

Kpl 6.3 - Kertominen luvulla

Muistutuksena yhtälöparin ratkaiseminen:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 0 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$$

(yhteenlasku, sijoitus; ratkaisun tarkistus sijoittamalla)

$$\begin{cases} 5x + 3y = 0 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$$

$$7x + 0 = 2 \quad || : 7$$

$$x = \frac{2}{7} \Rightarrow \text{sijoitetaan} \quad 2 \cdot \frac{2}{7} - 3y = 2$$

$$-3y = \frac{14}{7} - \frac{4}{7} = \frac{10}{7} \quad || : (-3) \quad \text{eli} \quad \frac{1}{-3}$$

$$y = \frac{10}{7} \cdot \frac{1}{-3} = \frac{10}{-21}$$

Vastaus: $x = \frac{2}{7}$ ja $y = -\frac{10}{21}$

Yhtälöryhmässä:

$$\begin{cases} 5x + 3y + z = 0 \\ 2x - 3y - 3z = 2 \\ 7x + 2y - 6z = 5 \end{cases}$$

- Valitaan 1. ja 2. yhtälö yhtälöpariksi ja eliminoidaan kolmas muuttuja kertomalla ja yhteenlaskulla. Saadaan yhtälö, jossa kaksi tuntematonta.

- $$+ \begin{cases} 5x + 3y + z = 0 \\ 2x - 3y - 3z = 2 \end{cases}$$

$$7x + 0 - 2z = 2$$

- Sitten valitaan 1. ja 3. yhtälö ja eliminoidaan **sama** kolmas muuttuja. Saadaan yhtälö.

- $$\begin{cases} 2x - 3y - 3z = 2 & || \cdot 2 \\ 7x + 2y - 6z = 5 & || \cdot 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 6y - 6z = 4 \\ 21x + 6y - 18z = 15 \end{cases}$$

$$25x + 0 - 24z = 19$$

- Saadut kaksi yhtälöä ratkaistaan yhtälöparina.

- $$\begin{cases} 7x - 2z = 2 \\ 25x - 24z = 19 \end{cases}$$

- Ratkaistaan vielä y sijoittamalla x ja z.

Tai Geogebraa: {yhtälö1, yhtälö2, ...} ja Ratkaise.

6.3 - Vektorin kertominen luvulla

Määritelmä

$$\text{Jos } \vec{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \text{ ja } t \in \mathbb{R}, \text{ niin } t \vec{a} = \begin{bmatrix} t \cdot a_x \\ t \cdot a_y \end{bmatrix}$$

$$(\text{huom. } \frac{\vec{a}}{t} = \frac{1}{t} \vec{a} \quad)$$

ESIM 1.

Olkkoon $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$.

- a) Muodosta vektori $-4\vec{u}$. Onko tämä vektori saman- vai vastakkais-suuntainen vektorin $\vec{u}$ kanssa?

$$-4\vec{u} = -4 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \cdot 2 \\ -4 \cdot (-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

vastakkais-suuntainen (koska -4)

- b)** Muodosta vektori $\bar{v}$, joka on samansuuntainen vektorin $\bar{u}$ kanssa ja pituudeltaan puolet siitä.

$$\bar{v} = \frac{1}{2} \cdot \bar{u} = \begin{bmatrix} \frac{2}{2} \\ \frac{-3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

LAUSE

Vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$, joista kumpikaan ei ole nollavektori, ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun $\bar{a} = t \bar{b}$ jollakin luvulla t .

- Jos $t > 0$, niin $\bar{a} \uparrow \bar{b}$
- Jos $t < 0$, niin $\bar{a} \downarrow \bar{b}$

ESIM 2.

- a) Ovatko vektorit $\bar{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ja $\bar{a} = \begin{bmatrix} -14 \\ 21 \end{bmatrix}$ yhdensuuntaiset? Jos ovat, ovatko ne saman- vai vastakkaissuuntaiset?

$$\bar{u} = t \cdot \bar{a}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -14 \\ 21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 \cdot t \\ 21 \cdot t \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2 = -14t & \Rightarrow t = -\frac{2}{14} = -\frac{1}{7} \\ 3 = 21t & \Rightarrow t = \frac{3}{21} = \frac{1}{7} \end{cases}$$

Erit,

Vektorit eivät ole yhdensuuntaisia.

- b) Määritä vakio r siten, että vektorit $\bar{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ ja $\bar{b} = \begin{bmatrix} r \\ 5 \end{bmatrix}$ ovat yhdensuuntaiset.

$$\bar{u} = t \cdot \bar{b}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} r \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \cdot r \\ t \cdot 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2 = t \cdot r \\ -3 = 5t \end{cases}$$

$$t = -\frac{3}{5} \Rightarrow \text{sijoitetaan:}$$

$$2 = -\frac{3}{5}r \quad || \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)$$

$$r = 2 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{10}{3}$$

Vastaus: Kun r on $-\frac{10}{3}$, vektorit ovat yhdensuuntaisia.

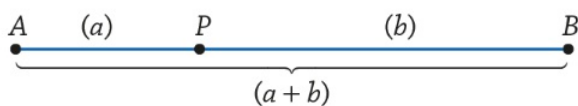
LAUSE

Vektoreille $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ja reaali- luvuille t ja s pätee

$$a) \quad t \cdot (s \cdot \bar{a}) = (t \cdot s) \bar{a}$$

$$b) \quad (t + s) \bar{a} = t\bar{a} + s\bar{a}$$

$$c) \quad t(\bar{a} + \bar{b}) = t\bar{a} + t\bar{b}$$



Sanotaan, että piste P jakaa janan AB suhteessa $a : b$, jos

$$\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{a}{b}$$

ESIM 3.

a) Janalla AB oleva piste P jakaa janan AB suhteessa $1 : 2$. Esitä vektorit $\overrightarrow{AP}$ ja $\overrightarrow{BP}$ vektorin $\overrightarrow{AB}$ avulla.

$$\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{3}$$

$$|\overrightarrow{AP}| = \frac{1}{3}|\overrightarrow{AB}|$$

eli $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$$\frac{|\overrightarrow{BP}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{2}{3}$$

$$|\overrightarrow{BP}| = \frac{2}{3}|\overrightarrow{AB}|$$

eli $\overrightarrow{BP} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ (huomaa suunta!)

b) Piste Q jakaa kolmion OCD sivun CD suhteessa $2 : 3$. Esitä vektori $\overrightarrow{OQ}$ vektoreiden $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OC}$ ja $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OD}$ avulla.

(kuva)

$$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CQ}$$

$$= \overrightarrow{OC} + \frac{2}{5}\overrightarrow{CD}$$

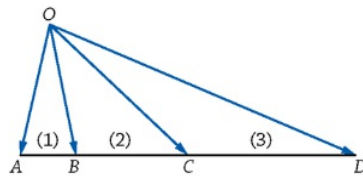
$$= \overrightarrow{u} + \frac{2}{5}(-\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$$

$$= \overrightarrow{u} - \frac{2}{5}\overrightarrow{u} + \frac{2}{5}\overrightarrow{v}$$

$$= \frac{3}{5}\overrightarrow{u} + \frac{2}{5}\overrightarrow{v}$$

660.

660. Pisteet B ja C jakavat janan AD kolmeen osaan suhteessa $1 : 2 : 3$. Esitä vektorit $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$ ja $\overrightarrow{OD}$ vektorien $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ ja $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$ avulla.



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{CB} = 2 \cdot \overrightarrow{BA} + 2 \cdot (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA})$$

$$= 2(-\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}) = -2\overrightarrow{v} + 2\overrightarrow{u}$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + 6 \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$= \overrightarrow{u} + 6 \cdot (-\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$$

$$= \overrightarrow{u} - 6\overrightarrow{u} + 6\overrightarrow{v}$$

$$= -5\bar{u} + 6\bar{v}$$