

Kpl 7.2 - Geometriaa

Kpl 7.2 - Geometriaa vektoreilla

ESIM1.

Kolmiossa on sivuina samasta pisteestä lähtevät vektorit $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ ja $\vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$. Onko kolmio tasasivuinen?

(kuva, jossa kolmantena sivuna $\vec{w}$)

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} 0 - 4 \\ 5 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} \neq 5$$

V: Ei ole tasasivuinen.

ESIM2.

Piste P jakaa janan AB suhteessa 2 : 3. Määritä P , kun $A = (-2, 2)$ ja $B = (4, 3)$.

(kuva)

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP} = \vec{OA} + \frac{2}{5}\vec{AB}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{2}{5} \begin{bmatrix} 4 - (-2) \\ 3 - 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{2}{5} \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{10}{5} \\ \frac{10}{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{12}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 2,4 \end{bmatrix}$$

V: Piste $P = (0,4; 2,4)$

ESIM3 (kaksi reittiä)

Origosta O alkava vektori $\vec{OP}$ on vektorin $3\vec{i} + \vec{j}$ suuntainen, ja sen kärki P on pisteiden $A = (1, 2)$ ja $B = (7, 1)$ yhdysjanalla. Missä suhteessa piste P jakaa janan AB ? [S04/4]

$$\vec{OP} = \vec{OA} + s\vec{AB}$$

$$r \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3r \\ 1r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 6s \\ 2 - 1s \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3r = 1 + 6s \\ 1r = 2 - 1s \end{cases}$$

8

Solve: $\left\{ \left\{ r = \frac{13}{9}, s = \frac{5}{9} \right\} \right\}$

V: Piste P jakaa janan AB suhteessa 5 : 4.

ESIM4.

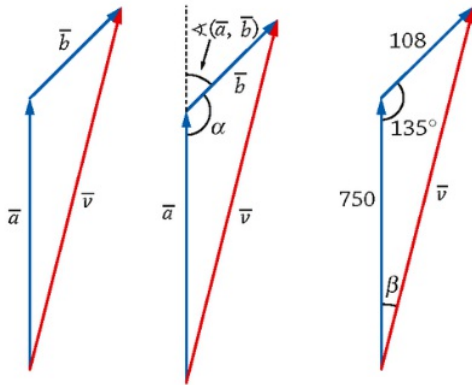


Lentokone lentää tyynessä säässä nopeudella 750 km/h pohjoiseen. Alkaa tuulla lounaasta 30 m/s. Millä nopeudella lentokone

lentää maanpinnan suhteen, jos ohjausta ei muuteta? Ilmoita sekä nopeuden suuruus (vauhti) että kompassisuunta (poikkeama

pohjoissuunnasta myötäpäivään).

$$\vec{v} = 750\vec{j}$$



(näistä kuvista kosinilauseella kuten kirjassa)

Tai lasketaan vektorin $\vec{b} = \vec{u}$ kannat s suorakulmaisesta kolmiosta, jossa hypotenuusana $|\vec{b}|$

$$s^2 + s^2 = (3,6 \cdot 30)^2$$

$$s^2 = \frac{(3,6 \cdot 30)^2}{2}$$

$$s = \sqrt{\frac{(3,6 \cdot 30)^2}{2}}$$

$$= \sqrt{5832}$$

$$\vec{u} = s\vec{i} + s\vec{j}$$

$$= \sqrt{5832} \cdot \vec{i} + \sqrt{5832} \cdot \vec{j}$$

Lentokoneen nopeus on $\vec{v} + \vec{u}$

$$= \sqrt{5832} \cdot \vec{i} + (750 + \sqrt{5832}) \cdot \vec{j}$$

nopeuden suuruus on $|\vec{v} + \vec{u}| = \sqrt{\sqrt{5832}^2 + (750 + \sqrt{5832})^2}$

$$= 829,88... \approx 830$$

suunta:

$$\cos(\vec{u}, \vec{u} + \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v})}{|\vec{u}| |\vec{u} + \vec{v}|}$$

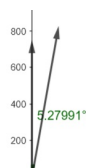
$$\angle(\vec{u}, \vec{u} + \vec{v}) = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v})}{|\vec{u}| |\vec{u} + \vec{v}|}\right)$$

$$\angle(\vec{u}, \vec{u} + \vec{v}) = \arccos\left(\frac{0 + 750 \cdot (750 + \sqrt{5832})}{750 \cdot 829,88...}\right)$$

$$\angle(\vec{u}, \vec{u} + \vec{v}) = 5,2799...^\circ \approx 5,3^\circ$$

TAI suunta:

16	$u := (0, 750)$
$\rightarrow$	$u := \begin{pmatrix} 0 \\ 750 \end{pmatrix}$
17	$v := (\sqrt{5832}, 750 + \sqrt{5832})$
$\rightarrow$	$v := \begin{pmatrix} 54\sqrt{2} \\ 54\sqrt{2} + 750 \end{pmatrix}$



V: Lentokone lentää nopeudella 830 km/h suuntaan, joka on 5,3° pohjoisesta itään päin.

ESIM5.

Keihäs lähtee nopeudella, jonka suuruus on 24,0 m/s ja suunta 35° maanpintaan nähden. Jätetään ilmanvastus huomioimatta, jolloin keihäs etenee vaakasuunnassa koko ajan samalla nopeudella.

a) Kuinka pitkän matkan keihäs etenee vaakasuunnassa ensimmäisen 0,5 sekunnin aikana?
(kuva suorakulmaisesta kolmiosta)

$$\cos(35^\circ) = \frac{|\overline{v_x}|}{|\overline{v}|}$$

$$|\overline{v}| \cos(35^\circ) = |\overline{v_x}|$$

$$|\overline{v_x}| = 24 \cdot \cos(35^\circ)$$

$$v = \frac{s}{t}$$

$$s = vt = |\overline{v_x}| \cdot t = 24 \cos(35^\circ) \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,5 \text{ s}$$

$$= 9,829... \text{ m} \approx 9,8 \text{ m}$$

$$24 * \cos(35) * 0,5 \\ = 9,829824531467$$

b) Millä hetkellä keihäs ylittää 18 metrin päässä heittoviivasta olevan tv-kameran?

$$s = 18 \text{ m} \quad t = ?$$

$$v = \frac{s}{t} \quad || \cdot t$$

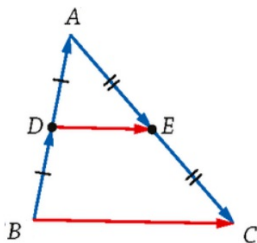
$$vt = s \quad || : v$$

$$t = \frac{s}{v} = \frac{18 \text{ m}}{24 \cos(35^\circ)} = 0,91558... \text{ s} \approx 0,92 \text{ s}$$

$$18 / (24 * \cos(35)) \\ = 0,915580941571$$

ESIM6.

Osoita, että kolmion kahden sivun keskipisteet yhdistävä jana on yhdensuuntainen kolmannen sivun kanssa ja pituudeltaan puolet siitä.



$$\overline{DE} = \overline{DA} + \overline{AE}$$

$$= \frac{1}{2}\overline{BA} + \frac{1}{2}\overline{AC}$$

$$= \frac{1}{2}(\overline{BA} + \overline{AC})$$

$$= \frac{1}{2}\overline{BC}$$