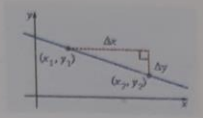
3.1. Suoran suunta

Kulmakerroin

Suoran kaltevuuden eli jyrkkyyden määrää sen kulmakerroin k.

Kahden pisteen (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) kautta kulkevan suoran kulmakerroin:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



MAOL!

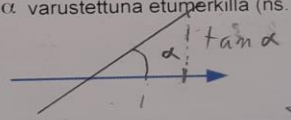
HUOM!

- Kun k > 0, suora on nouseva
- Kun k < 0, suora on laskeva
- Kun k = 0, suora on vaakasuora $y = c$
- Kun suoralla ei ole kulmakerrointa, niin suora on pystysuora $x = c$
- Mitä suurempi on kulmakertoimen itseisarvo, sitä jyrkemmin suora nousee tai laskee

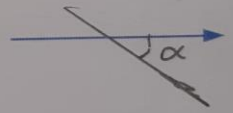
Suuntakulma

Suoran jyrkkyys voidaan ilmasta myös suuntakulman α avulla. Suuntakulma on suoran ja positiivisen x-akselin välinen terävä kulma α varustettuna etumerkillä (ns. suunnattu kulma).

- Nousevan suoran α on positiivinen



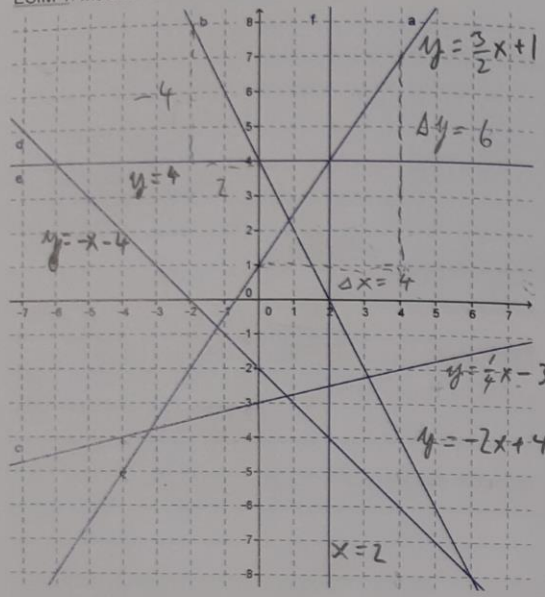
- Laskevan suoran α on negatiivinen



kulmakertoimen ja suuntakulman yhteys

$$k = \tan \alpha$$

ESIM 1. Määritä suorien kulmakertoimet.



a) $k = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

b) $k = \frac{-4}{2} = -2$

c) $k = \frac{1}{4}$

d) $k = \frac{-1}{1} = -1$

e) $k = 0$

f) ei kulmab.
$x = 2$

ESIM 2. Määritä pisteiden $(-2, 9)$ ja $(6, -15)$ kautta kulkevan suoran a) kulmakerroin, b) suuntakulma ja c) se, onko piste $A(23, -61)$ tällä suoralla.

a) $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-15 - 9}{6 - (-2)} = \frac{-24}{8} = -3$

b) $k = \tan\alpha$

$\alpha = \arctan(k) = \arctan(-3) = -71{,}56\ldots^\circ \approx -72^\circ$

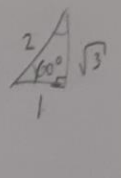
c) $k = \frac{-61 - 9}{23 - (-2)} = \frac{-70}{25} \neq -3$

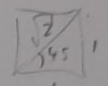
Piste ei ole suoralla

ESIM 3. Määritä suoran kulmakerroin, kun suoran suuntakulma on 60° ja –60°.

$k = \tan(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

$k = \tan(-60)^\circ = -\sqrt{3}$





ESIM 4. Suora kulkee pisteiden $(2, a)$ ja $(1, \underbrace{a^2 - a - 3}_{y_2})$ kautta. Millä parametrin a arvolla suora on a) nouseva, b) laskeva?

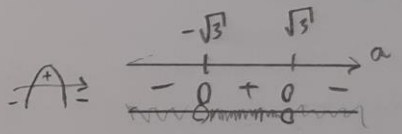
a) $k = \frac{a^2 - a - 3 - a}{1 - 2}$

$= \frac{a^2 - 3}{-1} = -a^2 + 3 > 0$

$-a^2 + 3 = 0$

$a^2 = 3$

$a = \pm\sqrt{3}$



a) V: kun $-\sqrt{3} < a < \sqrt{3}$

b) V: kun $a < -\sqrt{3}$ tai $a > \sqrt{3}$

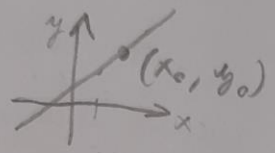
3.2. Suoran yhtälö

Olkoon suora, joka kulkee pisteen (x_0, y_0) kautta ja olkoon sen kulmakerroin k. Laske suoran kulmakerroin, kun suora kulkee pisteen (x, y) kautta.

$$k = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Tämä voidaan kirjoittaa **suoran yhtälönä** muodossa

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$



Pystysuoran suoran (jolla ei ole kulmakerrointa) yhtälö on $x = x_0$

Vaakasuoran suoran (k = 0) yhtälö on $y = y_0$

Suoran yhtälön ratkaistu muoto

$$y = kx + b$$

$y = k(x - x_0) + y_0$

$= kx - kx_0 + y_0$

k = kulmakerroin

b = vakiotermi (suoran ja y-akselin leikkauspisteen y-koordinaatti: (0, b))

Suoran yhtälön yleinen muoto eli normaalimuoto

$$ax + by + c = 0$$

missä $a \neq 0 \text{ tai } b \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$

HUOM! Jos piste (x_1, y_1) on suoralla, niin pisteen koordinaatit toteuttavat suoran yhtälön!

ESIM 1. Muodosta suoran yhtälö, kun sen kulmakerroin on 4 ja se kulkee pisteen $(2, -3)$ kautta. Tutki, onko piste $(15, 49)$ suoralla.

$k = 4 \quad x_0 = 2, \quad y_0 = -3$

$y - (-3) = 4(x - 2)$

$y + 3 = 4x - 8$

$y = 4x - 11$

$x = 15$

$y = 49$

$49 = 4 \cdot 15 - 11$

$49 = 49$

suoralla

ESIM 2. Mikä on pisteiden $(2, -3)$ ja $(5, 1)$ kautta kulkevan suoran yhtälö?

$$k = \frac{-3 - 1}{2 - 5} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

$y - 1 = \frac{4}{3}(x - 5)$

$y = \frac{4}{3}x - \frac{20}{3} + \frac{3}{3}$

$y = \frac{4}{3}x - \frac{17}{3}$

ESIM 3. Missä pisteissä suora $2x - y - 2 = 0$ leikkaa koordinaattiakselit?

$2 \cdot 0 - y_0 - 2 = 0$

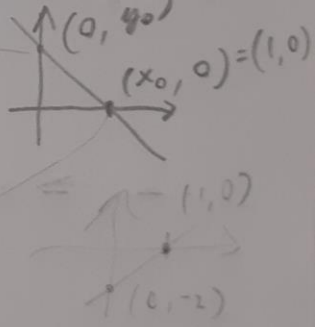
$y_0 = -2$

$\Rightarrow (0, -2)$

$2 \cdot x_0 - 0 - 2 = 0$

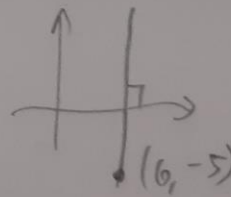
$x_0 = 1$

$\Rightarrow (1, 0)$



ESIM 4. Määritä pisteen $(6, -5)$ kautta kulkevan suoran yhtälö. Suoran suuntakulma on 90°.

$x = 6$



ESIM 5. Määritä suoran $6x-9y-5=0$ suuntakulma.

$k = \tan\alpha$

$\alpha = \arctan(k)$

$= \arctan\left(\frac{2}{3}\right)$

$= 33{,}69\ldots^\circ \approx 34^\circ$

$6x-9y-5=0$

$-9y = -6x+5$

$y = \frac{-6}{-9}x - \frac{5}{9}$

$y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{9}$

ESIM 6. Määritä suoralta $2x-y+3=0$ sellaiset pisteet, että niiden etäisyys pisteestä $(-2,4)$ on $5\sqrt{2}$.

+. Suoran piirtäminen

Tapa 1: Annetaan x:lle sopivia arvoja ja lasketaan vastaavat y:n arvot suoran yhtälöstä $y=kx+b$. Kaksi pistettä määrää suoran, mutta kolmas piste kannattaa laskea tarkastukseksi.

Tapa 2: Katsotaan suoran yhtälöstä $y=kx+b$ seuraavat tiedot:

- y-akselin leikkauspiste on b
- kulmakerroin k = k

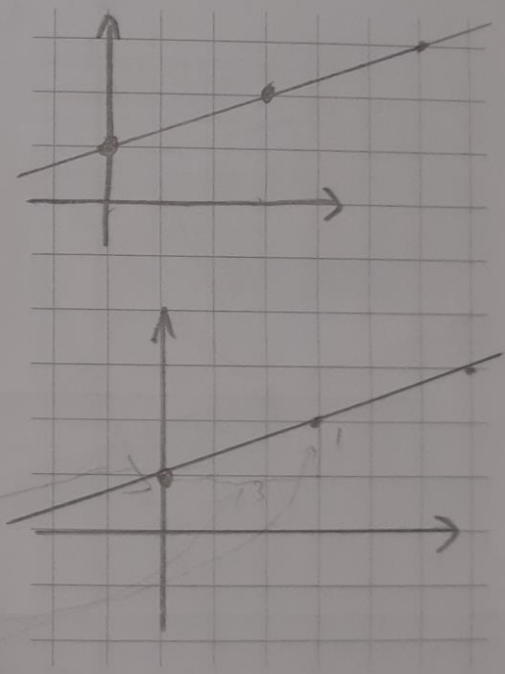
ESIM 1. Piirrä suora $y=\frac{x}{3}+1$.

x	$y=\frac{x}{3}+1$
0	$y=\frac{0}{3}+1=1$
1	$y=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$
3	$y=\frac{3}{3}+1=2$
6	$y=3$

TAPA 2.

$b=1$

$k=\frac{1}{3}$



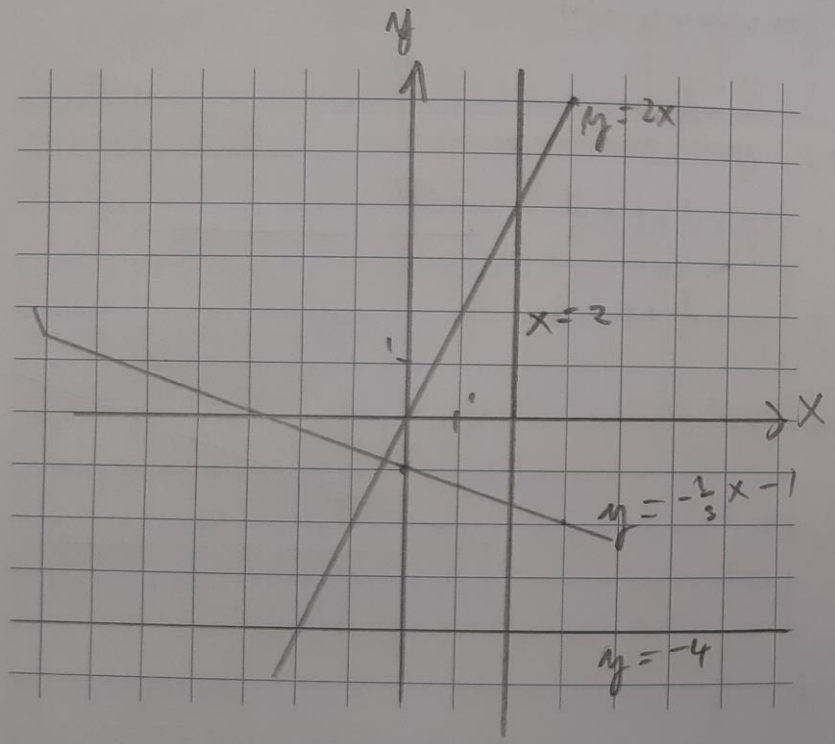
ESIM 2. Piirrä suorat

a) $y=2x$

b) $x+3y+3=0$ $\quad 3y=-x-3 \quad y=-\frac{1}{3}x-1$

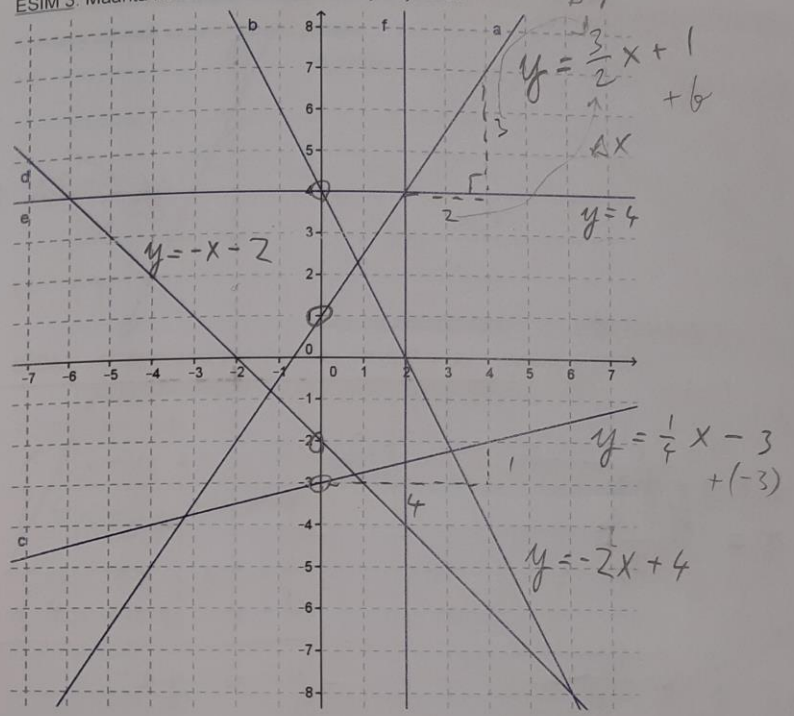
c) $x-2=0$ $\quad x=2$

d) $y=-4$



HUOM! Jos suoran yhtälössä kertoimet ovat suuria lukuja (esim $2x-5y=2000$), kannattaa suoran piirtämistä varten laskea *x*- ja *y*-akselin leikkauspisteet.

ESIM 3. Määritä kuvan avulla suorien a, b ja c yhtälöt.



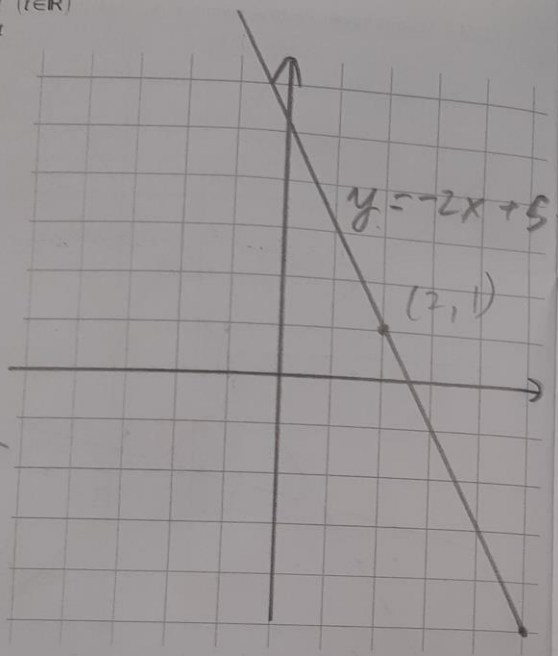
ESIM 4. Piirrä käyrä $\begin{cases} x = 3t+2 \\ y = 1-6t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

$t=0$:

$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

$t=1$:

$\begin{cases} x = 3\cdot 1 + 2 = 5 \\ y = 1 - 6\cdot 1 = -5 \end{cases}$



$x = 3t + 2$

$t = \frac{x-2}{3}$

$\rightarrow$

$y = 1 - 6 \cdot \frac{x-2}{3}$

$y = 1 - 2x + 4$

$y = -2x + 5$

327

330

335

Kattiin

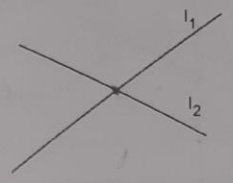
338

554

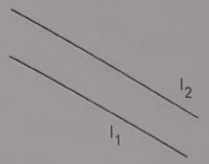
3.3. Suorien leikkauspiste ja välinen kulma

Kahdella suoralla voi olla yhteisiä pisteitä

yksi



ei yhtään



ääretön määrä

yhdensuuntaiset suorat (yhtyvät suorat)

ESIM 1. a) Määritä suorien $2x+y+1=0$ ja $4x+5y-4=0$ leikkauspiste.

b) Kulkeeko suora $2x+3y-3=0$ leikkauspisteen kautta?

a) Yhtälöparin avulla

$\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ 4x+5y-4=0 \end{cases}$ $\quad | \cdot 2$

$\begin{cases} 4x+2y+2=0 \\ -(4x+5y-4=0) \end{cases}$

$-3y+6=0$

$y=2$

$2x+2+1=0$

$x=-\frac{3}{2}$

V: $(-\frac{3}{2}, 2)$

b) Sijoitetaan $(-\frac{3}{2}, 2)$ suoran $2x+3y-3=0$ yhtälöön:

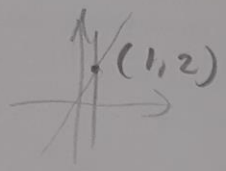
$2\cdot\left(\frac{-3}{2}\right) + 2\cdot 2 - 3 = 0$

$-3 + 4 - 3 = 0$

$-2 = 0$

epätosi $\Rightarrow$ ei kulje

ESIM 2. Osoita, että suora $(c^2+1)x-c^2y+c^2-1=0$ (suoraparvi) kulkee saman pisteen kautta kaikilla vakion c arvoilla.



$c=0$:

$(0^2+1)x-0^2y+0^2-1=0$

$1x-1=0$

$x=1$

$c=1$:

$(1^2+1)x-1^2y+1^2-1=0$

$2x-y=0$

$\begin{cases} x=1 \\ 2x-y=0 \end{cases} \Rightarrow 2\cdot 1-y=0$

$y=2$

Siis (1,2) suoraparveen:

$(c^2+1)\cdot 1-c^2\cdot 2+c^2-1=0$

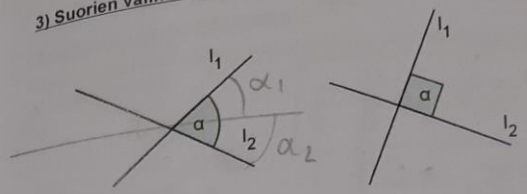
$c^2+1-2c^2+c^2-1=0$

$0=0$

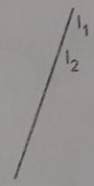
tosi

Siis piste (1,2) on jokaisella suoralla eli suoraparvi kulkee pisteen (1,2) kautta kaikilla vakion c arvoilla.

3) Suorien välinen kulma $0^\circ \le \alpha \le 90^\circ$



kohtisuorat



(yhtyvät suorat)

Suorien välinen kulma voidaan ratkaista

1) suuntakulman avulla (ESIM 2.) $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ $(k_1 = \tan\alpha_1)$

2) yhtälöllä $\tan\alpha = \left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|$

HUOM! Kaavaa ei voi käyttää, jos suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan tai toisella ei ole kulmakerrointa!

ESIM 1. Laske suorien $y=4x-8$ ja $3x+4y-2=0$ välinen kulma.

$k_1 = 4$

$4y = -3x+2$

$y = -\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$

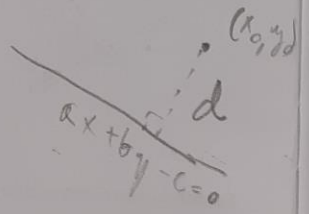
$\Rightarrow k_2 = -\frac{3}{4}$

$$\tan\alpha = \left|\frac{4-(-\frac{3}{4})}{1+4\cdot(-\frac{3}{4})}\right| = \left|\frac{\frac{19}{4}}{-2}\right| = \frac{19}{8}$$

$\alpha = \arctan\left(\frac{19}{8}\right) = 67{,}166\ldots^\circ \approx 67{,}2^\circ$

Pisteen (x_0, y_0) etäisyys suorasta $ax + by + c = 0$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



ESIM 2. Laske pisteen $P = (-4, 3)$ etäisyys suorasta $y = -2x + 5$.

ESIM 2. Suora kulkee pisteen $(1, -3)$ kautta ja muodostaa 30° kulman suoran $y = \sqrt{3}x - 5$ kanssa.

Suora on $2x + y - 5 = 0$

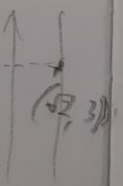
$a = 2,\ b = 1,\ c = -5$

$$d = \frac{|2 \cdot (-4) + 1 \cdot 3 - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{\sqrt{5}^2} = 2\sqrt{5}$$

B) Entä suorasta $x = \sqrt{2}$?

$1x + 0y - \sqrt{2} = 0$

$$d = |-4 - \sqrt{2}| = -(-4 - \sqrt{2}) = 4 + \sqrt{2}$$



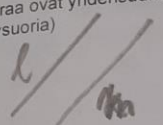
TAI

$$d = \frac{|1 \cdot (-4) + 0 \cdot 3 - \sqrt{2}|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = |-4 - \sqrt{2}| = 4 + \sqrt{2}$$

3.4. Suorien kohtisuoruus

1) Suorien yhdensuuntaisuus

Kaksi suoraa ovat yhdensuuntaiset jos ja vain jos niillä on sama kulmakerroin (tai molemmat ovat pystysuoria)



$$l \parallel m \Leftrightarrow k_l = k_m$$

ESIM 1. Tutki suorien $y = 3x - 4$, $6x + 2y = 3$ ja $-2y = -6x - 3$ yhdensuuntaisuutta.

$k_1 = 3$

$6x + 2y = 3$

$y = -3x + \frac{3}{2} \Rightarrow k_2 = -3$

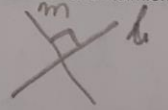
$-2y = -6x - 3$

$y = 3x + \frac{3}{2} \Rightarrow k_3 = 3$

V: Suorat $y = 3x - 4$ ja $-2y = -6x - 3$ yhdensuunt.

2) Suorien kohtisuoruus

Kaksi suoraa on kohtisuorassa toisiaan vastaan (eli toistensa normaaleja), jos ja vain jos niiden kulmakerrtoimien tulo on -1 (tai suorat ovat koordinaattiakselien suuntaiset).



$$l \perp m \Leftrightarrow k_l k_m = -1$$

ESIM 2. Tutki suorien $y = 2x + 3$, $y = \frac{1}{2}x - 1$ ja $y = -\frac{1}{2}x + 2$ kohtisuoruutta.

$k_1 = 2 \qquad k_2 = \frac{1}{2} \qquad k_3 = -\frac{1}{2}$

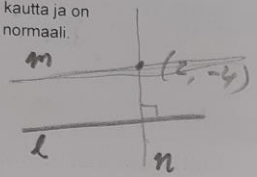
$k_1 k_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

$k_1 k_3 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \Rightarrow$ Suorat 1 ja 3 kohtisuorassa

$k_2 k_3 = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$

HUOM! Janan keskinormaali on suora, joka kulkee janan keskipisteen kautta ja on kohtisuorassa janaa vastaan.

ESIM 3. Määritä suoran yhtälö, kun se kulkee pisteen $(2,-4)$ kautta ja on suoran $3x+5y-35=0$ a) kanssa yhdensuuntainen b) normaali.



$3x+5y-35=0$

$5y=-3x+35$

$y=-\frac{3}{5}x+7$

a) $y-y_0=k(x-x_0)$ // s.j. $k=-\frac{3}{5}$, $x_0=2$, $y_0=-4$

$y=-\frac{3}{5}\cdot x-(-\frac{3}{5})\cdot 2+(-4)$

$=-\frac{3}{5}x-\frac{14}{5}$

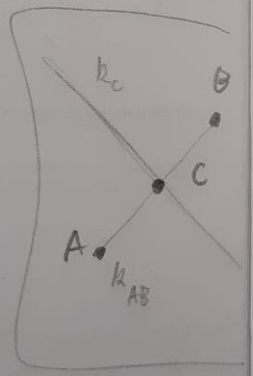
b) $k_l=-\frac{3}{5}$ $\quad k_n=?$

$k_l k_n=-1$

$k_n=-\frac{1}{k_l}=-\frac{1}{-\frac{3}{5}}=\frac{5}{3}$

s.j. $k=\frac{5}{3}$, $x_0=2$, $y_0=-4$

$y=\frac{5}{3}x-\frac{5}{3}\cdot 2+(-4)=\frac{5}{3}x-\frac{22}{3}$



4.1. Ympyrän keskipistemuotoinen yhtälö

Ympyrän kehän piste (x,y) on säteen etäisyydellä keskipisteestä (x_0,y_0):

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

Ympyrän yhtälö keskipistemuodossa:

missä (x_0,y_0) on keskipiste ja r on säde.

ESIM 1. Määritä ympyrän yhtälö, kun keskipiste on $(3,-5)$ ja säde 2.

$(x-3)^2+(y-(-5))^2=2^2$

$x^2-6x+9+x^2+10x+25=4$

$2x^2+4x+30=0$

ESIM 2. Määritä ympyrän keskipiste ja säde

a) $(x-5)^2+(y+6)^2=30$ $\quad (x-5)^2+(y-(-6))^2=\sqrt{30}^2$

$x_0=5$ $\quad r^2=30$

$y_0=-6$ $\quad r=\pm\sqrt{30}=\sqrt{30}$

V: $(5,-6)$, $r=\sqrt{30}$

b) $x^2+y^2=25$

$(x-0)^2+(y-0)^2=5^2$

$x_0=0$

$y_0=0$

$r=5$

V: $(0,0)$, $r=5$

ESIM 4. Määritä sen ympyrän yhtälö, jonka halkaisijan päätepisteet ovat $(1,2)$ ja $(-3,4)$.

$M = \left(\frac{1+(-3)}{2}, \frac{2+4}{2}\right) = \left(\frac{-2}{2}, \frac{6}{2}\right) = (-1, 3)$

$d = \sqrt{(1-(-3))^2 + (2-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

ESIM 5. Määritä pisteen $(4,1)$ etäisyys ympyrästä $(x-1)^2+(y-4)^2=4$.

V: $(x-(-1))^2 + (y-3)^2 = \left(\frac{\sqrt{8}}{2}\right)^2$

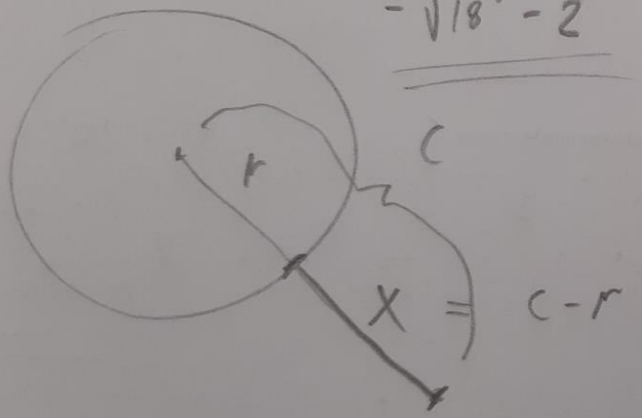
$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 2$

etäisyys ympyrästä on

$X = C - r$

$= \sqrt{(4-1)^2 + (1-4)^2} - 2$

$= \sqrt{18} - 2$



4.2. Ympyrän yhtälö yleisessä muodossa

Ympyrän yhtälö yleisessä muodossa eli normaalimuodossa:

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ missä $a, b, c \in \mathbb{R}$

ESIM 1. Määritä ympyrän yhtälö normaalimuodossa, kun keskipiste on $(3,-5)$ ja säde 2.

$(x-3)^2 + (y+5)^2 = 4$

$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 10y + 25 - 4 = 0$

$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 21 = 0$

$2 \cdot (-3) \cdot x \qquad 2 \cdot 5 \cdot x$

ESIM 2. Määritä ympyrän keskipiste ja säde, kun yhtälö on $x^2+y^2-4x-2y+4=0$

$a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \qquad 2 \cdot (-2) \cdot x \qquad 2 \cdot (-1) \cdot y$

$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 2y + 1) - 1 = 0$

$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1^2$

$(2, 1)$, säde 1

ESIM 3. Tutki, esittääkö yhtälö ympyrää.

a) $x^2+y^2-4x-6y+13=0$

b) $4x^2+4y^2+8x-12y-3=0$

a)

$x^2-4x+4+y^2-6y+9=0$

$(x-2)^2+(y-3)^2=0$

Ei esitä $(r=0)$

b)

$4x^2+4y^2+8x-12y-3=0 \quad \| :4$

$x^2+y^2+2x-3y-\frac{3}{4}=0$

$x^2+2x+1+y^2-3y+\frac{9}{4}-\frac{16}{4}=0$

$(x+1)^2+(y-\frac{3}{2})^2=4$

HUOM! Kun muotoa $x^2+y^2+ax+by+c=0$ oleva yhtälö muutetaan muotoon $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=k$, niin vakiosta k voidaan päätellä, mitä yhtälö esittää

- k > 0, niin yhtälö esittää ympyrää (säde $r=\sqrt{k}$)
- k = 0, niin yhtälö esittää pistettä (x_0, y_0)
- k < 0, niin yhtälö ei esitä mitään pistejoukkoa

HUOM! Ympyrän yhtälön muodostamiseen tarvitaan keskipiste ja säde.

ESIM 5. Määritä pisteen $(4,1)$ etäisyys ympyrästä $(x-1)^2+(y-4)^2=4$

ympyrä, kun kehällä on pisteet

$(2,4)$, $(4,2)$, $(0,-3)$.

$x^2+y^2+ax+by+c=0$

$\begin{cases} 2^2+4^2+a\cdot 2+b\cdot 4+c=0 \\ 4^2+2^2+a\cdot 4+b\cdot 2+c=0 \\ 0^2+(-3)^2+a\cdot 0+b\cdot(-3)+c=0 \end{cases}$

$a=-\frac{11}{9}, \quad b=\frac{-11}{9}, \quad c=\frac{-38}{3}$

$x^2+y^2-\frac{11}{9}x-\frac{11}{9}y-\frac{38}{3}=0$

ESIM 6. Millä vakion a arvoilla yhtälö $x^2+y^2-2ax+4=0$ ei esitä ympyrää.

$x^2-2ax+a^2+y^2+4-a^2=0$

$(x-a)^2+(y-0)^2=a^2-4$

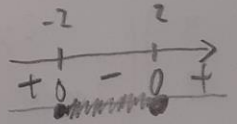
$k \leq 0$

$a^2-4 \leq 0$

$a^2-4=0$

$a^2=4$

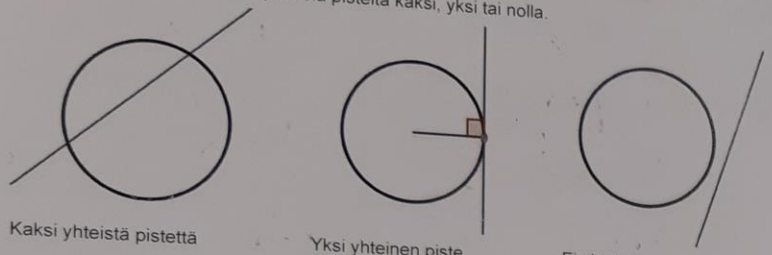
$a=\pm 2$



$-2 \leq a \leq 2$, niin yhtälö ei esitä ympyrää

4.3. Ympyrä ja suora

Suoralla ja ympyrällä voi olla yhteisiä pisteitä kaksi, yksi tai nolla.



Kaksi yhteistä pistettä

Yksi yhteinen piste
Tangentti on
- kohtisuorassa sädettä vasten
- säteen etäisyydellä keskipisteestä

Ei yhteisiä pisteitä.

ESIM 1. Määritä suoran $x+3y-2=0$ ja ympyrän $x^2+y^2-2x+4y=0$ yhteiset pisteet.

$$\begin{cases} x+3y-2=0 \\ x^2+y^2-2x+4y=0 \end{cases} \Rightarrow x = -3y+2$$

$$(-3y+2)^2+y^2-2(-3y+2)+4y=0$$

$$10y^2-2y=0$$

$$2y(5y-1)=0$$

$$2y=0 \quad \text{tai} \quad 5y-1=0$$

$$y=0 \quad \text{tai} \quad y=\frac{1}{5}$$

$$x=-3\cdot 0+2=2 \qquad x=-3\cdot\frac{1}{5}+2=\frac{7}{5}$$

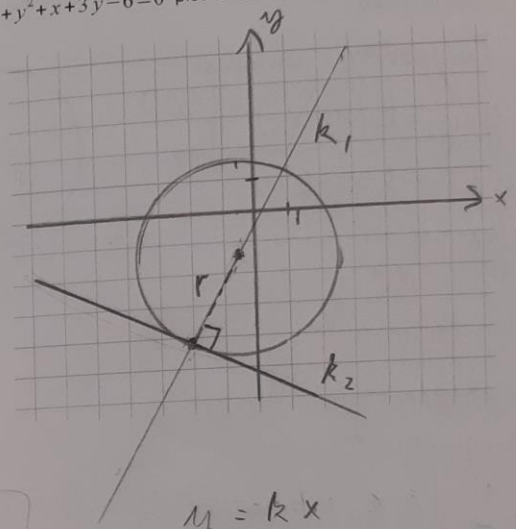
$$(2,0) \qquad \left(\frac{7}{5},\frac{1}{5}\right) \text{ tai } (1{,}4;\ 0{,}2)$$

ESIM 2. (H726) Määritä ympyrän $x^2+y^2+x+3y-6=0$ pisteeseen $(-2,-4)$ piirretyn tangentin yhtälö.

$$x^2+x+y^2+3y=6$$

$$x^2+x+\tfrac{1}{4}+y^2+3y+\tfrac{9}{4}=6$$

$$\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\tfrac{3}{2}\right)^2=\tfrac{24}{4}$$



$$k_1=\frac{-\frac{3}{2}-(-4)}{-\frac{1}{2}-(-2)}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{5}{3}$$

$$\perp \Rightarrow k_1\cdot k_2=-1$$

$$k_2=-\frac{1}{k_1}=-\frac{3}{5}$$

$y=kx$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot x$

$$y-y_0=k(x-x_0) \qquad \begin{vmatrix} x_0=-2 \\ y_0=-4 \end{vmatrix}, \quad k=-\frac{3}{5}$$

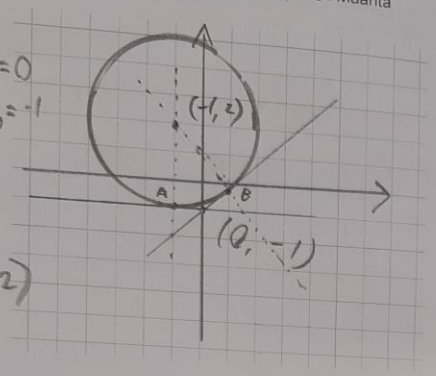
$$y=-\frac{3}{5}x-\frac{3}{5}\cdot(-(-2))+(-4)$$

$$=-\frac{3}{5}x-\frac{26}{5}$$

$$y=-\frac{3}{5}x-\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot(-2)+(-4)$$

$kx - k\cdot x_0 + y_0$

ESIM 3. Pisteestä $(0,-1)$ piirretään tangentti ympyrälle $(x+1)^2+(y-2)^2=8$. Määritä tangentin yhtälö.



Tangentteja on kaksi:

$y-y_0=k(x-x_0)$ $\quad \| x_0=0,\ y_0=-1$

$y+1=kx-k\cdot 0$

$-kx+y+1=0$

eli $y=kx-1$

mahd. kaksi arvoa $(x_0, y_0)=(-1,2)$

Keskipisteen etäisyys tangentista on

$r=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\quad \| \ r=\sqrt{8},\ x_0=-1,\ y_0=2$ $\quad a=-k,\ b=+1,\ c=+1$

$\sqrt{8}=\dfrac{|-k\cdot(-1)+1\cdot 2+1|}{\sqrt{(-k)^2+1^2}}$ $\quad \| \ ()^2$, mol. puol. ≥ 0

$8=\dfrac{(k+3)^2}{k^2+1}$ $\quad \| \cdot(k^2+1)$

$8k^2+8=k^2+6k+9$

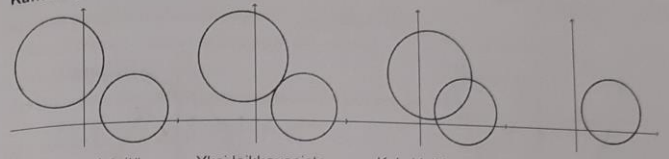
$7k^2-6k-1=0$

$k=\dfrac{6\pm\sqrt{36-4\cdot 7\cdot(-1)}}{2\cdot 7}=\dfrac{6\pm 8}{14}$

$k=\dfrac{14}{14}=1$ tai $k=\dfrac{-2}{14}=-\dfrac{1}{7}$

V: $y=x-1$ tai $y=-\frac{1}{7}x-1$

Kahden ympyrän yhteiset pisteet



Ei leikkauspisteitä. | Yksi leikkauspiste. | Kaksi leikkauspistettä | Ääretön määrä leikkauspisteitä (samat ympyrät)

ESIM 7. Missä pisteissä ympyrät $x^2+y^2-4x-4y+4=0$ ja $x^2+y^2+2x+2y-8=0$ leikkaavat.

$\begin{cases} x^2+y^2-4x-4y+4=0 \\ +\ x^2+y^2+2x+2y-8=0 \end{cases}$ $\quad \| :2$

$3x^2+3y^2-12=0$ $\quad \| :3$

$x^2+y^2=4$

$(x-0)^2+(y-0)^2=2^2$

$-\begin{cases} x^2+y^2-4x-4y+4=0 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$

$-4x-4y+4=4$

$-4x-4y=0$

$-4x=4y-8$

$x=-y+2$

$(-y+2)^2+y^2=4$

$y^2-4y+4+y^2=4$

$2y^2-4y=0$

$2y(y-2)=0$

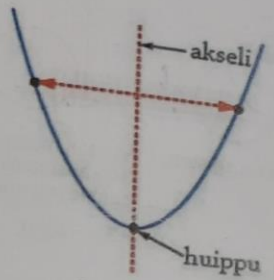
$y=0$ tai $y=2$

sij.

$x=2$ tai $x=0$

V: $(0,2)$ ja $(2,0)$

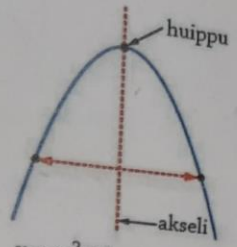
5.1. Paraabelin yhtälö



(x_0, y_0)

$y = ax^2 + bx + c,\ a > 0$

Ylöspäin aukeava paraabeli



$y = ax^2 + bx + c,\ a < 0$

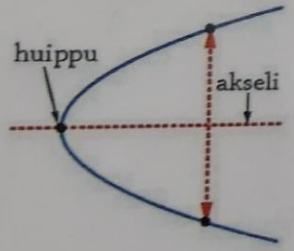
Alaspäin aukeava paraabeli

tai huippumuodossa

$$y - y_0 = a(x - x_0)^2$$

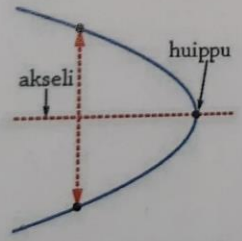
$$y = ax^2 - 2ax_0x + (ax_0^2 + y_0)$$

$+b$ $\quad$ c



$x = ay^2 + by + c,\ a > 0$

Oikealle aukeava paraabeli



$x = ay^2 + by + c,\ a < 0$

Vasemmalle aukeava paraabeli

tai huippumuodossa

$$x - x_0 = a(y - y_0)^2$$

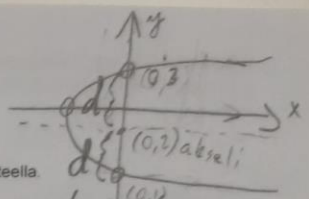
ESIM 1. Tarkastellaan paraabelia $x = y^2 - 4y + 3$.

a) Mihin suuntaan paraabeli aukeaa? oikealle

b) Missä pisteissä paraabeli leikkaa x- ja y-akselit?

c) Määritä paraabelin huippu.

d) Hahmottele paraabeli koordinaatistoon kohtien a–c perusteella.



b) y-akseli $(x=0)$:

$0 = y^2 - 4y + 3$

$y = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$

$y = 3$ tai $y = 1$

pisteissä $(0,3)$ ja $(0,1)$

x-akseli $(y=0)$:

$x = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3$

$x = 3$

Pisteessä $(3,0)$

c) d on puolet pisteiden $(0,3)$ ja $(0,1)$ etäisyydestä 2.

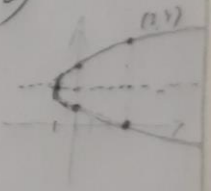
$d = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Huipun y-koordinaatti on 2

$x = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$

pisteessä $(-1, 2)$ on huippu.

d)



ESIM 2. Tarkastellaan käyrää $y - 2 = (x - 1)^2$

a) Perustele, miksi käyrä on paraabeli, ja määritä sen aukeamissuunta.

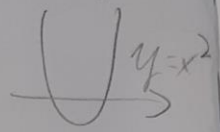
b) Määritä paraabelin huippu.

a) $y - 2 = 1(x - 1)^2$

Huippumuodossa $y - y_0 = a(x - x_0)^2$

olevia paraabeli:,

$a = 1 > 0$, aukeaa ylös



b) Huippu on $(2, 1)$ (vrt. (x_0, y_0))

ESIM 3. Vaakasuuntaan aukeavan paraabelin huippu on pisteessä (1, 2), ja paraabeli kulkee pisteen (−2, 3) kautta. Määritä paraabelin yhtälö ratkaistussa muodossa $x = ay^2 + by + c$.

$x - x_0 = a(y - y_0)^2$ ||sij $x_0 = 1$, $y_0 = 2$

$x - 1 = a(y - 2)^2$ ||sij $x = -2$, $y = 3$

$-2 - 1 = a(3 - 2)^2$

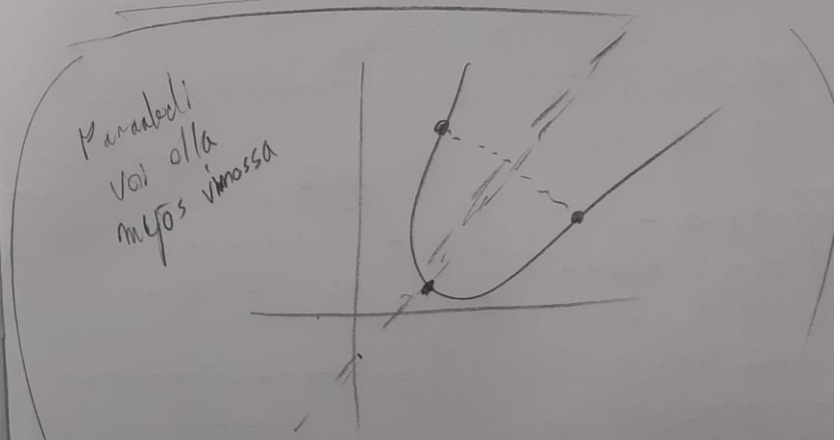
$-3 = a$

sij: $a = -3$:

$x - 1 = -3(y - 2)^2$

$x = -3(y^2 - 2y + 4) + 1$

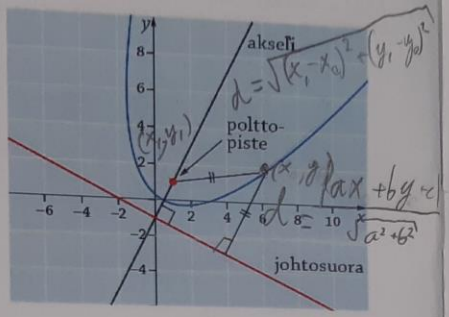
$x = -3y^2 + 6y - 11$



5.2. Paraabelin määritelmä ja sovelluksia

Paraabeli on niiden tason pisteiden joukko, jotka ovat yhtä etäällä kiinteästä suorasta ja yksittäisestä pisteestä, joka ei ole suoralla.

Näitä kutsutaan **johtosuoraksi** ja **polttopisteeksi.**



ESIM 1. Paraabelin polttopiste on (3, 3) ja johtosuora x-akseli. Määritä paraabelin yhtälö.

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2} = \frac{|y|}{\sqrt{1^2}} \quad \| ()^2$$

$x_1 = 3$, $y_1 = 3$, $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$

$0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 = 0$

$ax + by + c = 0$

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = y^2$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 = y^2$$

$$-6y = -x^2 + 6x - 18$$

$$y = \frac{1}{6}x^2 - x + 3$$

ESIM 2. Paraabeli kulkee pisteiden (−4, −1), (−3, 2) ja (−2, 1) kautta, ja sen johtosuora on y-akselin suuntainen. Määritä paraabelin yhtälö.

$x = ay^2 + by + c$

$$\begin{cases} -4 = a - b + c & \text{I} \\ -3 = 4a + 2b + c & \text{II} \\ -2 = a + b + c & \text{III} \end{cases}$$

I & III:

$$-\begin{cases} -4 = a - b + c \\ -2 = a + b + c \end{cases}$$

$-2 = -2b \Rightarrow b = 1$

II & III ($b = 1$):

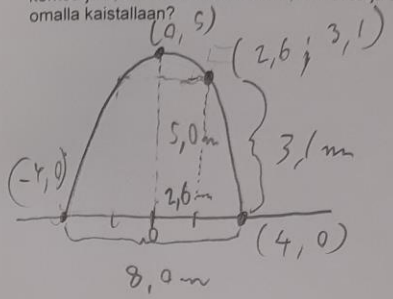
$$-\begin{cases} -3 = 4a + 2 + c \\ -2 = a + 1 + c \end{cases}$$

$-1 = 3a + 1 \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$

I: $c = -4 - a + b = -4 - \left(-\frac{2}{3}\right) + 1 = -\frac{7}{3}$

$$x = -\frac{2}{3}y^2 + y - \frac{7}{3}$$

ESIM 3. Suoran maantietunnelin poikkileikkaus on paraabelin muotoinen. Tunneli on 5,0 m korkea ja 8,0 m leveä. Mahtuuko 2,6 m leveä ja 3,1 m korkea rekka ajamaan tunnelissa omalla kaistallaan?



$y = ax^2 + bx + c$

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 16 - 4b + c \\ 5 = 0 + 0 + c \\ 0 = 16a + 4b + c \end{cases}$$

$a = -\frac{5}{16}$, $b = 0$, $c = 5$

Siis $y = -\frac{5}{16}x^2 + 5 \quad \| \; x = 2{,}6$

$$y = \frac{231}{80} \approx 2{,}8875\ldots$$

Tunneli ei siis ole tarpeeksi korkea rekalle.