

Kpl 7.1 - Kulma ja pistetulo

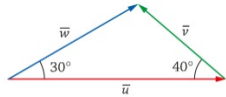
7.1 - Vektoreiden välinen kulma ja pistetulo

Vektoreiden $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ **välinen kulma** $\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})$ on pienempi niistä kahdesta kulmasta, jotka muodostuvat, kun vektorit asetetaan alkamaan samasta pisteestä.

Jos vektorit ovat kohtisuorassa, ne ovat toistensa **normaaleja** joka merkitään $\perp$, esim. $\vec{u} \perp \vec{v}$.

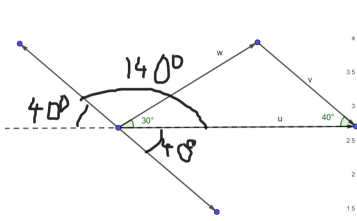
ESIM 1.

Vektorit $\vec{u}$, $\vec{v}$ ja $\vec{w}$ muodostavat kolmion oheisen kuvan mukaisesti.



Määritä

- a) $\sphericalangle(\vec{u}, \vec{w}) = 30^\circ$
- b) $\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$ (siirretään $\vec{v}$ alkamaan samaan pisteeseen, vieruskulmat)
- c) $\sphericalangle(\vec{w}, -\vec{v}) = 30^\circ + 40^\circ$ (40° ristikulma)



Määritelmä

Tason vektoreiden $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j}$ ja $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$

pistetulo on $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y$.

ESIM2.

Laske pistetulo ilman ohjelmia. Piirrä vektorit alkamaan samasta pisteestä ja mittaa ohjelmalla niiden välinen kulma.

- a) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = 1$
- b) $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 = 0$
- c) $(3\vec{i} + 2\vec{j}) \cdot (-2\vec{i} + 3\vec{j}) = 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 = 0$
- d) $(\vec{i} - \vec{j}) \cdot 2\vec{j} = (1 \cdot \vec{i} - 1 \cdot \vec{j}) \cdot (0\vec{i} + 2\vec{j})$
 $= 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 = 0 - 2 = -2$

LAUSE

Olkoon $\vec{u} \neq 0$ ja $\vec{v} \neq 0$. Vektorit $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, jos ja vain jos $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

ESIM3.

a) Ovatko vektorit $\vec{u} = -3\vec{i} + \vec{j}$ ja $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$ kohtisuorassa toisiaan vastaan?

Pistetulo on $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = -6 + 2 = -4$ joten eivät ole kohtisuorassa.

b) Millä vakion r arvoilla vektorit $\vec{u} = \begin{bmatrix} r \\ -1 \end{bmatrix}$ ja $\vec{v} = \begin{bmatrix} r \\ 2-r \end{bmatrix}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan?

Pistetulon pitää olla 0:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = r \cdot r - 1 \cdot (2 - r) = 0$$

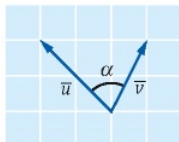
1	$r \cdot r - 1 \cdot (2 - r) = 0$ $\rightarrow r^2 + r - 2 = 0$
2	\$1
	Solve: $\{r = -2, r = 1\}$

V: Kun $r = -2$ tai $r = 1$, niin $\vec{u} \perp \vec{v}$ (vektorit ovat kohtisuorassa).

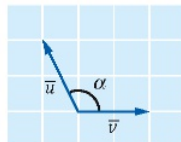
LAUSE

Olkoon $\vec{u} \neq 0$ ja $\vec{v} \neq 0$. Tällöin $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(\vec{u}, \vec{v}) \cdot |\vec{u}| |\vec{v}|$ eli $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$.

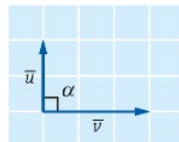
HUOM:



$0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$,
kun
 $\cos \alpha > 0$ eli $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$.



$90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$,
kun
 $\cos \alpha < 0$ eli $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$.



$\alpha = 90^\circ$,
kun
 $\cos \alpha = 0$ eli $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

ESIM4.

Laske vektoreiden $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ja $\vec{v} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}$ välinen kulma asteen kymmenesosan tarkkuudella.

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$$

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{3 \cdot (-4) + 2 \cdot 5}{\sqrt{3^2 + 2^2} \cdot \sqrt{4^2 + 5^2}}$$

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{-2}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{41}}$$

$$\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \arccos\left(\frac{-2}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{41}}\right)$$

$$\angle(\vec{u}, \vec{v}) \approx 95,0^\circ$$

$$\arccos(-2/(\sqrt{13} \cdot \sqrt{41}))$$

$$= 94,96974072811030369048$$

Lause (pistetulon ominaisuuksia)

a) $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

c) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

d) $(t\vec{u}) \cdot \vec{v} = t(\vec{u} \cdot \vec{v})$, missä t on reaaliluku

ESIM5.

Osoita, että neljäkkään lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

...

702.

a)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 15$$