z = -3x + 2$$

sij $\rightarrow$ (II) :

$$x - 2(2x - 1) - (-3x + 2) = 0$$

$$x - 4x + 2 + 3x - 2 = 0$$

$$0 = 0$$

+ asi,

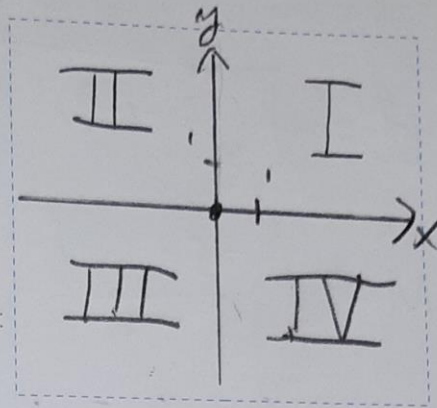
$$V: \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 2x - 1 \\ z = -3x + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a, & a \in \mathbb{R} \\ y = 2a - 1 \\ z = -3a + 2 \end{cases}$$

2.1. Tason koordinaatisto

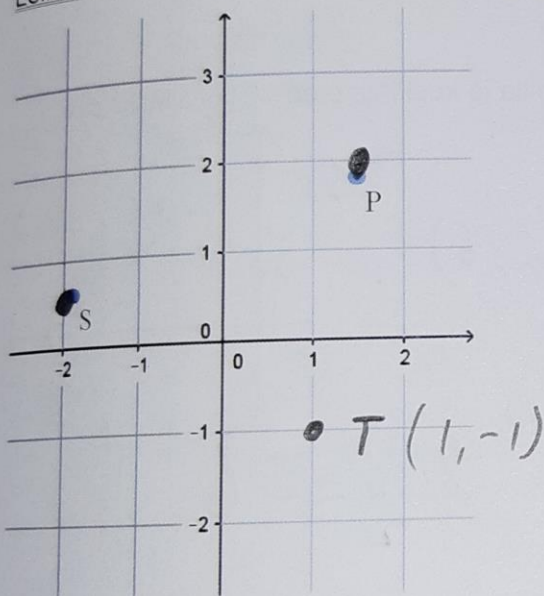
Kartesinen eli suorakulmainen koordinaatisto eli xy-koordinaatisto

- Akselit: x-akseli ja y-akseli
- Akselien leikkauspiste (0,0) on origo
- x-akselilla $y = 0$ eli pisteet muotoa $(x, 0)$
- y-akselilla $x = 0$ eli pisteet muotoa $(0, y)$
- Akselit jakavat tason neljään osaan (neljännekseen): I, II, III, IV



Pisteen sijainti tasossa ilmoitetaan kahden koordinaatin x ja y (ordinaatta ja abskissa) avulla ts. piste muotoa (x, y)

ESIM 1. a) $P = (x, y) = (1,5; 2)$ b) $S = (-2; 0,5)$ c) Piirrä piste $T(1, -1)$

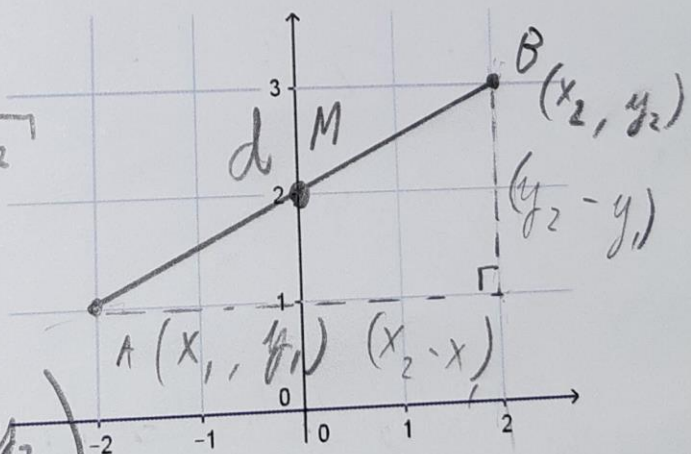


Pisteiden $A(x_1, y_1)$ ja $B(x_2, y_2)$ välinen etäisyys eli janan AB pituus

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Janan AB keskipiste M:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$



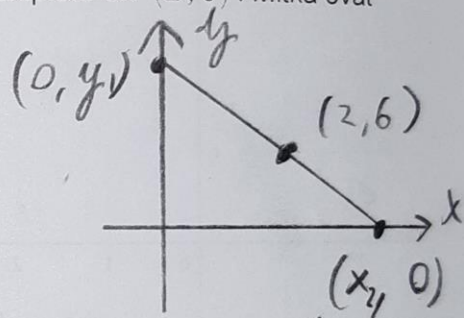
ESIM 1. Janan päätepisteet ovat $A(-5, 3)$ ja $B(-1, -2)$. Laske janan pituus ja keskipiste.

$$d = \sqrt{(-5 - (-1))^2 + (3 - (-2))^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$$

$$M = \left(\frac{-5 + (-1)}{2}, \frac{3 + (-2)}{2} \right) = \left(\frac{-6}{2}, \frac{1}{2} \right) = \left(-3, \frac{1}{2} \right)$$

ESIM 2. Janan päätepisteet ovat koordinaattiakseleilla ja keskipiste on $(2, 6)$. Mitkä ovat päätepisteiden koordinaatit?

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = (2, 6)$$



$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 2$$

$$\parallel x_1 = 0$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = 6$$

$$\parallel y_2 = 0$$

$$\frac{x_2}{2} = 2$$

$$x_2 = 4$$

$$\frac{y_1}{2} = 6$$

$$y_1 = 12$$

V: Päätepisteiden koord. ovat $(0, 12)$ ja $(4, 0)$

202, 203, 205, 206

2.2. Käyrän yhtälö

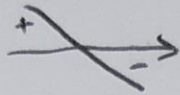
Käyrän eli pistejoukon yhtälö on muuttujien x ja y yhtälö, jolla on ominaisuus:

Piste (x,y) on käyrän piste, jos ja vain jos sen koordinaatit toteuttavat käyrän yhtälön ts. antavat saman arvon yhtälön oikealta ja vasemmalta lausekkeelta.

Esim. Käyrän yhtälöitä

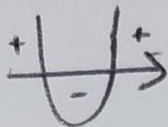
1) $y = -2x + 3$

kuvaaja:



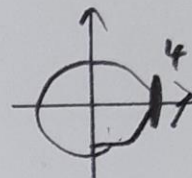
2) $y = x^2 + 3x + 4$

kuvaaja:



3) $x^2 + y^2 = 4^2$

kuvaaja: origokeskinen ympyrä, jonka säde on 4



Käyrät leikkaavat toisensa leikkauspisteissä (käyrien yhteisiä pisteitä), jotka saadaan määntettyä yhtälöparilla (tai yhtälöryhmällä).

Käyräparvi on useamman käyrän muodostama joukko. Yhteinen yhtälö annetaan parametrin avulla.

Esim. Käyräparvi $y = x^2 + 2x + c$

Kun $c = 1$, niin $y = x^2 + 2x + 1$

Kun $c = -5$, niin $y = x^2 + 2x - 5$

ESIM 1. Tutki, onko piste $(3, 5)$ käyrällä $x^2 = xy$. Entä piste $(0, 5)$?

Piste $(3, 5)$: eli $x = 3$, $y = 5$:

$$3^2 = 3 \cdot 5$$

$$9 = 15$$

epätosi $\Rightarrow$ ei käyrällä

Piste $(0, 5)$:

$$0^2 = 0 \cdot 5$$

$$0 = 0$$

tosi $\Rightarrow$ on käyrällä

ESIM 2. Osoita, että käyrät $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$ ja $(x-3)(y-2) = 6$ leikkaavat origossa.

Origossa $x=0$, $y=0$. Sij: $x=0$;

$$(0-3)^2 + (y-4)^2 = 25$$

$$9 + y^2 - 8y + 16 = 25$$

$$y^2 - 8y = 0$$

$$y(y-8) = 0$$

$$y=0 \text{ tai } y-8=0$$

$$\underline{y=0} \text{ tai } y=8$$

$$(0-3)(y-2) = 6$$

$$-3y + 6 = 6$$

$$-3y = 0$$

$$\underline{y=0}$$

Molemmat kirkkaat pisteet $(0,0)$ kautta,
siis leikkaavat origossa.

ESIM 3. Määritä vakiot k , joilla piste $(k, 2k+1)$ on paraabelilla $y=x^2-2$

$$x=k, y=2k+1$$

$$2k+1 = k^2 - 2$$

$$k^2 - 2k - 3 = 0 \quad \Delta = 4 - 1 \cdot (-3)$$

$$k = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$k = \frac{2+4}{2} = 3 \quad \text{tai} \quad k = \frac{2-4}{2} = -1$$