

Kpl 6.4 - Paikkavektori

6.4 - Tason kantavektorit ja paikkavektori

Kantavektorit



Vektoreita $\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ja $\vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ sanotaan xy-tason **kantavektoreiksi**.

LAUSE

Tason vektori $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ voidaan esittää kantavektoreiden $\vec{i}$ ja $\vec{j}$ avulla:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

ESIM.

- Vektorin $x\vec{i} + y\vec{j}$ pituus $\sqrt{x^2 + y^2}$

- Pisteiden $A = (x_1, y_1)$ ja $B = (x_2, y_2)$ välinen vektori

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$$

- Olkoon $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$ ja $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j}$, niin $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j}$ ja $t\vec{a} = ta_x \cdot \vec{i} + ta_y \cdot \vec{j}$

ESIM 1.

a) Esitä vektori $\vec{u} = 6\vec{i} + \vec{j}$ komponenttimuodossa

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

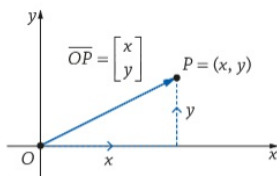
b) Esitä vektori $\vec{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$ kantavektoreiden $\vec{i}$ ja $\vec{j}$ avulla.

$$\vec{v} = 5\vec{i} - 3\vec{j}$$

Määritelmä

Pisteen $P = (x, y)$ **paikkavektori** on

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}$$



ESIM2.

Pisteestä $A = (2, 2)$ siirrytään ensin vektorin $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j}$ verran ja sitten kaksi kertaa vektorin $\vec{b} = -2\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}$ verran. Mihin pisteeseen päädytään?

(kuva)

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \vec{a} + 2 \cdot \vec{b}$$

$$= 2\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{i} - \vec{j} + 2 \cdot \left(-2\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}\right)$$

$$= 1\vec{i} + 4\vec{j}$$

Päädytään pisteeseen $B = (1, 4)$.

Yksikkövektori on vektori, jonka pituus on 1.

Vektorin $\vec{u}$ kanssa samansuuntainen yksikkövektori $\vec{u}^0$ on

$$\vec{u}^0 = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

ESIM3.

Olkoon $A = (5, -1)$ ja $B = (1, 2)$.

a) Muodosta vektori $\overrightarrow{AB}$ ja laske sen pituus.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (1 - 5)\vec{i} + (2 - (-1))\vec{j} \\ &= -4\vec{i} + 3\vec{j}\end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

b) Määritä vektorin $\overrightarrow{AB}$ yksikkövektori $\overrightarrow{AB}^0$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}^0 &= \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{-4\vec{i} + 3\vec{j}}{5} \\ &= \frac{-4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}\end{aligned}$$

c) Määritä vektori, jonka pituus on 12 ja joka on vektorin $\overrightarrow{AB}$ kanssa samansuuntainen.

$$\vec{a} = 12 \cdot \overrightarrow{AB}^0 = \frac{-48}{5}\vec{i} + \frac{36}{5}\vec{j}$$

d) Pisteestä A liikutaan 12 yksikköä vektorin $\overrightarrow{AB}$ suuntaan. Mihin pisteeseen päädytään?

Merkitään kysyttyä pistettä nimellä C.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OA} + 12 \cdot \overrightarrow{AB}^0 \\ &= 5\vec{i} - 1\vec{j} + \frac{-48}{5}\vec{i} + \frac{36}{5}\vec{j} \\ &= \frac{25 - 48}{5}\vec{i} + \frac{-5 + 36}{5}\vec{j} \\ &= \frac{-23}{5}\vec{i} + \frac{31}{5}\vec{j} \\ &= -5,6\vec{i} + 6,2\vec{j}\end{aligned}$$

Päädytään pisteeseen **C = (-5,6 ; 6,2)**

667.

a)

$$B = (-7, 2)$$

b)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

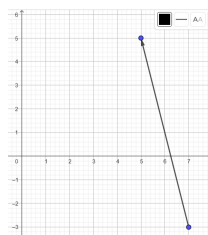
Vastaus: $B = (1, -2)$

c)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = 4\vec{j} + 5\vec{i} - 2\vec{j} \\ &= 5\vec{i} + 2\vec{j}\end{aligned}$$

Vastaus: $B = (5, 2)$

668.



a ja b)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = -3\vec{i} + 7\vec{j} + 8\vec{i} - 2\vec{j} \\ &= 5\vec{i} + 5\vec{j}\end{aligned}$$

Piste B on $(5, 5)$

c) Matka:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{64 + 4} = 8,246... \approx 8 \text{ cm}$$

Origosta loppusijaintiin:

$$|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{5^2 + 5^2} = 7,07... \approx 7 \text{ cm}$$

669

b)

CAS-kentässä:

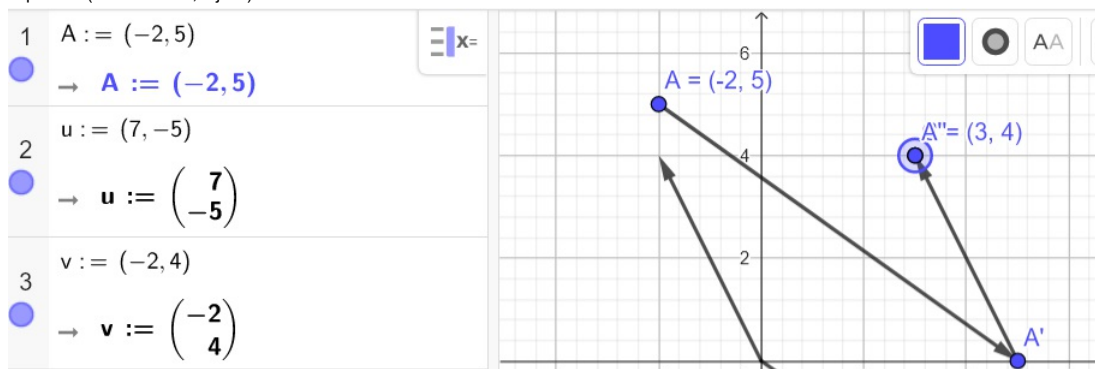
```
1  A := (-2, 5)
→ A := (-2, 5)

2  u := (7, -5)
→ u := ( 7, -5)

3  v := (-2, 4)
→ v := (-2, 4)

4  C := A + u + v
→ C := (3, 4)
```

tai piirtäen (lisää ensin A, u ja v):



$$A'' = C = (3, 4)$$