

# Vipu 5

FY5 Jaksollinen liike ja aallot

Tehtävien ratkaisut



# 1. Voiman momentti

## Tehtävä 1.1.

- a) C
- b) A
- c) A
- d) C
- e) B

## Tehtävä 1.2.

Jos työnnetään pisteestä A, sohvan vasen sivu liikkuu eniten ja sohva kiertyy myötäpäivään.

Jos työnnetään pisteestä B, sohva liikkuu suoraan selkänojan normaalin suuntaan.

Jos työnnetään pisteestä C, sohvan oikea sivu liikkuu eniten ja sohva kiertyy vastapäivään.

### Tehtävä 1.3.

Telaketjuilla kulkevalla kulkuneuvolla voi kääntyä pyörittämällä eri puolilla konetta olevia telaketjuja eri nopeuksilla. Telaketjujen ja maan pinnan välisen kitkan aiheuttama momentti kääntää kulkuneuvoa.

### Tehtävä 1.4.

a) voima  $F = 130 \text{ N}$

voiman varsi  $r = 260 \text{ mm} = 0,26 \text{ m}$

Voiman momentti on

$$M = Fr = 130 \text{ N} \cdot 0,26 \text{ m} = 33,8 \text{ Nm} \approx 34 \text{ Nm}.$$

b) Momentin suuruus on suoraan verrannollinen voiman varteen. Jos varsi on lyhyt, momentti on pieni. Pitkää vartta käyttämällä momenttia saadaan suurennettua.

## Tehtävä 1.5.

- a) Oven avaamiseen tarvitaan tietyn suuruinen momentti. Kun ovea työnnetään auki, oven kiertoakselina on oven sarana. Reunasta työnnettäessä voiman varsi on pidempi kuin lähellä saranaa. Kun ovea siis työnnetään läheltä oven reunaa (joka on usein lähellä kahvaa), momentti saadaan aikaan pienemmällä voimalla kuin työnnettäessä läheltä saranaa.
- b) Työ on voiman ja voiman kanssa yhdensuuntaisen siirtymän tulo. Momentti on kiertävän voiman ja voimaan nähden kohtisuoran voiman varren tulo. Voiman varsi ei kerro kuljettua matkaa, tämän vuoksi kyseessä ei ole työ.

## Tehtävä 1.6.

- a) Reppua kantavan retkeilijän lantio on systeemin kiertoakseli. Kun painavat tavarat pakataan repun pohjalle lähelle selkää, saadaan repun painopiste lähelle lantiota. Tällöin repun painon aiheuttama momentti pysyy pienenä ja repun liikuttamiseen vaikuttavat voimat ovat pienimmillään. Näin retkeilijän on myös helppo pitää tasapaino.
- b) Kun painavat tavarat asetetaan kärryn pohjalle, kuorman painopiste on alhaalla eikä kärry kaadu helposti. Kuorma kulkee vakaasti. Jos painopiste olisi ylhäällä, kärry kaatuisi helpommin, koska painopiste joutuu tällöin helpommin tukipinnan ulkopuolelle.

## Tehtävä 1.7.

Kun kappale ripustetaan roikkumaan jonkin tukipisteen varaan, asettuu kappale siten, että painopiste on suoraan tukipisteen alapuolella. Ripustetaan kappale roikkumaan ja piirretään ripustuskohdasta kappaleen pintaan viiva suoraan maata kohti. Toistetaan viivan piirto toisesta ripustuskohdasta. Viivojen leikkauspiste kertoo painopisteen paikan. Tuloksen voi varmistaa toistamalla koe vielä kolmannelta ripustuskohdasta.

## Tehtävä 1.8.

- a) Kun jalka nostetaan irti lattiasta, painon vaikutussuora ei kulje enää tukipinnan läpi. Kun nostat oikean jalan irti lattiasta, kallistut seinään päin. Pysyt kuitenkin pystyssä, koska voit ottaa seinästä tukea eli seinä kohdistaa sinuun tukivoiman. Kun nostat vasemman jalan irti lattiasta, kaadut.
  
- b) Varpaiden koskettaminen ei onnistu. Kun taivutat itseäsi kohti varpaita, painopiste (painon vaikutussuora) siirtyy tukipinnan eli jalkaterien alueen ulkopuolelle.

## Tehtävä 1.9.

- a) Useimmiten liike onnistuu, jos vartalon painopiste on lähellä lantiota, joka tässä liikkeessä toimii kiertoakselina. Jos selkälihasten voima saa aikaan suuremman momentin kuin vartalon ja tuolin painon aiheuttama momentti, niin ylösnousu onnistuu. Jos kehon painopiste on selvästi lantion yläpuolella, selkälihasten voima harvoin riittää pystyyn nousemiseen.
  
- b) Useimmiten liike onnistuu, jos vartalon painopiste on lähellä lantiota, joka tässä liikkeessä toimii kiertoakselina. Jos selkälihasten voima saa aikaan suuremman momentin kuin vartalon painon aiheuttama momentti, niin otsan irrottaminen maasta onnistuu. Jos painopiste on selvästi lantion yläpuolella, selkälihasten voima harvoin riittää liikkeen suorittamiseen.
  
- c) Seisomaan nouseminen ei onnistu, koska vartalon painon vaikutussuora on tukipintana toimivien jalkaterien ulkopuolella.

## Tehtävä 1.10.

Kun ruuvimeisselillä ruuvataan, käsien ja ruuvimeisselin välinen kitka aiheuttaa momentin ruuvimeisselin kiertoakselin suhteen. Mitä suurempi kitkan aiheuttama momentti on, sitä tiukemmalle ruuvin saa ruuvattua. Koska ruuvimeisselin A kahvan halkaisija on kaikista suurin, sillä saadaan aikaan suurin momentti. Ruuvimeisselillä A saa ruuvattua ruuvin tiukimmin.

## Tehtävä 1.11.

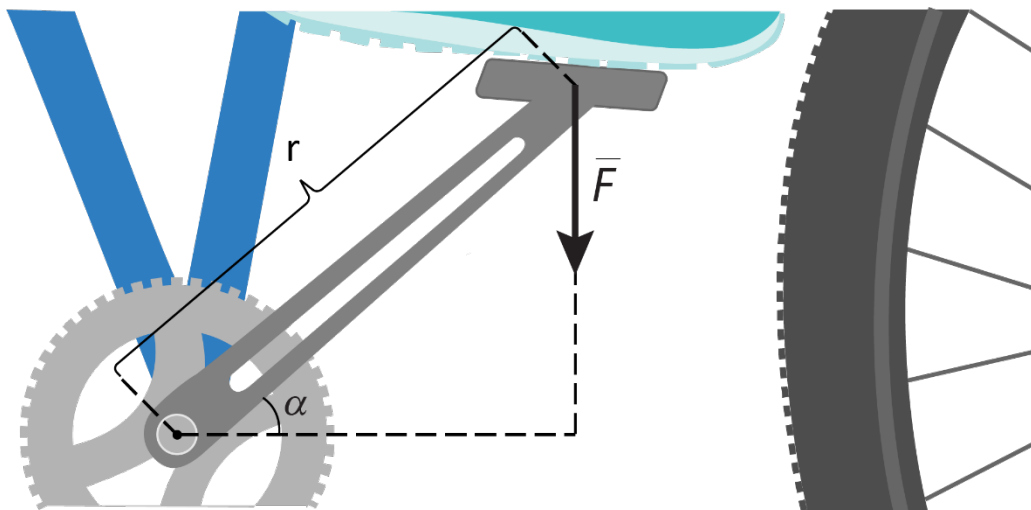
- a) Naulan irrottamiseen tarvitaan tietyn suuruinen momentti Koska sorkkaraudassa on pidempi varsi kuin vasarassa, yhtä suuren momentin tuottamiseen tarvitaan pienempi voima, kun käytetään sorkkarautaa.
- b) Lukon avaamiseen tarvitaan tietyn suuruinen momentti. Mitä leveämpi avaimen pää on, sitä kauempana kiertoakselista on sormien avaimiin kohdistama voima ja sitä pienempi voima tarvitaan avaamaan lukko.
- c) Liinan ja purkin metallikannen välinen kitkakerroin on suurempi kuin käden ja metallikannen välinen kitkakerroin. Kanteen saa näin ollen kohdistettua suuremman kitkan. Lisäksi liinan paksuus lisää voiman vartta. Jos kannen avaamiseen tarvitaan tietyn suuruinen momentti, on tarvittava voima liinan avulla pienempi, koska varsi on suurempi.

## Tehtävä 1.12.

- a) Kun veneellä soudetaan kahdella airolla yhtä voimakkaasti, vene liikkuu suoraan. Jos väliaineen vastus on yhtä suuri kuin airojen venettä eteenpäin liikuttava voima, vene etenee tasaisessa liikkeessä vakionopeudella. Jos airojen aiheuttama voima on erisuuri kuin väliaineen vastus, vene on kiihtyvässä liikkeessä.
- b) Kun oikealla olevaa airoa vedetään suuremmalla voimalla kuin vasemmalla olevaa airoa, vene kääntyy vasemmalla olevan airon suuntaan. Samalla vene liikkuu eteenpäin. Oikealla olevan airon aiheuttama momentti kääntää veneen.

## Tehtävä 1.13.

- a) polkimeen kohdistuva voima  $F = 230 \text{ N}$   
voima varsi  $r = 17 \text{ cm} = 0,17 \text{ m}$   
polkimen kulma vaakatasoon nähden  $\alpha = 30^\circ$



Voiman varsi  $r_{\perp}$  on vaakasuuntainen kateetti suorakulmaisessa kolmiossa, jonka hypotenuusa on  $r$ .

Silloin  $\cos \alpha = \frac{r_{\perp}}{r}$  ja  $r_{\perp} = r \cos \alpha$ .

Voiman momentti on tällöin

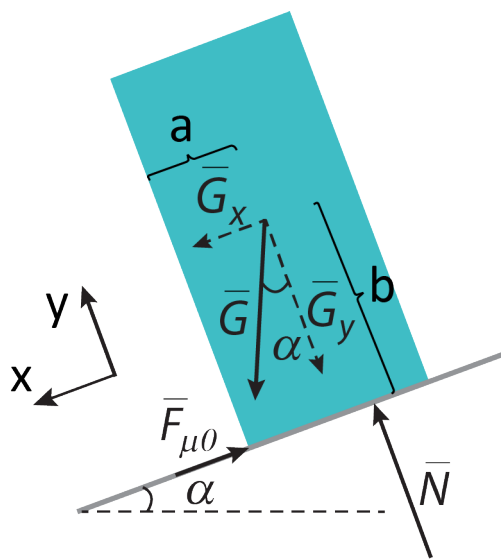
$$\begin{aligned} M &= Fr_{\perp} = Fr \cos \alpha = 230 \text{ N} \cdot 0,17 \text{ m} \cdot \cos 30^\circ \\ &= 33,86159 \text{ Nm} \approx 34 \text{ Nm}. \end{aligned}$$

- b) Voiman polkimeen aiheuttama momentti on  $M = Fr_{\perp} = Fr \cos \alpha$ . Momentti on suurimmillaan, kun termi  $\cos \alpha$  on suurimmillaan, sillä voima  $F$  ja voiman varsi  $r$  eivät muutu. Momentti on suurin, kun voima on kohtisuorassa voiman varteen nähden. Tämä toteutuu, kun poljin on vaakasuorassa.

## Tehtävä 1.14.

- a) Kappale kaatuu, kun painon vaikutussuora kulkee kappaleen tukipinnan ulkopuolella. Tölkin pohjan pinta-ala on paljon pienempi kuin tölkin kyljen pinta-ala, joten tölkin tukipinta on suurin, jos tölkki on kyljellään. Tämän vuoksi kyljellään olevaa tölkkiä voidaan kallistaa paljon ennen kuin painon vaikutussuora joutuu tukipinnan ulkopuolelle. Siksi kyljellään oleva mehutölkki säilyttää paremmin tasapainonsa kuin pystyssä oleva tölkki.

- b) Mehutölkin painopiste on symmetrian vuoksi purkin keskipisteessä. Mehutölkki kaatuu, kun painon vaikutussuora joutuu mehutölkin tukipinnan ulkopuolelle. Tarkastellaan tilannetta, jossa painon vaikutussuora kulkee juuri ja juuri tukipinnan läpi. Jos tölkkiä kallistetaan tätä enemmän, tölkki kaatuu.



$\bar{G}$  = mehutölkin paino

$\bar{N}$  = pöydän pinnan tukivoima

$\bar{F}_{\mu 0}$  = pinnan ja tölkin välinen lepokitka

Kuvassa olevat mitat ovat

$$a = \frac{9,3 \text{ cm}}{2} = 4,65 \text{ cm}$$

$$b = \frac{19,4 \text{ cm}}{2} = 9,7 \text{ cm.}$$

Rajatilanteessa purkin painon vaikutussuora kulkee purkin tukipinnan reunalta.

Kuvan perusteella  $\tan\alpha = \frac{a}{b}$ , joten rajakulma vaakatasoon nähden on

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{a}{b} = \tan^{-1} \left( \frac{4,65 \text{ cm}}{9,7 \text{ cm}} \right) = 25,612^\circ \approx 26^\circ.$$

Tölkki kaatuu, jos tasoa kallistetaan yli  $26^\circ$ .

## Tehtävä 1.15.

Alussa kuppi on kallellaan, koska kupin metallisosan painopiste on hieman kupin keskipisteen sivussa. Kun kuppiin lisätään vettä, kuppi nousee pystyyn, koska lisätyn veden ja kupin yhteinen painopiste on juuri kupin keskipisteen kohdalla. Puolipallon muotoinen kuppi on tasapainossa silloin, kun painon vaikutussuora kulkee kupin ja alustan kosketuspisteen eli kupin tukipinnan läpi.

## Tehtävä 1.16.

- a) voiman etäisyys kiertoakselista  $r = 0,183 \text{ m}$   
kohtisuoran voiman suuruus  $F = 74 \text{ N}$

Voiman mutteriin aiheuttama momentti on

$$M = Fr = 74 \text{ N} \cdot 0,183 \text{ m} = 13,542 \text{ Nm} \approx 14 \text{ Nm}.$$

- b) voiman etäisyys kiertoakselista  $r = 0,183 \text{ m}$   
voiman ja kiintoavaimen välinen kulma  $\alpha = 60^\circ$

Määritetään kiintoavainta vastaan kohtisuoraa voimaa

$$F_{\perp} = F \sin \alpha.$$

Voiman mutteriin aiheuttama momentti

$$M = F_{\perp} r = F \sin \alpha \cdot r = 74 \text{ N} \cdot \sin 60^\circ \cdot 0,183 \text{ m} = 11,7277 \text{ Nm} \approx 12 \text{ Nm}.$$

## Tehtävä 1.17.

- a) voiman etäisyys kiertoakselista  $r = 0,52 \text{ m}$   
voiman aiheuttama momentti  $M = 115 \text{ Nm}$

Tutkitaan voiman  $F$  aiheuttamaa momenttia pisteen A suhteen  $M_A = Fr$ .

Tarvittavan voiman suuruus on

$$F = \frac{M_A}{r} = \frac{115 \text{ Nm}}{0,52 \text{ m}} = 221,15 \text{ N} \approx 220 \text{ N}.$$

- b) voiman ja momenttiavaimen varren  
välinen kulma  $\alpha = 78^\circ$



Tutkitaan voiman  $F$  aiheuttamaa momenttia pisteen A suhteen

$$M_A = F_\perp r = rF \sin \alpha.$$

Tarvittavan voiman suuruus

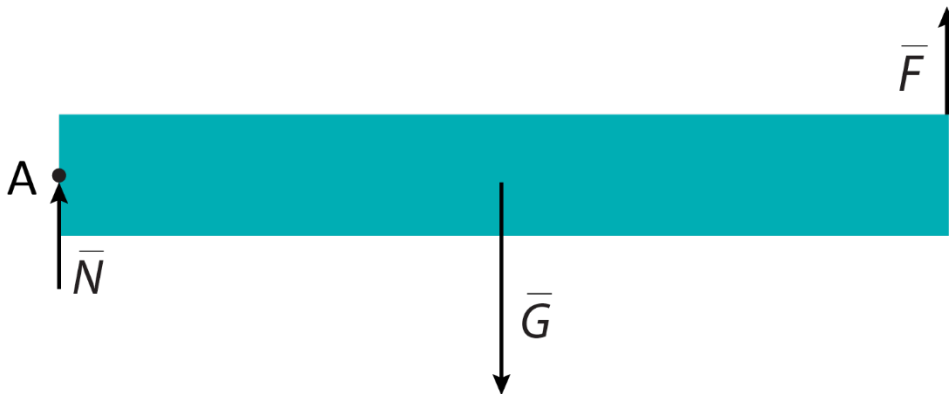
$$F = \frac{M_A}{r \sin \alpha} = \frac{115 \text{ Nm}}{0,52 \text{ m} \cdot \sin 78^\circ} = 226,09 \text{ N} \approx 230 \text{ N}.$$

## Tehtävä 1.18.

Kun teipistä vedetään, ovi kiertyy saranoiden suhteen. Vetävä voima aiheuttaa oveen momentin. Mitä kauempana teippi on oven saranasta eli kiertoakselista, sitä suurempi on teipin aiheuttaman voiman varsi ja sitä pienempi voima tarvitaan avaamaan ovi. Mitä lähemmäksi oven saranareunaa teippi laitetaan, sitä pienempi on voiman momentin varsi ja sitä suurempi voima tarvitaan.

## Tehtävä 1.20.

a)



$\bar{G}$  = vatupassin paino

$\bar{F}$  = voima-anturin vatupassiinkohdistama voima

$\bar{N}$  = statiivin vatupassiin kohdistama tukivoima

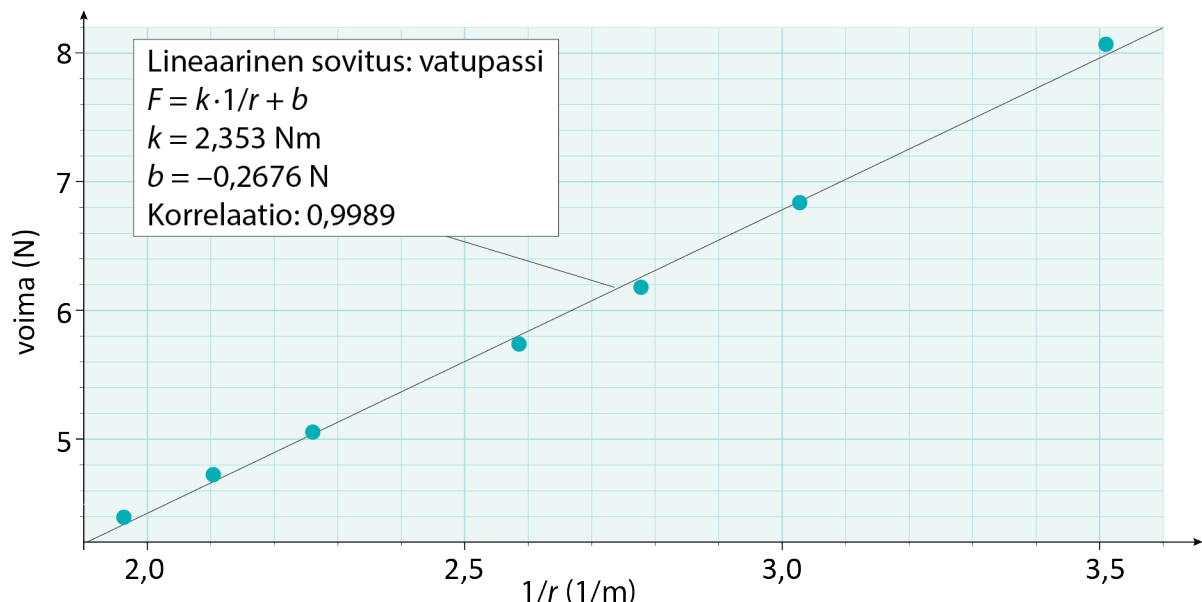
- b) Voima-anturin aiheuttama momenttia kiertoakselin A suhteen on  $M = Fr$ . Koska voima-anturin aiheuttaman voiman  $F$  ja voima-anturin etäisyyden  $r$  tulo on vakio, ovat  $F$  ja  $r$  kääntäen verrannolliset suureet.

Muodostetaan yhtälö voima-anturin aiheuttaman voiman sekä voima-anturin ja kiertoakselin välisen etäisyyden välille

$$F = M \frac{1}{r}.$$

Voima-anturin aiheuttama momentti on

$(\frac{1}{r}, F)$ -koordinaatistoon laaditun kuvaajan fysikaalinen kulmakerroin. Lasketaan uusi sarake  $1/r$  ja määritetään kulmakerroin.



Voima-anturin vatupassiin aiheuttama momentti on  $M = 2,353 \text{ Nm} \approx 2,4 \text{ Nm}$ .

## Tehtävä 1.21.

Kun tanko on tasapainossa, siihen kohdistuvien voimien momenttien summa on nolla. Narun jännitysvoiman aiheuttama momentti on yhtä suuri kuin tangon painon aiheuttama momentti. Kun narun kulmaa muutetaan, narun jännitysvoima kasvaa. Jotta narun jännitysvoiman momentti olisi sama, tulee narun jännitysvoiman tankoon nähden kohtisuoran komponentin pysyä samana. Tällöin pienemmällä kulmalla narun jännitysvoiman on oltava suurempi.

## Tehtävä 1.22.

- a) pienen hammasrattaan säde  $r_p = 4,0 \text{ cm} = 0,040 \text{ m}$   
suuren hammasrattaan säde  $r_s = 7,0 \text{ cm} = 0,070 \text{ m}$   
pienen hammasrattaan momentti  $M_p = 0,55 \text{ Nm}$

Pienen hammasrattaan momentti on  $M_p = Fr_p$ .

Se tarkoittaa, että hammasratasta pyöritetään rattaan reunasta voimalla  $F = \frac{M_p}{r_p}$ . Koska pieni ratas pyörittää

suurta ratasta yhtä suurella voimalla, suureen rattaaseen kohdistuu momentti

$$M_s = Fr_s = \frac{M_p}{r_p} r_s = \frac{0,55 \text{ Nm}}{0,040 \text{ m}} \cdot 0,070 \text{ m} = 0,9625 \text{ Nm} \approx 0,96 \text{ Nm}.$$

- b) Tarkastellaan hammasrattaita ympyröinä. Kun rattaat pyörivät, niiden kehät kiertyvät yhtä pitkän matkan. Ison hammasrattaan kehän pituus on  $2\pi r_s$ . Pienen hammasrattaan kehän pituus on  $2\pi r_p$ . Kun suuri ratas kiertää yhden kierroksen pieni ratas kiertää  $n$  kierrosta. Ratkaistaan pienemmän rattaan kierrosmäärä.

$$n \cdot 2\pi r_p = 2\pi r_s$$

$$n = \frac{r_s}{r_p} = \frac{0,070 \text{ m}}{0,040 \text{ m}} = 1,75 \approx 1,8$$

## Tehtävä 1.23.

- a) Jos pultti on liian löysästi kiristetty, kappaleiden liitos ei ole pitävä. Jos pulttia kiristetään liikaa, pultti voi murtua, ja liitos ei pidä.
- b) Momenttiavaimella pultti ja mutteri saadaan kiristettyä haluttuun momenttiin. Momenttiavaimessa voi olla mekanismi, joka estää liian kiristämisen tai avaimessa voi olla mittari, josta nähdään kiristysmomentin suuruus. Näin vältetään esimerkiksi liian löysä tai liian kireä kiinnitys.
- c) Pultti ja mutteri aiheuttavat kiinnitettäviin kappaleisiin puristavan voiman. Newtonin III lain mukaisesti pulttiin kohdistuu yhtä suuri, mutta vastakkaissuuntainen voima. Tätä voimaa kutsutaan vetojännitykseksi.
- d) Pultin myötölujuuden raja-arvoa suuremmilla vetojännityksillä pultin sisäisessä rakenteessa tapahtuu muutoksia. Pulttiin voi syntyä esimerkiksi hiusmurtumia, mutta pultti ei kuitenkaan katkea.

e) Pultin lujuusluokka 8.8 tarkoittaa sitä, että pultin vetomurtolujuus on  $800 \text{ N/mm}^2$ . Koska pultin halkaisija on  $8,0 \text{ mm}$ , pultin ruuviosan poikkipinta-ala on

$$A = \pi r^2 = \pi \cdot (4,0 \text{ mm})^2 = 50,2655 \text{ mm}^2.$$

Pulttiin voi kohdistua enimmillään voima,

jonka suuruus on

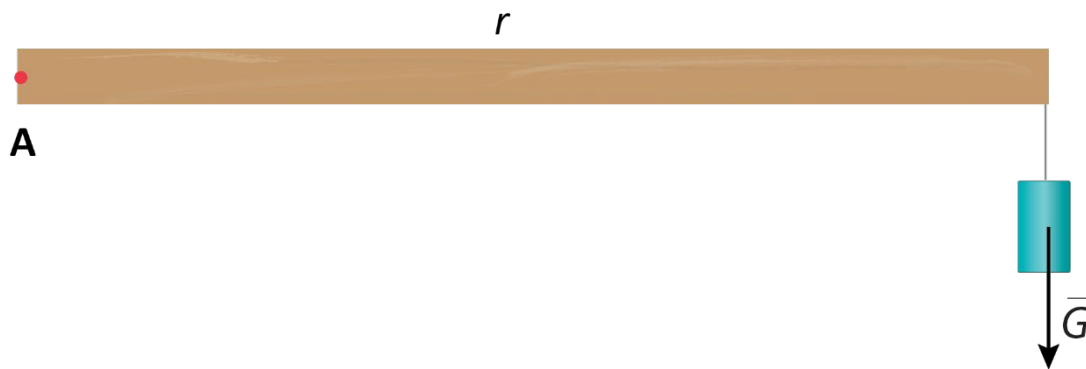
$$F = 800 \text{ N/mm}^2 \cdot 50,2655 \text{ mm}^2 = 40\,212,386 \text{ N} \approx 40,2 \text{ kN}.$$

## Tehtävä 1.24.

naurun etäisyys ruuvista  $r = 0,75 \text{ m}$

punnuksen massa  $m = 1,690 \text{ kg}$

a)



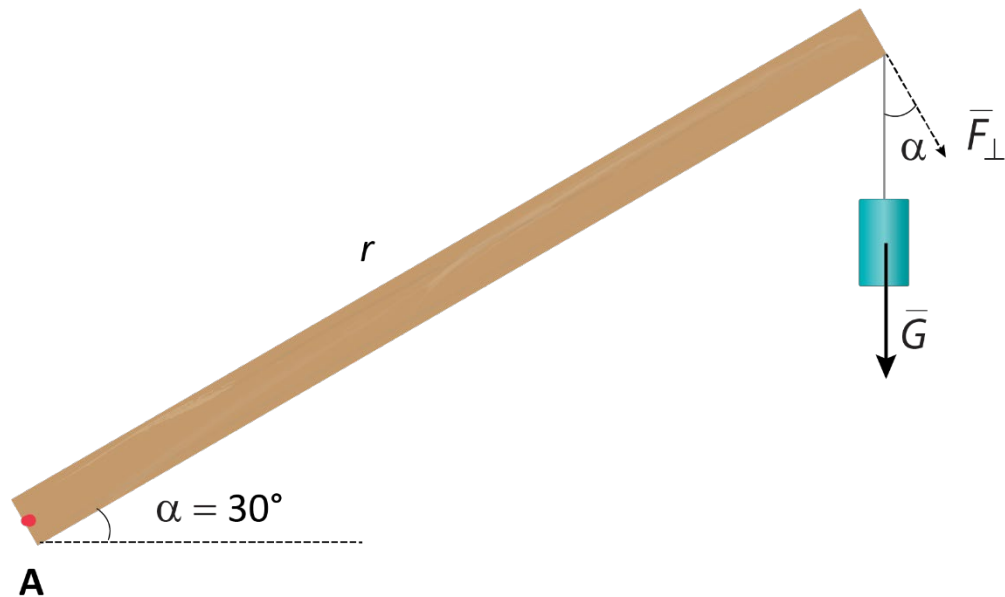
Punnuksen paino välittyy langan kautta listaan.  
Tarkastellaan tilanteessa 1 momenttia ruuvin suhteen.  
Voiman aiheuttama momentti on

$$\begin{aligned} M &= Fr = Gr = mgr \\ &= 1,690 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,75 \text{ m} = 12,43 \text{ Nm} \approx 12 \text{ Nm}. \end{aligned} \quad (2 \text{ p})$$

Tilanteessa 2

voiman ja listan välinen kulma  $\alpha = 30^\circ$

Määritetään painon listaa vastaan kohtisuora voima



$$F_{\perp} = G \cos \alpha = mg \cos \alpha. \quad (1 \text{ p})$$

Voiman ruuviin aiheuttama momentti

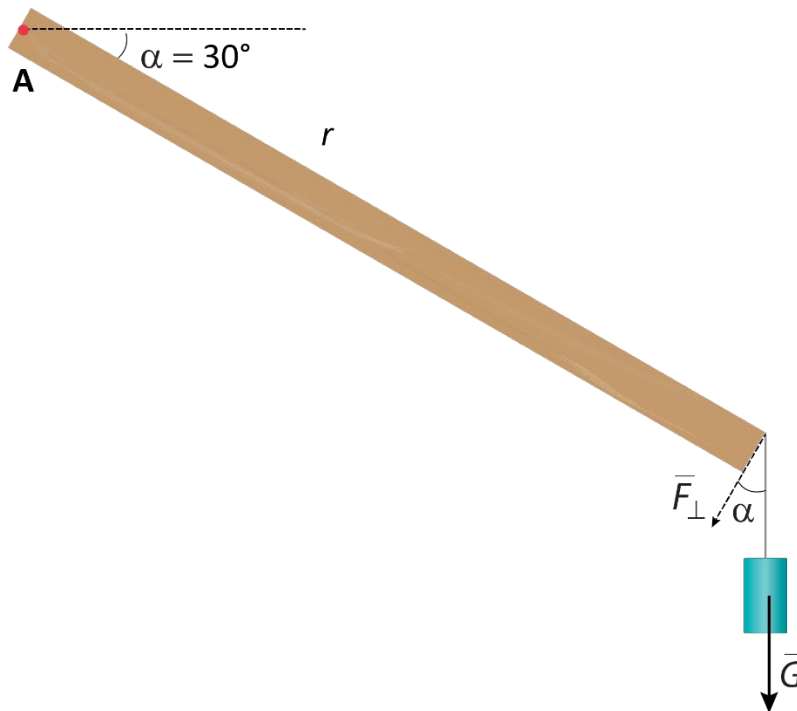
$$\begin{aligned} M &= F_{\perp} r \\ &= mg \cos \alpha \cdot r \\ &= 1,690 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot \cos 30^\circ \cdot 0,75 \text{ m} \quad (2 \text{ p}) \\ &= 10,768 \text{ Nm} \approx 11 \text{ Nm}. \end{aligned}$$

b) Tilanne 1 on sama kuin a-kohdassa, jolloin punnuksen painon ruuviin aiheuttama momentti on

$$M = F_{\perp} r = mg \cos \alpha \cdot r.$$

Tilanne 2

Määritetään painon listaan vastaan kohtisuora voima



$$F_{\perp} = G \cos \alpha = mg \cos \alpha. \quad (1 \text{ p})$$

Voiman ruuviin aiheuttama momentti  $M = F_{\perp} r = mg \cos \alpha \cdot r$ .  
(1 p)

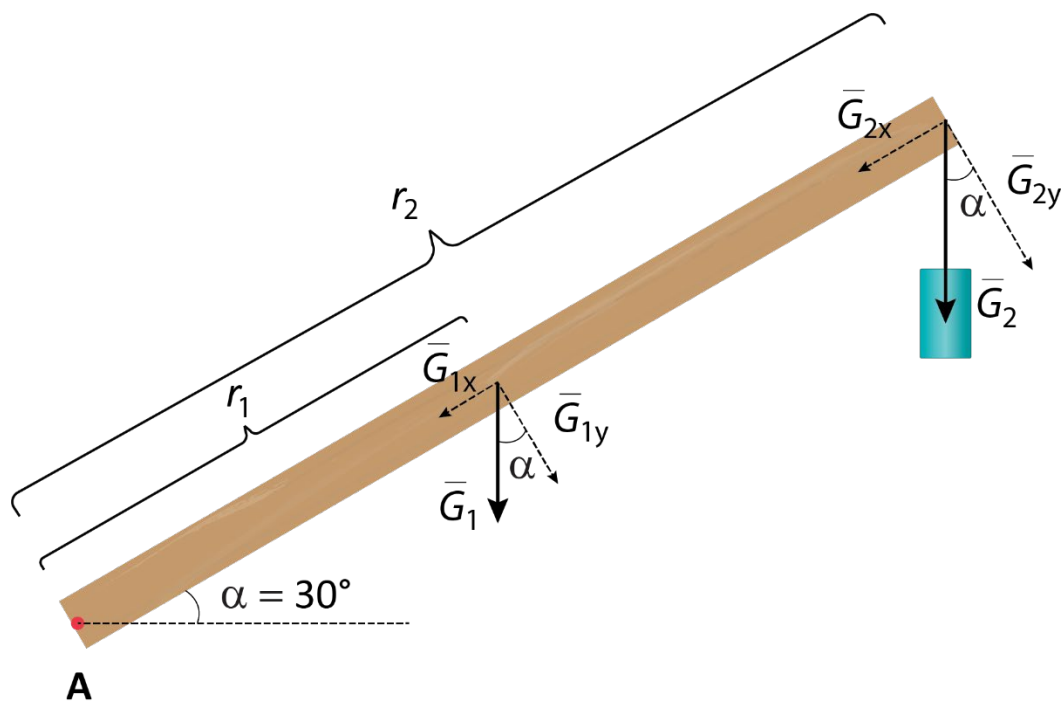
Tilanteiden 1 ja 2 momentin yhtälöistä nähdään, että momentit ovat yhtä suuret, joten ei ole väliä, muodostuuko kulma vaakatasosta ylöspäin vai alaspäin.  
(2 p)

c) puulistan massa  $m_1 = 0,127 \text{ kg}$

Puulistan painon etäisyys ruuvista on symmetrian vuoksi

$$r_1 = \frac{0,75 \text{ m}}{2}.$$

Tarkastellaan puulistan  $m_1$  ja punnuksen  $m_2$  painojen ruuvien kohdalle aiheuttamia momentteja



$$M_1 = G_1 r_1 = m_1 g r_1 \cos \alpha \quad (1 \text{ p})$$

$$M_2 = G_2 r_2 = m_2 g r_2 \cos \alpha.$$

Tilanteessa, jossa momentit ovat yhtä suuret

$$M_1 = M_2$$

$$m_1 g r_1 \cos \alpha = m_2 g r_2 \cos \alpha \quad (2 \text{ p})$$

$$m_1 r_1 = m_2 r_2.$$

Momenttien yhtälöstä nähdään, että kulma ei vaikuta tilanteeseen. (1 p)

Lasketaan punnuksen etäisyys, jolla punnuksen painon aiheuttama momentti on yhtä suuri kuin listan painon aiheuttama momentti

$$r_2 = \frac{m_1 r_1}{m_2} = \frac{0,127 \text{ kg} \cdot \frac{0,75 \text{ m}}{2}}{1,690 \text{ kg}} = 0,02818 \text{ m} \approx 2,8 \text{ cm. (2 p)}$$

## 2. Momentti ja tasapaino

### Tehtävä 2.1.

väitteistä oikein: a), d)

väitteistä väärin: b), c), e)

Korjaukset vääriin väitteisiin:

- b) Suuntasopimus määrittelee positiivisen kiertosuunnan. Päinvastaisen kiertosuunnan momentti on negatiivinen.
- c) Statiiviin ripustetun tangon paino aiheuttaa tankoon momentin, jos tankoa ei ole ripustettu painopisteestään.
- e) Kun voima kasvaa vivun avulla, matka pienenee samassa suhteessa. Tehdyn työn määrä pysyy siis muuttumattomana.

## Tehtävä 2.2.

- a) Kappale on tasapainossa, kun kappale ei liiku eikä pyöri.
  
- b) Kun kappale on tasapainossa etenemisen suhteen, voimien summa on nolla. Kun kappale on tasapainossa pyörimisen suhteen, momenttien summa on nolla.

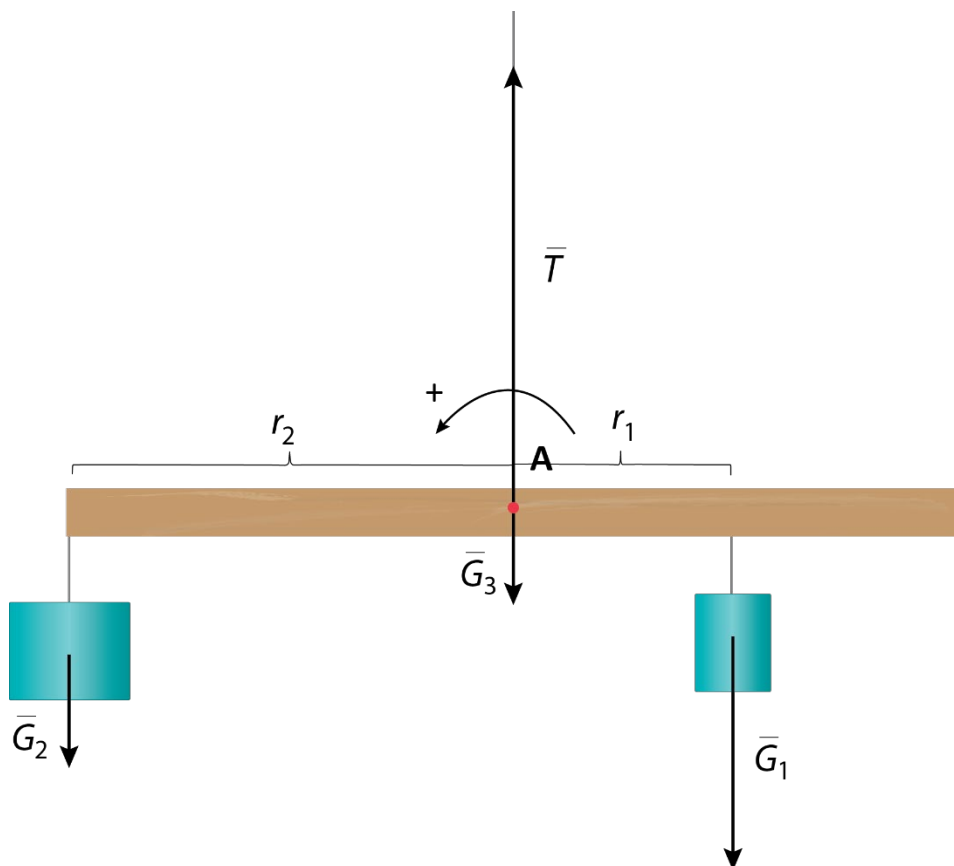
## Tehtävä 2.3.

- a) Sakset on esimerkki kaksivartisesta vivusta, sillä terän leikkaava voima vaikuttaa eri puolella tukipistettä kuin käden aiheuttama puristusvoima.
  
- b) Sorkkarautaa voi käyttää yksivartisena tai kaksivartisena vipuna. Sorkkarauta on yksivartinen vipu, kun sorkkaraudan päätä nostamalla yritetään nostaa esimerkiksi puussa olevaa naulaa. Sorkkarauta on kaksivartinen vipu, kun tukipiste on nostettavan naulan ja sorkkaraudan toisen pään välillä. Tällöin naula saadaan nousemaan puusta painamalla sorkkaraudan toista päätä alaspäin.
  
- c) Kottikärryissä kannateltava paino ja kannatteleva voima ovat samalla puolella tukipistettä, joten kyseessä on yksivartinen vipu.

## Tehtävä 2.4.

- a) punnuksen massa  $m_1 = 500 \text{ g} = 0,500 \text{ kg}$   
punnuksen etäisyys kiertoakselista  $r_1 = 22 \text{ cm} = 0,22 \text{ m}$   
punnittavan esineen massa  $m_2$   
punnittavan esineen etäisyys kiertoakselista  $r_2 = 0,50 \text{ m}$

Piirretään voimakuvio.



$\bar{G}_1$  = punnuksen paino

$\bar{G}_2$  = punnittavan esineen paino

$\bar{G}_3$  = kepin paino

$\bar{T}$  = narun jännitysvoima

Tasapaksun kepin painopiste on keskikohdassa. Koska keppi on ripustettu painopisteen kohdalta, painopiste on kiertoakselin kohdalla. Tämän vuoksi kepin paino  $G_3$  ja narun jännitysvoima  $T$  eivät aiheuta keppiin momenttia.

Voiman  $G_1$  momentti pyrkii kiertämään tankoa myötäpäivään, joka on valittu negatiiviseksi kiertosuunnaksi. Voiman  $G_2$  momentti on tällöin positiivinen.

Kun tanko on tasapainossa, tasapainoehdot ovat voimassa.

Tasapaino etenemisen suhteen  $\sum \vec{F} = \vec{0}$ , eli tankoon vaikuttavien voimien summa on nolla.

Tasapaino pyörimisen suhteen  $\sum M = 0$ , eli tankoon vaikuttavien momenttien summa on nolla.

Momenttien summa on  $G_2 r_2 - G_1 r_1 = 0$ , joten  $m_2 g r_2 = m_1 g r_1$ .

Ratkaistaan yhtälöstä punnittavan esineen massa.

$$m_2 = \frac{m_1 \cancel{g} r_1}{\cancel{g} r_2} = \frac{m_1 r_1}{r_2} = \frac{0,500 \text{ kg} \cdot 0,22 \text{ m}}{0,50 \text{ m}} = 0,220 \text{ kg}.$$

Punnittavan esineen massa on 220 g.

b) Jos kepin päähän kiinnitetään yli 500 g:n punnus, aiheuttaa esine suuremman momentin kuin keppiin ripustettu punnus ja keppi kääntyy pystyasentoon. Jos punnittava esine voidaan kiinnittää lähemmäksi kiertoakselia, niin vaa'alla voi punnita myös yli 500 g:n esineitä.

## Tehtävä 2.5.

käsivarren massa  $m_k = 2,0 \text{ kg}$

punnuksen massa  $m_p = 15,0 \text{ kg}$

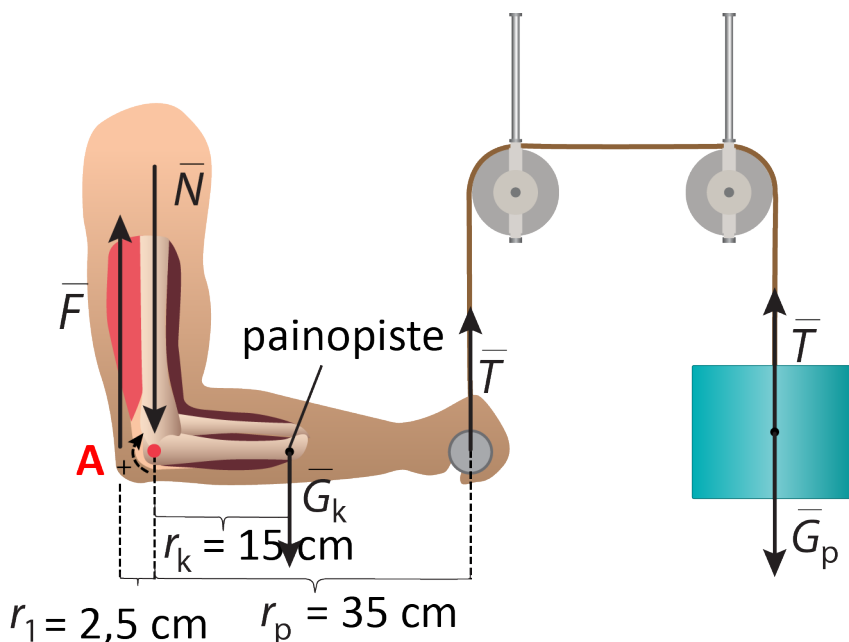
käsivarren painopisteen etäisyys

kyynärnivelestä  $r_k = 15,0 \text{ cm}$

kahvan etäisyys kyynärnivelestä  $r_p = 35,0 \text{ cm}$

lihaksen kiinnityskohdan etäisyys

kyynärnivelestä  $r_1 = 2,5 \text{ cm}$



$\vec{F}$  = ojentajalihaksen aiheuttama voima

$\vec{N}$  = tukivoima nivelessä

$\vec{G}_k$  = käden paino

$\vec{T}$  = vaijerin tukivoima

Koska punnus on paikallaan, punnuksen paino on yhtä suuri kuin vaijerin jännitysvoima. Kun valitaan positiivinen suunta alaspäin, voidaan kirjoittaa

$$\sum F = 0$$

$$G_p - T = 0$$

$$T = G_p = m_p g.$$

Käsivarsi on tasapainossa pyörimisen suhteen. Valitaan suunta myötäpäivään positiiviseksi.

$$\sum M_A = 0$$

$$Fr_2 + G_k r_k - Tr_1 = 0$$

$$Fr_2 = Tr_1 - G_k r_k$$

$$F = \frac{Tr_1 - G_k r_k}{r_2}.$$

Sijoitetaan vaijerin tukivoiman lauseke voiman yhtälöön.

$$\begin{aligned} F &= \frac{G_p r_1 - G_v r_v}{r_2} = \frac{m_p g r_p - m_k g r_k}{r_2} = \frac{g(m_p r_p - m_k r_k)}{r_2} \\ &= \frac{9,81 \text{ m/s}^2 (15,0 \text{ kg} \cdot 0,35 \text{ m} - 2,0 \text{ kg} \cdot 0,15 \text{ m})}{0,025 \text{ m}} = 1942,38 \text{ N} \approx 1,94 \text{ kN}. \end{aligned}$$

b) Voiman varsi on lyhyt, koska lihas kiinnittyy luuhun nivelen lähellä. Tämän vuoksi raajojen liikuttamiseen tarvitaan suuri voima.

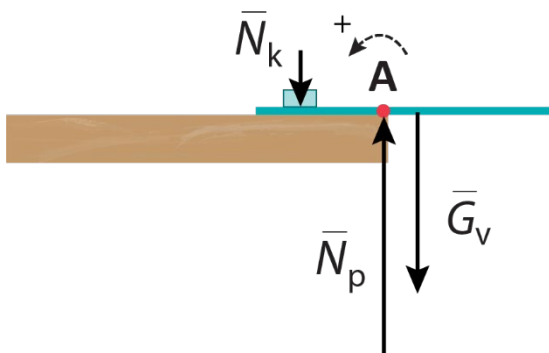
## Tehtävä 2.6.

viivoittimen massa  $m_v = 28 \text{ g}$

viivoittimen pituus  $L = 0,40 \text{ m}$

viivoittimen pöydän ulkopuolella olevan osan pituus  $l = 0,242 \text{ m}$

kolikon massa  $m_k = 8,05 \text{ g}$



$\bar{G}_v$  = viivoittimen paino

$\bar{N}_k$  = kolikon viivoittimeen kohdistama voima

$\bar{N}_p$  = pöydän reunan tukivoima

Pöydän reuna toimii kiertoakselina. Merkitään kolikon etäisyyttä kiertoakselista  $r_2$ .

Koska viivoitin on tasapaksu, viivoittimen painopiste sijaitsee etäisyydellä  $x = L/2 = 0,40 \text{ m}/2 = 0,20 \text{ m}$  viivoittimen päästä. Painopisteen etäisyys kiertoakselista on

$$r_1 = l - L/2 = 0,242 \text{ m} - 0,20 \text{ m} = 0,042 \text{ m}$$

Viivoitin pysyy tasapainossa, kun tasapainoehdot ovat voimassa eli viivoitin ei liiku eikä pyöri.

Kirjoitetaan tasapainoehto pyörimisen suhteen.

$$\sum M = 0$$

$$N_k r_2 - G_v r_1 = 0$$

$$G_v r_1 = N_k r_2$$

$$r_2 = \frac{G_v r_1}{N_k} = \frac{m_v g r_1}{m_k g} = \frac{0,028 \text{ kg} \cdot 0,042 \text{ m}}{0,00805 \text{ kg}} = 0,14608 \text{ m} \approx 15 \text{ cm}.$$

Kolikko on asetettava viivoittimen päälle vähintään 15 cm etäisyydelle pöydän reunasta, jotta viivoitin pysyisi tasapainossa.

- b) Viivoittimen massan määrittämiseksi pitää selvittää, missä kohdassa viivoittimen painopiste on. Tutkitaan, mistä kohdasta tuettuna viivoitin pysyy tasapainossa. Asetetaan sitten kolikko viivoittimen toiseen päähän. Kun viivoitinta työnnetään pöydän reunan yli, tutkitaan, kuinka pitkällä viivoitin on juuri ennen putoamista. Viivoittimen massa lasketaan tasapainoehdosta.

## Tehtävä 2.7.

- a) Simulaation perusteella 10 kg:n massan paikka on 0,75 m.
- b) punnuksen massa  $m_1 = 15 \text{ kg}$   
punnuksen  $m_1$  etäisyys kiertoakselista  $r_1 = 0,50 \text{ m}$   
punnuksen massa  $m_2 = 10 \text{ kg}$   
punnuksen  $m_2$  etäisyys kiertoakselista  $r_2$

Keinulauta on tasapainossa pyörimisen suhteen, kun keinulauta on vaakasuorassa. Keinulaudan kiinnityspiste toimii kiertoakselina. Kirjoitetaan tasapainoehto pyörimisen suhteen ja ratkaistaan 10 kg:n kappaleen paikka.

$$\Sigma M_A = 0$$

$$G_1 r_1 - G_2 r_2 = 0$$

$$m_1 g r_1 - m_2 g r_2 = 0$$

$$m_1 g r_1 = m_2 g r_2$$

$$r_2 = \frac{m_1 r_1}{m_2} = \frac{15 \text{ kg} \cdot 0,50 \text{ m}}{10 \text{ kg}} = 0,75 \text{ m}.$$

Tulos on täsmälleen sama kuin a-kohdassa.

## Tehtävä 2.8.

Merkitään

$G_1$  = laatikon paino

$G_2$  = lankun paino

$F$  = lankkuun kohdistettu voima

$r$  = lankun pituus

Tarkastellaan tilannetta lankun tukipisteen suhteen. Jokaisessa tilanteessa lankkua vääntävien voimien momenttien summa on nolla, sillä lankku on tasapainossa pyörimisen suhteen. Momenttiehdosta saadaan, kun laatikon painon ja voiman etäisyys kiertopisteestä on sama

$$F \frac{r}{2} - G_1 \frac{r}{2} = 0$$
$$F = G_1.$$

Tilanteessa B tasapainottava voiman  $F$  varsi on kaksinkertainen laatikon ja lankun painon varteen verrattuna. Lankun paino aiheuttaa momenttia. Saadaan momenttiehdosta

$$Fr - G_1 \frac{r}{2} - G_2 \frac{r}{2} = 0$$
$$F = \frac{G_1 + G_2}{2}.$$

Tilanteessa C saadaan momenttiehdosta

$$F \frac{r}{2} - G_1 r - G_2 \frac{r}{2} = 0$$
$$F = 2G_1 + G_2.$$

Voima  $F$  on suurin tilanteessa C.

## Tehtävä 2.9.

peräkärryn massa  $m_1 = 210 \text{ kg}$

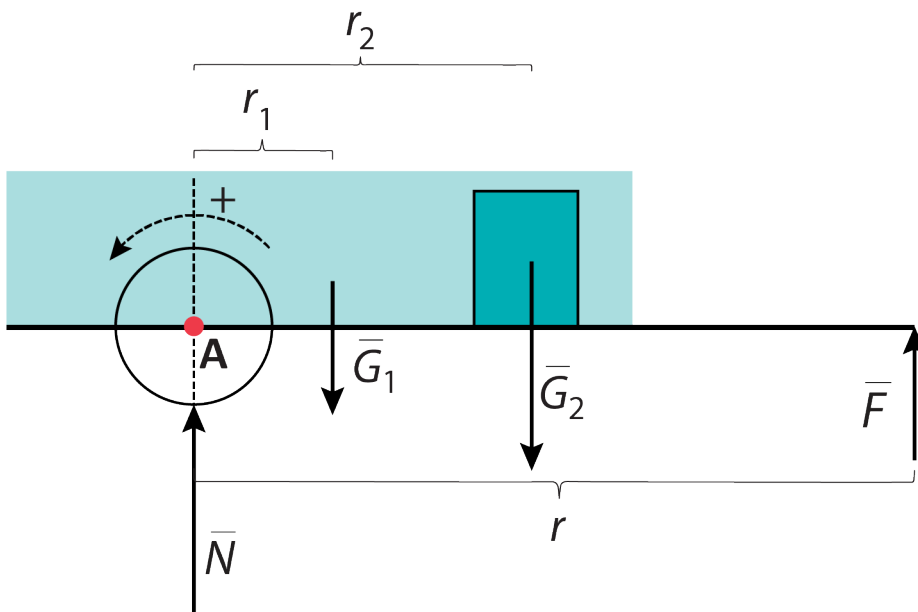
kiven massa  $m_2 = 260 \text{ kg}$

akselin etäisyys auton peräkoukusta  $r = 2,9 \text{ m}$

peräkärryn painopisteen etäisyys akselistä  $r_1 = 0,60 \text{ m}$

aisan koukkuun kohdistama kuorma  $m = 75 \text{ kg}$

Peräkärri on tasapainossa etenemisen ja pyörimisen suhteen.



$\bar{G}_1$  = peräkärryn paino

$\bar{G}_2$  = kiven paino

$\bar{F}$  = aisan tukivoima

$\bar{N}$  = tukivoima, jonka tienpinta kohdistaa peräkärryn renkaisiin

Tarkastellaan voimien aiheuttamaa momenttia peräkärryn akselin suhteen. Kun peräkärri on tasapainossa pyörimisen suhteen, on voimassa

$$\sum M_A = 0$$

$$Fr - G_1 r_1 - G_2 r_2 = 0$$

$$Fr - m_1 g r_1 - m_2 g r_2 = 0.$$

Koska aisan koukkuun kohdistama kuorma voi olla maksimissaan 75 kg, on koukun tukivoima  $F = mg$ . Ratkaistaan kiven etäisyys tilanteessa, jossa aisan koukkuun kohdistama kuorma on 75 kg.

$$m g r - m_1 g r_1 - m_2 g r_2 = 0$$

$$r_2 = \frac{m r - m_1 r_1}{m_2} = \frac{75 \text{ kg} \cdot 2,9 \text{ m} - 210 \text{ kg} \cdot 0,60 \text{ m}}{260 \text{ kg}} = 0,3519 \text{ m} \approx 35 \text{ cm}.$$

Kivi voidaan siis asettaa enintään 35 cm etäisyydelle peräkärryn akselist.

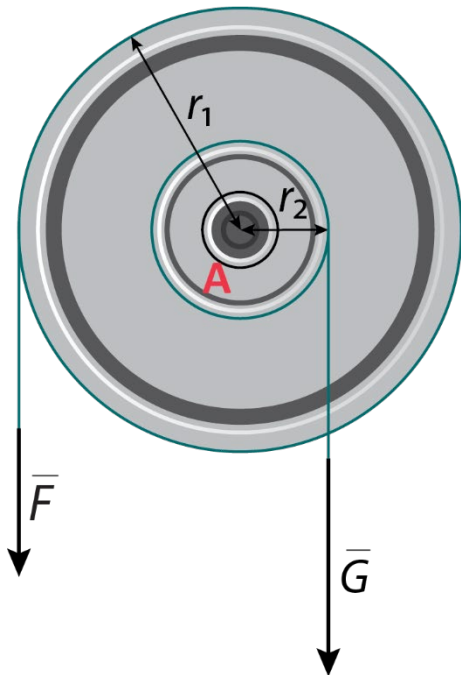
## Tehtävä 2.10.

suuremman sylinterin halkaisija  $r_1 = 0,127$  m

pienemmän sylinterin halkaisija  $r_2 = 0,024$  m

moottorin massa  $m = 180$  kg

Piirretään voimakuvio, josta liinoissa vaikuttavat voimat käyvät ilmi.



Voimien vinssin pisteeseen A kohdistamat momentit ovat yhtä suuret

$$Fr_1 = Gr_2$$

Moottorin paino  $G = mg$ . Moottorin nostamiseen tarvittavan voiman suuruus

$$F = \frac{mgr_2}{r_1} = \frac{180 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,024 \text{ m}}{0,127 \text{ m}} = 333,694 \text{ N} \approx 330 \text{ N}.$$

b) Kun moottoria nostetaan, moottorin potentiaalienergia suurenee. Nostamisessa tehty työ on yhtä suuri kuin moottorin potentiaalienergian muutos

$$\begin{aligned} W &= \Delta E_p \\ &= mgh \\ &= 180 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 1,2 \text{ m} \\ &= 2118,96 \text{ J} \approx 2,1 \text{ kJ}. \end{aligned}$$

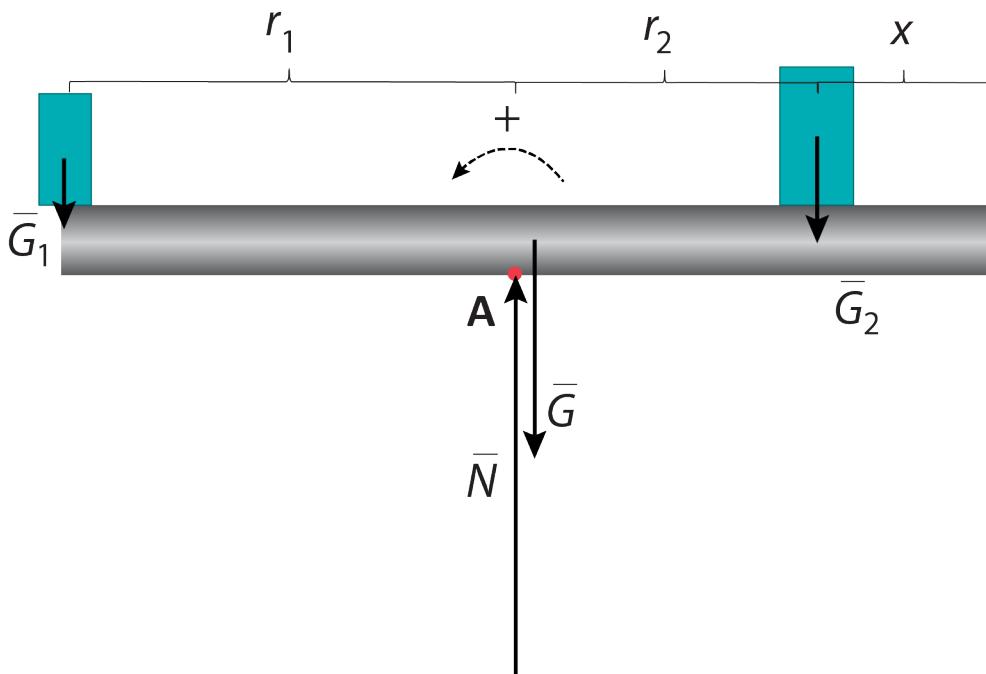
## Tehtävä 2.11.

punnuksen 1 massa  $m_1 = 1,4 \text{ kg}$

rautatangon pituus  $l = 0,86 \text{ m}$

punnuksen 2 etäisyys rautatangon päästä  $x = 0,18 \text{ m}$

a)



$\bar{G}_1$  = punnuksen 1 paino

$\bar{G}_2$  = punnuksen 2 paino

$\bar{G}$  = rautatangon paino

$\bar{N}$  = tankoa kannatteleva tukivoima

b) Valitaan kiertoakseliksi piste, josta rautatanko on tuettu. Merkitään kiertoakselia kirjaimella A.

Punnuksen 1 etäisyys rautatangon keskipisteestä  $r_1 = \frac{l}{2}$ .

Punnuksen 2 etäisyys rautatangon keskipisteestä

$$r_2 = \frac{l}{2} - x.$$

Systeemi on tasapainossa pyörimisen suhteen.

Tarkastellaan momenttiehtoa kiertoakselin A suhteen.

$$\Sigma M_A = 0$$

$$G_1 r_1 - G_2 r_2 = 0$$

$$m_1 g r_1 - m_2 g r_2 = 0$$

Lisättävän punnuksen massa on

$$m_1 g r_1 = m_2 g r_2$$

$$m_2 = \frac{m_1 r_1}{r_2} = \frac{m_1 \frac{l}{2}}{\frac{l}{2} - x} = \frac{1,4 \text{ kg} \cdot \frac{0,86 \text{ m}}{2}}{\frac{0,86 \text{ m}}{2} - 0,18 \text{ m}} = 2,408 \text{ kg} \approx 2,4 \text{ kg}.$$

c) Systeemi on tasapainossa etenemisen suhteen, jolloin  $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ . Otetaan voimien suunnat huomioon ja tarkastellaan voimien suuruuksia tasapainoehdon ja b-kohdan tuloksen mukaan. Lasketaan tankoa tukevan voiman  $N$  suuruus.

$$N - G - G_1 - G_2 = 0$$

$$N = mg + m_1g + m_2g$$

$$N = g(m + m_1 + m_2)$$

$$= 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot (21 \text{ kg} + 1,4 \text{ kg} + 2,408 \text{ kg})$$

$$= 243,366 \text{ N} \approx 240 \text{ N}.$$

## Tehtävä 2.12.

a) Koska tölkinavaajassa voimat kohdistuvat tukipisteen samalle puolelle, kyseessä on yksivartinen vipu. Korkinavaajassa voimat kohdistuvat tukipisteen eri puolille, joten kyseessä on kaksivartinen vipu.

b) käden etäisyys kiertoakselista  $r_1 = 140 \text{ mm} = 0,140 \text{ m}$   
avaajan pään etäisyys kiertoakselista  $r_2 = 0,028 \text{ m}$   
käden avaajaan kohdistama voima  $F = 8,5 \text{ N}$

Kaksivartisessa vivussa voimien aiheuttamat momentit ovat yhtä suuret. Koska vipu on tasapainossa pyörimisen suhteen eli  $\sum M = 0$ , niin voidaan ratkaista korkinavaajan aiheuttaman voiman  $F_2$  suuruus.

Tällöin

$$F_1 r_1 = F_2 r_2$$

$$F_2 = \frac{F_1 r_1}{r_2} = \frac{8,5 \text{ N} \cdot 0,140 \text{ m}}{0,028 \text{ m}} = 42,5 \text{ N} \approx 43 \text{ N}.$$

- c) käden etäisyys kiertopisteestä  $r_1 = 124 \text{ mm} = 0,124 \text{ m}$   
tölkinavaajan tölkkiin kohdistaman voiman etäisyys  
kiertopisteestä  $r_2 = 8,4 \text{ mm} = 0,0084 \text{ m}$

Yksivartisessa vivussa on voimien aiheuttamat momentit yhtä suuret. Koska vipu on tasapainossa pyörimisen suhteen, niin  $\sum M = 0$ . Ratkaistaan, kuinka moninkertaisen voiman tölkinavaaja kohdistaa kanteen käytettyyn voimaan verrattuna.

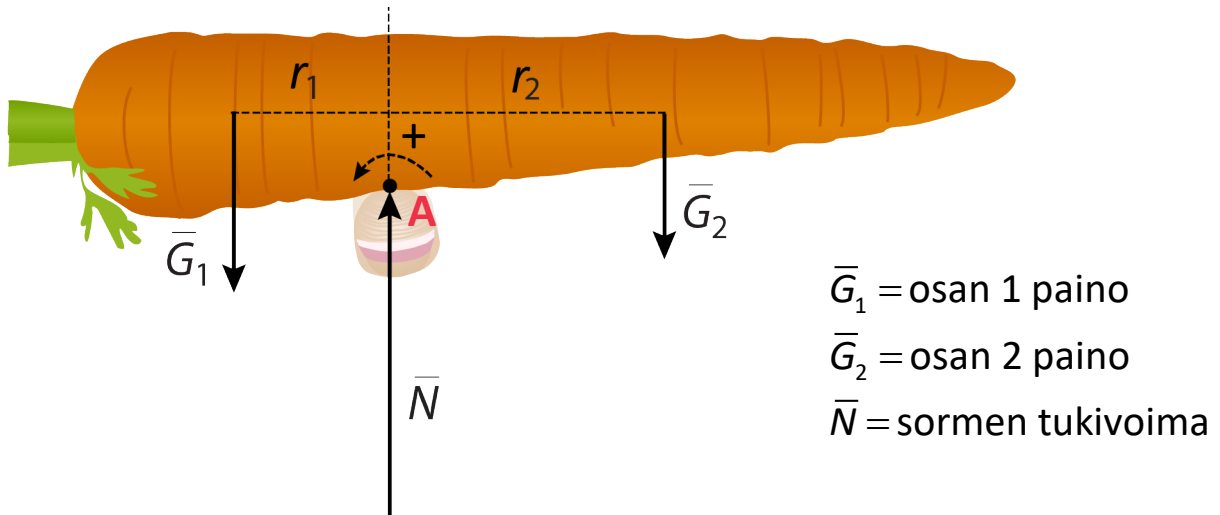
$$F_1 r_1 = F_2 r_2$$

$$F_2 = \frac{F_1 r_1}{r_2} = \frac{F_1 \cdot 0,124 \text{ m}}{0,0084 \text{ mm}} = 14,76 F_1 \approx 15 F_1.$$

Tölkinavaajan kanteen kohdistama voima on 15-kertainen.

## Tehtävä 2.13.

Porkkana on tasapainossa pyörimisen suhteen.



Kirjoitetaan tasapainoehto kiertoakselin A suhteen.

$$\sum M_A = 0$$

$$G_1 r_1 - G_2 r_2 = 0$$

$$G_1 r_1 = G_2 r_2$$

$$m_1 g r_1 = m_2 g r_2$$

$$m_1 r_1 = m_2 r_2.$$

Yhtälöstä nähdään, että  $r$ :n kasvaessa  $m$  pienenee. Jos  $r_1 < r_2$ , niin  $m_1 < m_2$ . Väite on väärin.

## Tehtävä 2.14.

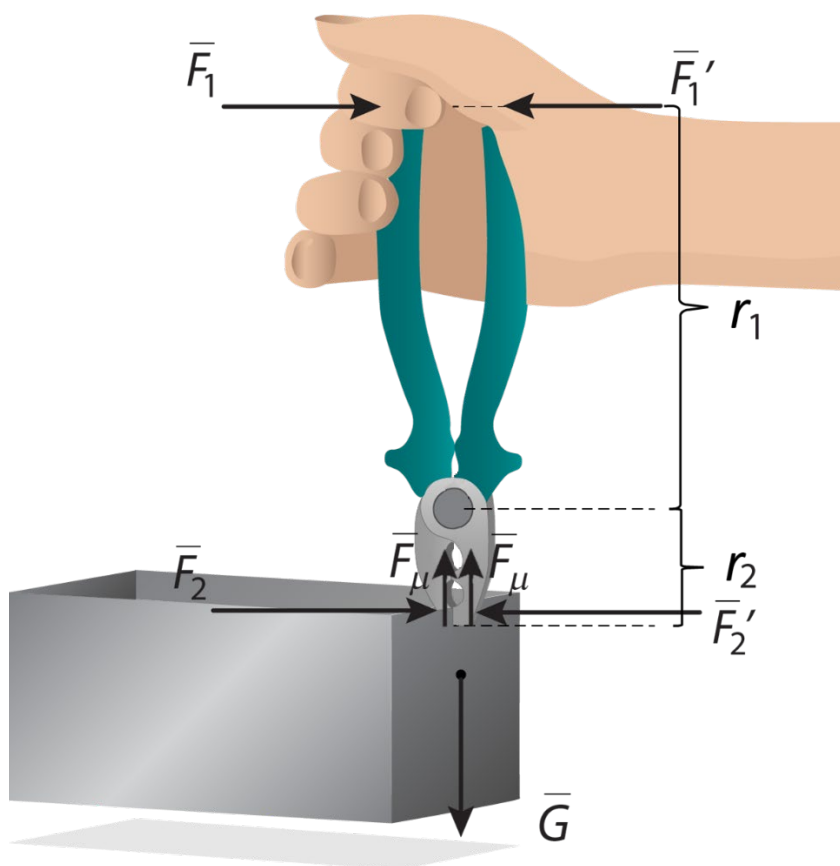
metallikappaleen massa  $m = 3,0 \text{ kg}$

leukojen etäisyys kiertoakselista  $r_1 = 5,0 \text{ cm} = 0,0050 \text{ m}$

pihdin varsien pituus  $r_2 = 16,0 \text{ cm} = 0,160 \text{ m}$

leukojen ja metallin välinen lepokitkakerroin on  $\mu = 0,30$

Piirretään tilanteesta voimakuvio.



$\bar{G}$  = metallikappaleen paino

$\bar{F}_1$  = pihtien puristamiseen tarvittava voima

$\bar{F}_2$  = pihtien kappaleeseen kohdistama voima

$\bar{F}_\mu$  = lepokitka

Metallikappale pysyy pihtien välissä. Valitaan positiivinen suunta ylöspäin, jolloin Newtonin II lain mukaisesti

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$F_{\mu} + F_{\mu} - G = 0$$

$$F_{\mu} = \frac{G}{2}.$$

Pihdit kohdistavat metallikappaleeseen voiman  $F_2$ . Metallikappaleen pinnan tukivoima  $N$  on yhtä suuri kuin voima  $F_2$ . Lepokitkan suuruudeksi voidaan kirjoittaa

$$F_{\mu} = \mu N = \mu F_2.$$

Yhtälöstä ratkaistaan voima  $F_2$ .

$$F_2 = \frac{F_{\mu}}{\mu} = \frac{\frac{G}{2}}{\mu} = \frac{mg}{2\mu}$$

Momentin tasapainoehdon mukaan pihtejä tulee puristaa voimalla

$$\sum M = 0$$

$$F_1 r_1 - F_2 r_2 = 0$$

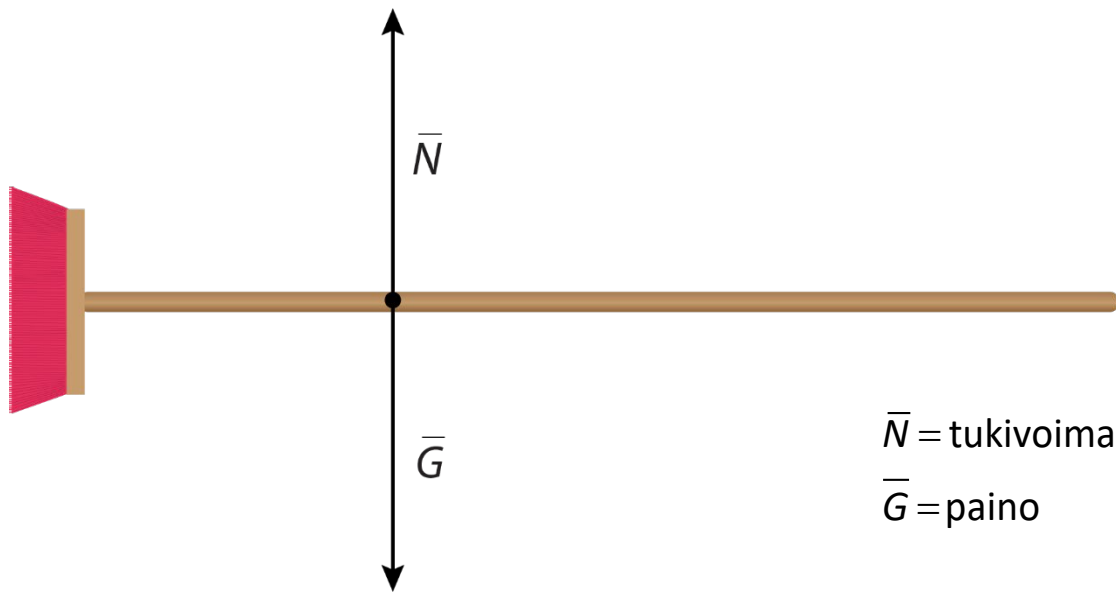
$$F_1 = \frac{F_2 r_2}{r_1}$$

Sijoitetaan voima  $F_2$  edelliseen yhtälöön.

$$F_1 = \frac{mgr_2}{2\mu r_1} = \frac{3,0 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,050 \text{ m}}{2 \cdot 0,30 \cdot 0,16 \text{ m}} = 15,328 \text{ N} \approx 15 \text{ N}.$$

Pihtejä pitää puristaa vähintään 15 N:n voimalla.

## Tehtävä 2.15.



b) Painopisteestään tuettu kappale on tasapainossa. Jos mikään muu voima kuin paino ja tukivoima eivät vaikuta harjaan, harja pysyy kallistetussa asennossa.

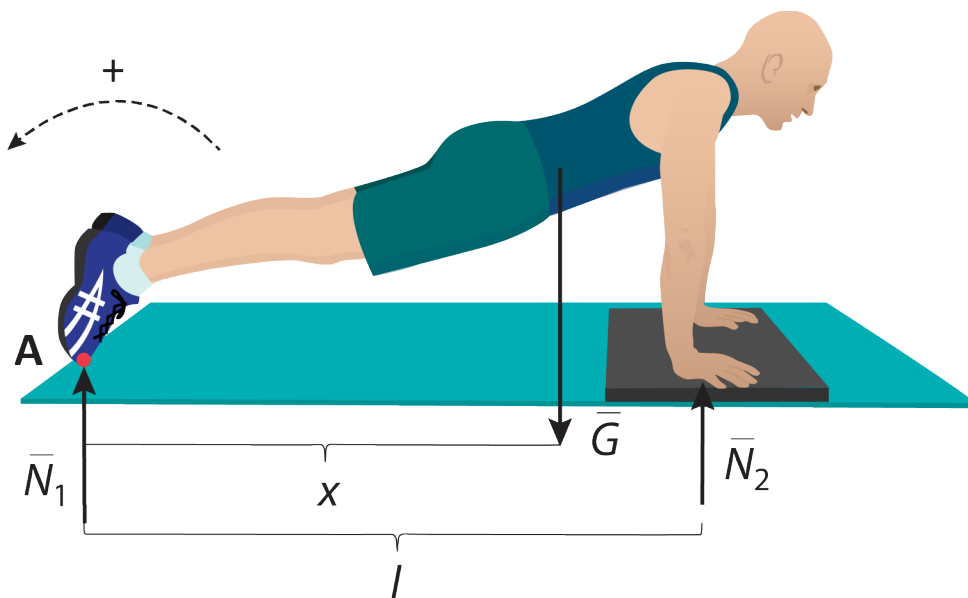
c) Massat eivät ole yhtä suuret. Harjapuolen massa on suurempi.

Jos harjaa ajatellaan kahtena eri kappaleena, varsi puolen painopisteen etäisyys kiertoakselista on suurempi kuin harjapuolen painopisteen etäisyys kiertoakselista. Koska harja on tasapainossa, tasapainoehdosta voidaan päätellä, että harjapuolen massa on suurempi.

## Tehtävä 2.16.

Painopisteen paikan voi määrittää esimerkiksi seuraavasti.

Ensin punnitaan oma massa vaa'alla normaalisti. Sitten asetutaan punnerrusasentoon kädet vaa'alla. Kirjataan ylös vaa'an lukema, sekä varpaiden etäisyys käsistä punnerrusasennossa.



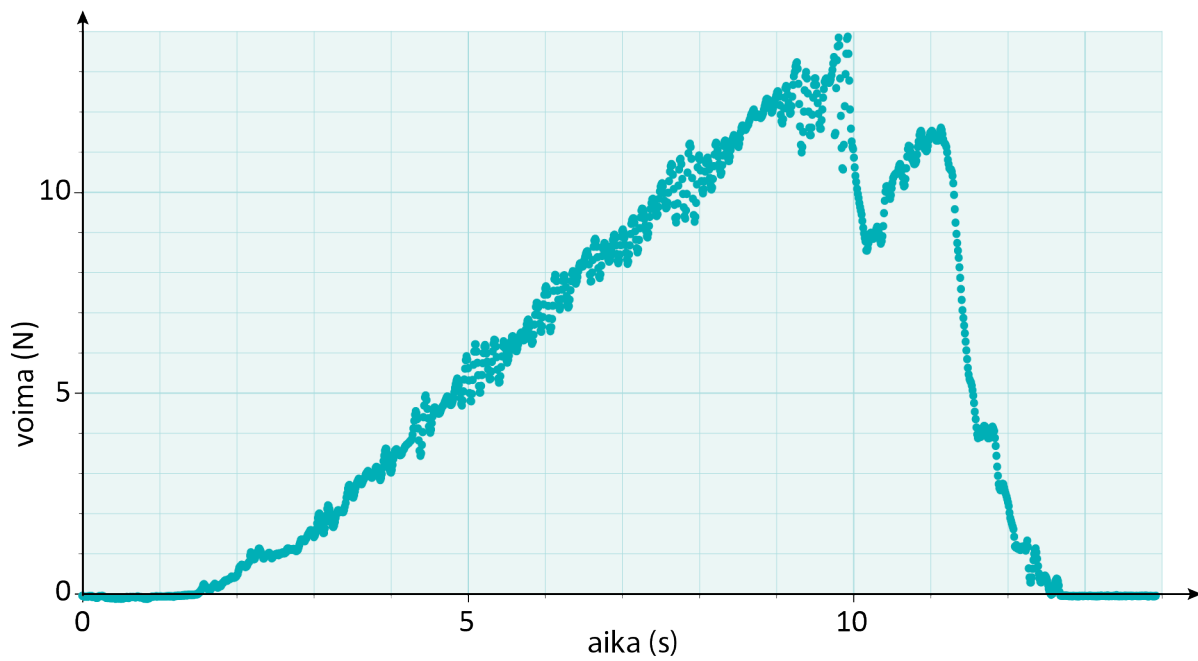
Punnitustulosten perusteella voidaan määrittää vaa'an tukivoima  $N_2$  punnerrusasennossa sekä kehon paino  $G$ .

Kun kiertoakseliksi valitaan varpaiden kärki, voidaan painon vaikutuspisteen etäisyys ratkaista tasapainoehdon avulla.

$$\begin{aligned}\sum M &= 0 \\ -Gx + N_2 l &= 0 \\ x &= \frac{N_2 l}{G} = \dots\end{aligned}$$

## Tehtävä 2.17.

a)

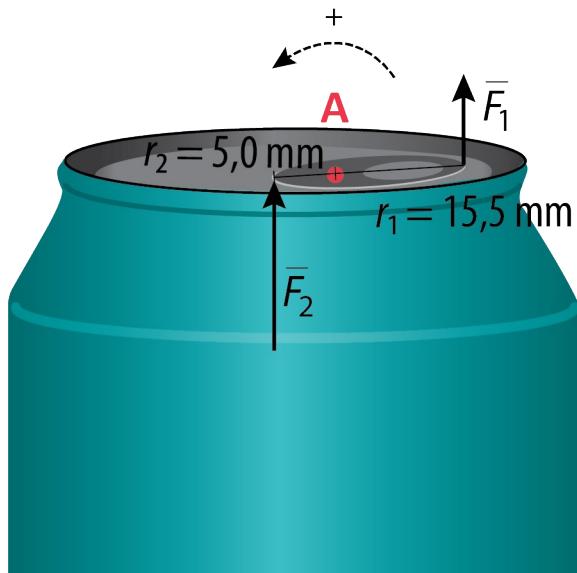


b) voima-anturin voiman etäisyys kiertopisteestä

$$r_1 = 0,155 \text{ m}$$

kannen klipsin kohdistaman voiman etäisyys

$$\text{kiertopisteestä } r_2 = 0,050 \text{ m}$$



$\vec{F}_1$  = voima-anturin voima

$\vec{F}_2$  = kannen klipsiin kohdistama voima

Newtonin III lain mukaan avausrenkaan kanteen kohdistama voima on yhtä suuri, mutta vastakkaissuuntainen kuin kannen avausrenkaaseen kohdistama voima. Voima  $\vec{F}_2$  kuvaa kanteen kohdistuvaa voimaa. Avausrengas on tasapainossa pyörimisen suhteen. Tarkastellaan tilanteessa vaikuttavia momentteja. Kiertoakseli on piste A.

$$\Sigma M_A = 0$$

$$F_1 r_1 - F_2 r_2 = 0$$

$$F_1 r_1 = F_2 r_2.$$

Voima-anturin avausrenkaaseen kohdistama voima oli kuvaajan perusteella  $F_{1, \max} = 13,8 \text{ N}$ .

Avausrengas kohdistaa momenttiehdon perusteella kanteen suurimmillaan voiman

$$F_2 = \frac{F_1 r_1}{r_2} = \frac{13,8 \text{ N} \cdot 0,0155 \text{ m}}{0,0050 \text{ m}} = 42,78 \text{ N} \approx 43 \text{ N}.$$

## Tehtävä 2.18.

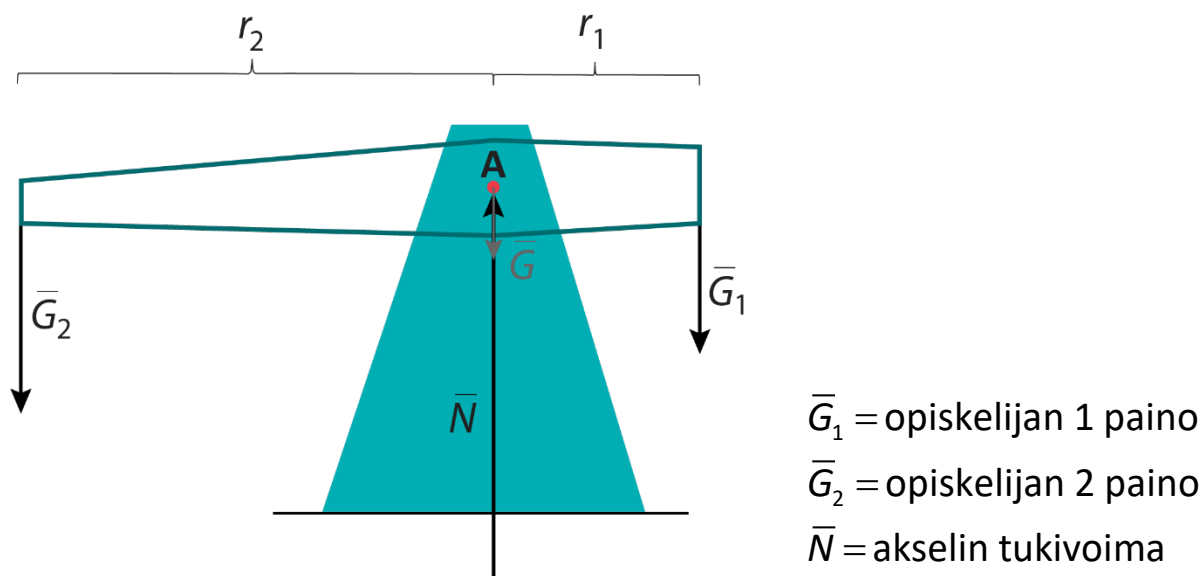
opiskelijan 1 etäisyys akselist  $r_1 = 0,85 \text{ m}$

opiskelijan 1 massa  $m_1 = 68 \text{ kg}$

opiskelijan 2 etäisyys akselist  $r_2 = 2,7 \text{ m}$

opiskelijan 2 massa  $m_2 = 76 \text{ kg}$

a) Tarkastellaan opiskelijoiden aiheuttamaa momenttia laitteen akselin A suhteen.



Opiskelijan 1 aiheuttama momentti

$$M_1 = G_1 r_1 = m_1 g r_1 = 68 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,85 \text{ m} = 567,018 \text{ Nm} \approx 570 \text{ Nm}.$$

Kun laitteen varsi on paikallaan vaakasuorassa, systeemi on tasapainossa pyörimisen suhteen eli  $\sum M_A = 0$ . Tällöin opiskelijoiden aiheuttamat momentit ovat yhtä suuret, sillä ne kiertävät vartta eri suuntiin. Opiskelijan 2 aiheuttama momentti on  $M_2 = M_1 = 570 \text{ Nm}$ .

- b) Opiskelija pystyy aiheuttamaan varteen enintään oman painonsa  $G_2$  suuruisen voiman. Kun varsi on vaakasuorassa, systeemi on tasapainossa pyörimisen suhteen eli

$$\Sigma M_A = 0$$

$$G_2 r_2 - G r_1 = 0$$

$$m_2 g r_2 - m g r_1 = 0$$

Ratkaistaan, kuinka suuri on suurin massa, jota opiskelija pystyy kannattelemaan.

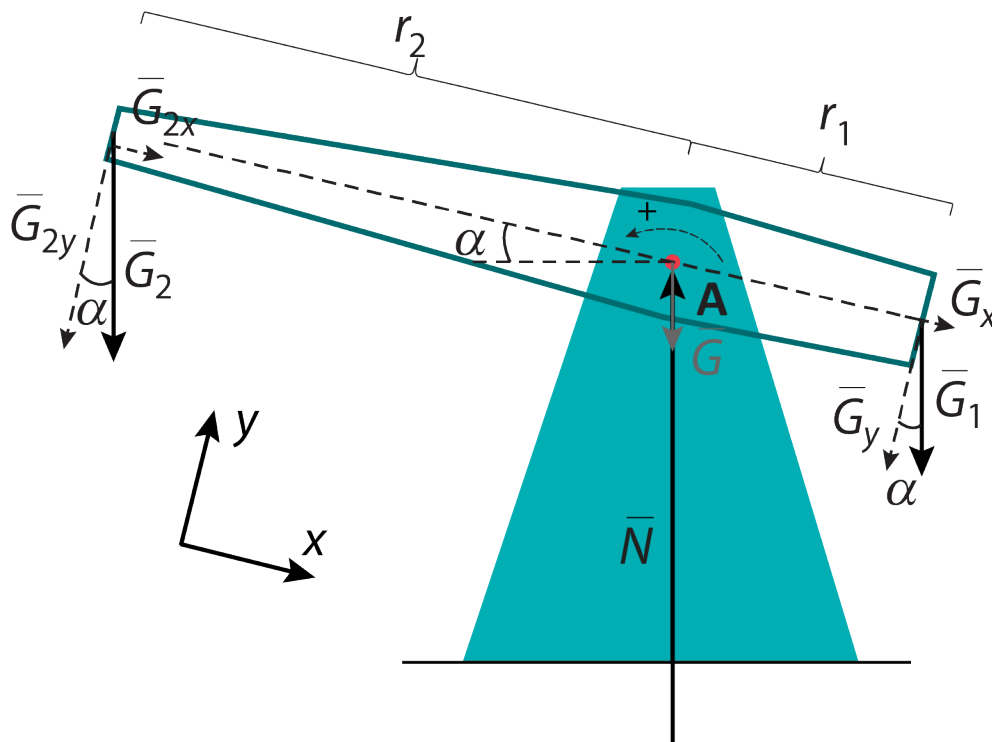
$$m_2 g r_2 = m g r_1$$

$$m = \frac{m_2 r_2}{r_1}$$

$$= \frac{76 \text{ kg} \cdot 2,7 \text{ m}}{0,85 \text{ m}}$$

$$= 241,41 \text{ kg} \approx 240 \text{ kg}.$$

c) Jos istuinkori on lattialla, nosturin varsi on vaakatasoon nähden kulmassa  $\alpha$ .



Vinossa oleva varsi on pyörimisen suhteen tasapainossa. Tarkastellaan pyörimisehtoa kiertoakselin A suhteen.

$$G_{2y}r_2 - G_y r_1 = 0.$$

Esitetään painojen komponentit kulman  $\alpha$  avulla, jolloin

$$m_2 g \cos \alpha r_2 = m g \cos \alpha r_1$$

$$m_2 r_2 = m r_1.$$

Opiskelija pystyy nostamaan kuorman  $m = \frac{m_2 r_2}{r_1}$ .

Koska tulos on sama kuin b-kohdan tulos, nostettavan kuorman suuruus ei riipu varren asennosta ja opiskelija pystyy nostamaan kuorman.

## Tehtävä 2.19.

- a) Tarkastellaan moottoripyörään vaikuttavien voimien momentteja etupyörän akselin suhteen. Kun kitkan ja takapyörän tukivoiman aiheuttama momentti on suurempi kuin moottoripyörän ja moottoripyöräilijän painon ja momentti, pyörä pyörähtää etupyörän ympäri.
- b) Jarrutuksen vuoksi moottoripyörän painopiste siirtyy lähemmäs etupyörää, jolloin etupyörään kohdistuva tukivoima kasvaa ja takapyörään kohdistuva tukivoima pienenee. Tämän johdosta eturenkaaseen vaikuttava kitka kasvaa, ja takarenkaaseen vaikuttava kitka pienenee.

## Tehtävä 2.20.

a) pään massa  $m = 5,0 \text{ kg}$

kulmat  $\alpha = 23^\circ$  ja  $\beta = 29^\circ$

mitat  $a = 7,0 \text{ cm} = 0,070 \text{ m}$  ja  $b = 4,3 \text{ cm} = 0,043 \text{ m}$

Tarkastellaan tilannetta sen pisteen suhteen, johon niskan tukivoima vaikuttaa. Niskan tukivoiman momentti on tämän pisteen suhteen nolla. Jotta pää pysyy tasapainossa, pään painon aiheuttaman momentin pitää olla yhtä suuri kuin lihaksen aiheuttaman voiman momentti. Valitaan positiivinen suunta vastapäivään.

Ratkaistaan päänä tukevan voiman suuruus tasapainoehdosta pyörimisen suhteen.

$$\sum M = 0$$

$$-Ga + Fb = 0$$

$$F = \frac{Ga}{b} = \frac{mga}{b} = \frac{5,0 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,070 \text{ m}}{0,043 \text{ m}} = 79,8488 \text{ N} \approx 80 \text{ N}.$$

Lihask tukee päänä voimalla 80 N.

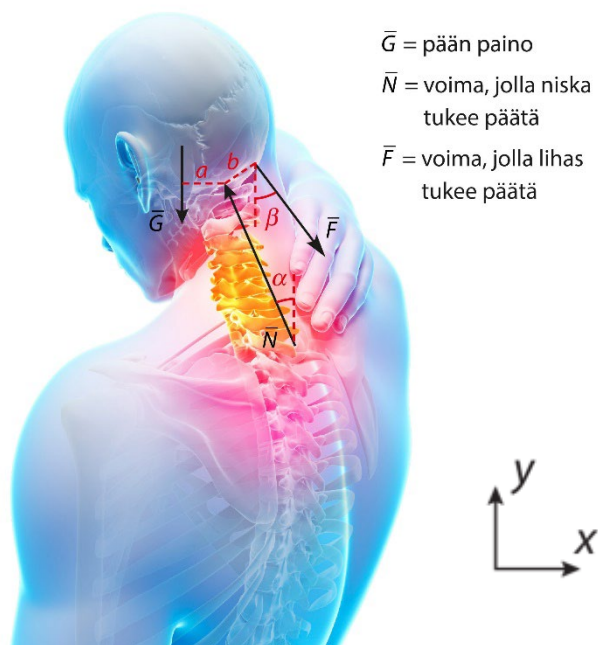
b) Kun pää on tasapainossa,  $\sum \vec{F} = \vec{0}$ .

Jaetaan voimat vaaka- ja pystysuuntaisiin komponentteihin.

Kuvasta nähdään, että  $\frac{F_x}{F} = \sin \beta$ , joten  $F_x = F \sin \beta = \frac{mga}{b} \sin \beta$

ja

$\frac{F_y}{F} = \cos \beta$ , joten  $F_y = F \cos \beta = \frac{mga}{b} \cos \beta$ .



$\vec{G}$  = pään paino

$\vec{N}$  = voima, jolla niskatukee päätä

$\vec{F}$  = voima, jolla lihas tukee päätä

x-suunnassa:  $F_x - N_x = 0$ , joten  $N_x = F_x$

y-suunnassa:  $N_y - F_y - G = 0$ , joten  $N_y = F_y + G$

Niskan tukivoima voidaan ratkaista voiman komponenttien avulla Pythagoraan lausetta käyttämällä.

$$\begin{aligned} N &= \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = \sqrt{F_x^2 + (F_y + mg)^2} = \sqrt{\left(\frac{mga}{b} \sin \beta\right)^2 + \left(\frac{mga}{b} \cos \beta + mg\right)^2} \\ &= mg \sqrt{\left(\frac{a}{b} \sin \beta\right)^2 + \left(\frac{a}{b} \cos \beta + 1\right)^2} \\ &= 5,0 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{7,0 \text{ cm}}{4,3 \text{ cm}} \cdot \sin 29^\circ\right)^2 + \left(\frac{7,0 \text{ cm}}{4,3 \text{ cm}} \cdot \cos 29^\circ + 1\right)^2} \\ &= 125,0311 \text{ N} \approx 130 \text{ N} \end{aligned}$$

Niska tukee päätä 130 N:n voimalla.

## Tehtävä 2.21.

- a) Palkin taipuma  $f_R$  on kääntäen verrannollinen kimmokertoimeen  $E$  mallin  $f_R = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ}$  mukaisesti.
- b) Koska teräksen kimmokerroin on 10 kertaa suurempi kuin puun kimmokerroin, mallin  $f_R = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ}$  perusteella teräspalkin taipuma  $f_R$  on 10 kertaa pienempi kuin puupalkin taipuma.
- c) Jos ajallisesti vaihtelevan kuormituksen taajuus on lähellä palkin ominaistaajuutta, palkin värähtely voimistuu resonanssin vuoksi. Tällöin palkin taipuma voi kasvaa merkittävästi, jolloin palkin rasitus kasvaa.

d) teräspalkin pituus  $l = 5,0 \text{ m}$

käytetyn teräsmateriaalin kimmokerroin

$$E = 200 \text{ GPa} = 200 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$$

teräspalkin jäyhyysmomentti

$$J = 1\,950\,000 \text{ mm}^4 = 195 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$$

teräspalkille asetettu kuorma  $q = 2\,000 \text{ N/m}$

Hyödynnetään aineistossa annettua kaavaa ja lasketaan palkin taipuma.

$$f_R = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{EJ} = \frac{5}{384} \cdot \frac{2000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (5,0 \text{ m})^4}{200 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 195 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4} = 0,042 \text{ m} = 42 \text{ mm}$$

Taipuma 42 mm ylittää sallitun 10 mm:n rajan. Toisin sanoen palkille ei saa asettaa 2 000 N/m viivakuormaa.

## Tehtävä 2.22.

putkiosuuden massa  $m_1 = 42,6 \text{ kg}$

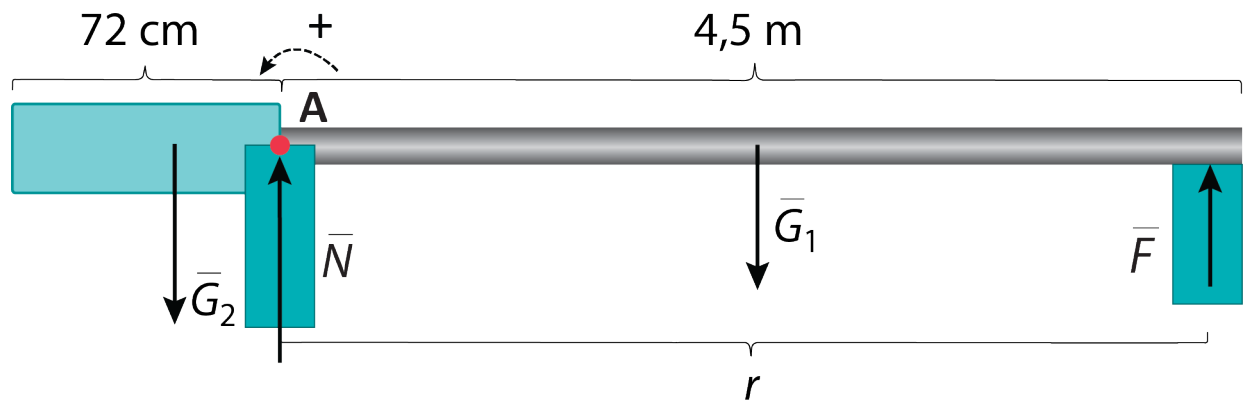
vastapainon massa  $m_2 = 68 \text{ kg}$

putken pituus  $l_1 = 4,5 \text{ m}$

vastapainon pituus  $l_2 = 0,72 \text{ m}$

a) kannatinpalkin etäisyys akselistä  $r = 4,4 \text{ m}$

Piirretään tilanteeseen liittyvä voimakuvio. (1 p)



$\bar{G}_1$  = puomin paino

$\bar{G}_2$  = vastapainon paino

$\bar{N}$  = akselin tukivoima

$\bar{F}$  = kannatinpalkin tukivoima

Tarkastellaan voimien aiheuttamaa momenttia akselin suhteen. Systemi on tasapainossa pyörimisen suhteen, jolloin

$$\Sigma M_A = 0$$

$$Fr - G_1 \frac{l_1}{2} + G_2 \frac{l_2}{2} = 0 \quad (2 \text{ p})$$

$$Fr - m_1 g \frac{l_1}{2} + m_2 g \frac{l_2}{2} = 0.$$

Kannatinpalkin putkeen kohdistama voima on

$$Fr = m_1 g \frac{l_1}{2} - m_2 g \frac{l_2}{2}$$

$$Fr = \frac{g(m_1 l_1 - m_2 l_2)}{2}$$

$$F = \frac{g(m_1 l_1 - m_2 l_2)}{2r} = \frac{9,81 \text{ m/s}^2 \cdot (28,6 \text{ kg} \cdot 4,5 \text{ m} - 108 \text{ kg} \cdot 0,72 \text{ m})}{2 \cdot 4,4 \text{ m}}$$

$$= 56,7865 \text{ N} \approx 57 \text{ N}.$$

(2 p)

b) Puomi on paikallaan ja etenemisen suhteen tasapainossa, jolloin  $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ . Voimakuvion perusteella voidaan kirjoittaa

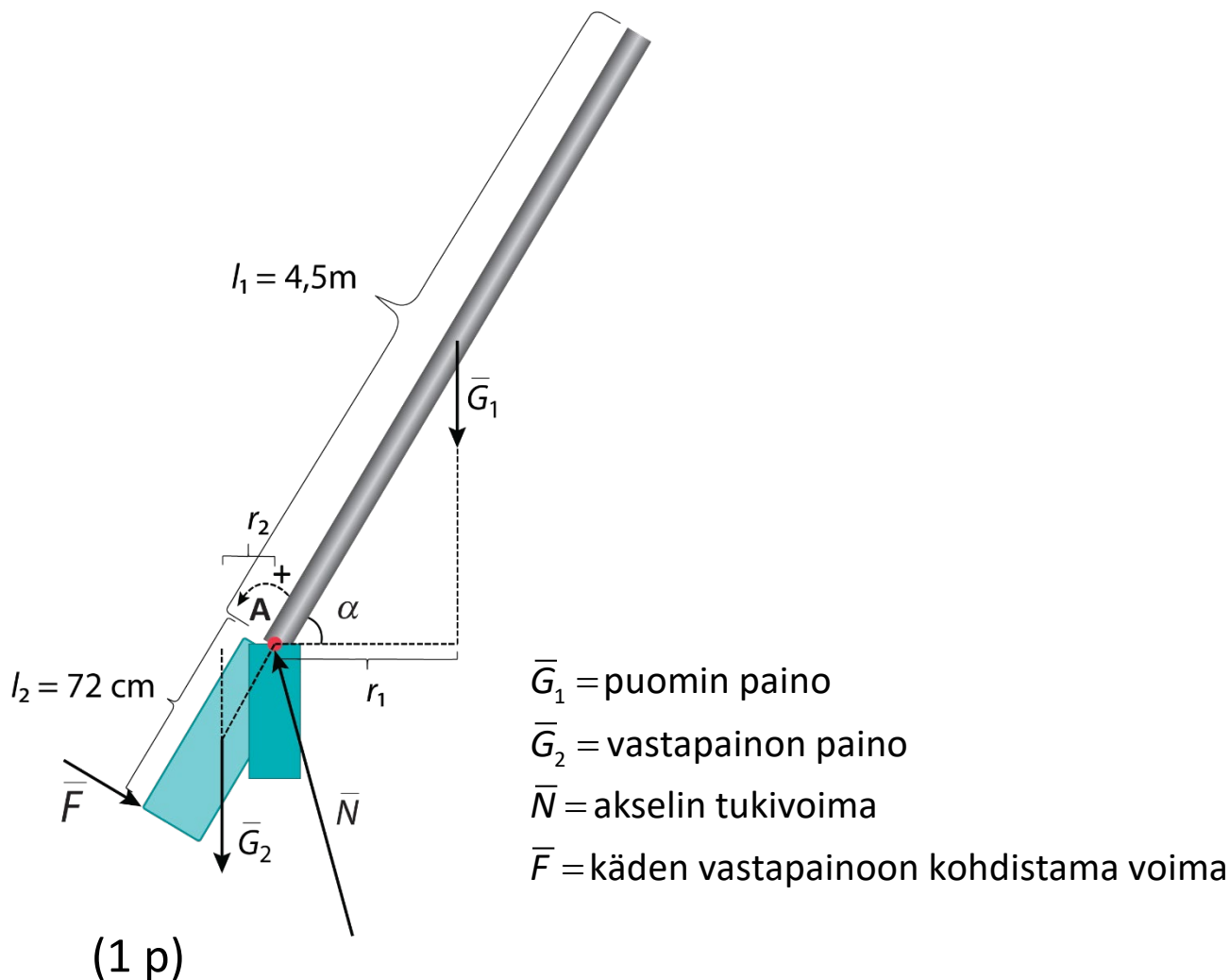
$$N + F - G_1 - G_2 = 0. \quad (2 \text{ p})$$

a-kohdan tulosta hyödyntäen akseliin kohdistuvaksi tukivoimaksi saadaan

$$\begin{aligned} N &= mg_1 + m_2g - F \\ &= 28,6 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 + 108 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 - 56,786 \text{ N} \\ &= 1283,259 \text{ N} \approx 1,3 \text{ kN}. \end{aligned}$$

(2 p)

- c) Tarkastellaan tilanteeseen liittyvää voimakuviota. Kun käsi painaa vastapainoa vinosti, tukee akselin tukivoima akselia vinosti.



Puomi on tasapainossa pyörimisen suhteen. Akselin suhteen tarkasteltuna puomiin kohdistuvien momenttien summa on nolla.

$$\sum M_A = 0$$

$$F l_2 + G_2 r_2 - G_1 r_1 = 0$$

(2 p, jos ei sanallista mainintaa max. 1 p)

Määritetään voimien kohtisuorat etäisyydet puomin akselista.

$$r_1 = \frac{l_1}{2} \cos \alpha \text{ ja } r_2 = \frac{l_2}{2} \cos \alpha \quad (1 \text{ p})$$

Puomin paikallaan pitämiseen tarvittava voima on

$$Fl_2 = m_1 g \frac{l_1}{2} \cos \alpha - m_2 g \frac{l_2}{2} \cos \alpha$$

$$F = \frac{g \cos \alpha}{2l_2} (m_1 l_1 - m_2 l_2)$$

$$= \frac{9,81 \text{ m/s}^2 \cdot \cos 70^\circ}{2 \cdot 0,72 \text{ m}} (28,6 \text{ kg} \cdot 4,5 \text{ m} - 108 \text{ kg} \cdot 0,72 \text{ m}) = 118,69 \text{ N} \approx 120 \text{ N}.$$

(2 p)

# 3. Tasainen ympyräliike

## Tehtävä 3.1.

Oikeat vastaukset:

- a) A
- b) B
- c) B
- d) C
- e) A

## Tehtävä 3.2.

- a) Mittarilukema kertoo, kuinka monta kierrosta kampiakseli pyörähtää minuutissa. Tehtävän tilanteessa kierrosluku on  $2,6 \cdot 1\,000 \text{ RPM} = 2\,600 \text{ RPM}$ .
- b) Moottorin kierrostaajuus kuvaa, kuinka monta kierrosta kampiakseli pyörähtää sekunnissa.

$$\text{Kierrostaajuus on } n = 1000 \cdot 2,6 \frac{1}{\text{min}} = \frac{2600}{60} \frac{1}{\text{s}} = 43,33333 \frac{1}{\text{s}} \approx 43 \frac{1}{\text{s}}.$$

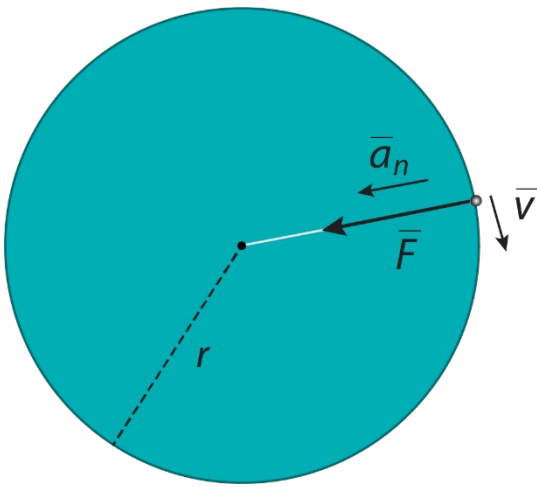
- c) Jaksonaika kertoo, kuinka pitkä aika yhteen kampiakselin kierrokseen kuluu. Jaksonaika on

$$T = \frac{1}{n} = \frac{1}{43,33333 \frac{1}{\text{s}}} = 0,02307692 \text{ s} = 23,07692 \text{ ms} \approx 23 \text{ ms}.$$

### Tehtävä 3.3.

ympyräradan säde  $r = 0,61 \text{ m}$   
narun jännitysvoima  $F = 4,4 \text{ N}$   
kuulan massa  $m = 35 \text{ g}$

Piirretään voimakuvio



Kuula on tasaisessa ympyräliikkeessä, jolloin Newtonin II lain mukaan ympyräradan säteen suunnassa suunnat huomioituna on

$$F = ma_n$$

$$F = m \frac{v^2}{r}. \quad \text{Kuulan nopeus on}$$

$$v = \sqrt{\frac{Fr}{m}} = \sqrt{\frac{4,4 \text{ N} \cdot 0,61 \text{ m}}{0,035 \text{ kg}}} = 8,757 \text{ m/s} \approx 8,8 \text{ m/s}.$$

### **Tehtävä 3.4.**

Ympyräliikkeessä keskipistettä kohti suuntautunut voima pitää kappaleen radallaan. Liikkeen pyrkimys keskipisteestä poispäin ei aiheudu voimasta vaan siitä, että liike jatkuu alkuperäiseen suuntaan, ellei mikään voima vaikuta. Tätä periaatetta kutsutaan jatkavuuden laiksi.

### **Tehtävä 3.5.**

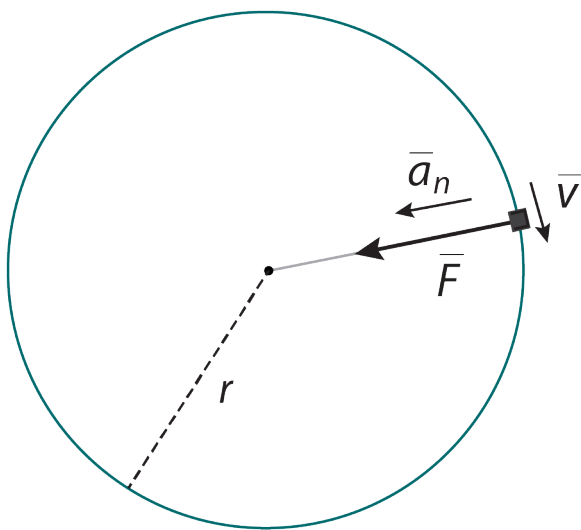
- a) Liike on yksiulotteista.
- b) Liike on kolmiulotteista.
- c) Liike on kaksiulotteista.

### Tehtävä 3.6.

ympyräradan säde  $r = 18 \text{ m}$

haluttu kiihtyvyys  $a_n = 7,8 \text{ g}$

Kyseessä on tasainen ympyräliike. Piirretään voimakuvio.



$\vec{F}$  = kosmonautin ympyräradalla pitävä voima

Tasaisessa ympyräliikkeessä kosmonauttiin aiheutuu voima  $\vec{F}$ , joka pitää kosmonautin ympyräradalla. Newtonin II lain mukaisesti säteen suunnassa suunnat huomioituina

$$F = ma_n = m \frac{v^2}{r}$$

Haluttu normaalikiihtyvyyden arvo on 7,8 kertaa putoamiskiihtyvyys. Ratkaistaan normaalikiihtyvyyden yhtälöstä ratanopeus.

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{a_n r}$$

$$= \sqrt{7,8 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 18 \text{ m}}$$

$$= 37,112 \text{ m/s} \approx 37 \text{ m/s}.$$

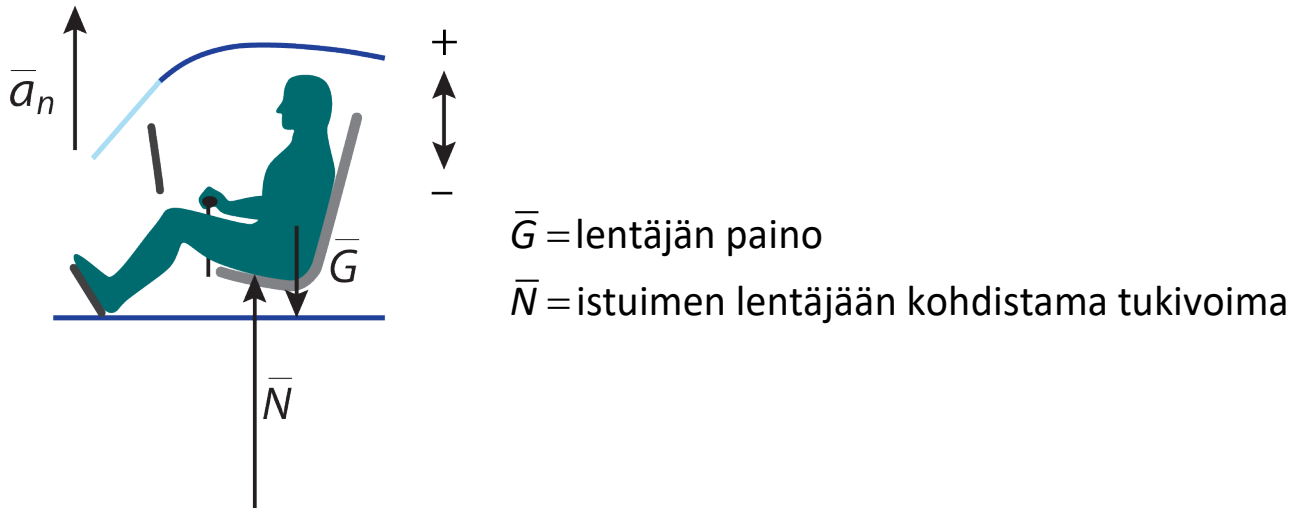
### Tehtävä 3.7.

- a) lentokoneen nopeus  $v = 290 \text{ km/h}$   
kaarevuussäde  $r = 150 \text{ m}$

Lentokoneen normaalikiihtyvyys nousussa on

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\frac{290 \text{ m}}{3,6 \text{ s}}\right)^2}{150 \text{ m}} = 43,26132 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 43 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

- b) Lentäjä tuntee painonsa suurempana, koska lentäjä painautuu nousun alussa kohti istuinta. Piirretään tilanteesta voimakuvio.



Newtonin II lain mukaan voimien suunnat huomioituina

$$N - G = ma_n$$

Istuimen tukivoima on

$$N = ma_n + G$$

Verrataan istuimen tukivoimaa lentäjän painoon.

$$\frac{N}{G} = \frac{ma_n + G}{G} = \frac{ma_n + mg}{mg} = \frac{a_n + g}{g} = \frac{43,26132 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 5,409920 \approx 5,4$$

Vaakalennossa istuimen tukivoima on yhtä suuri kuin lentäjän paino, joten lentäjä tuntee painonsa

5,4-kertaiseksi, kun lentokone kääntyy nousuun.

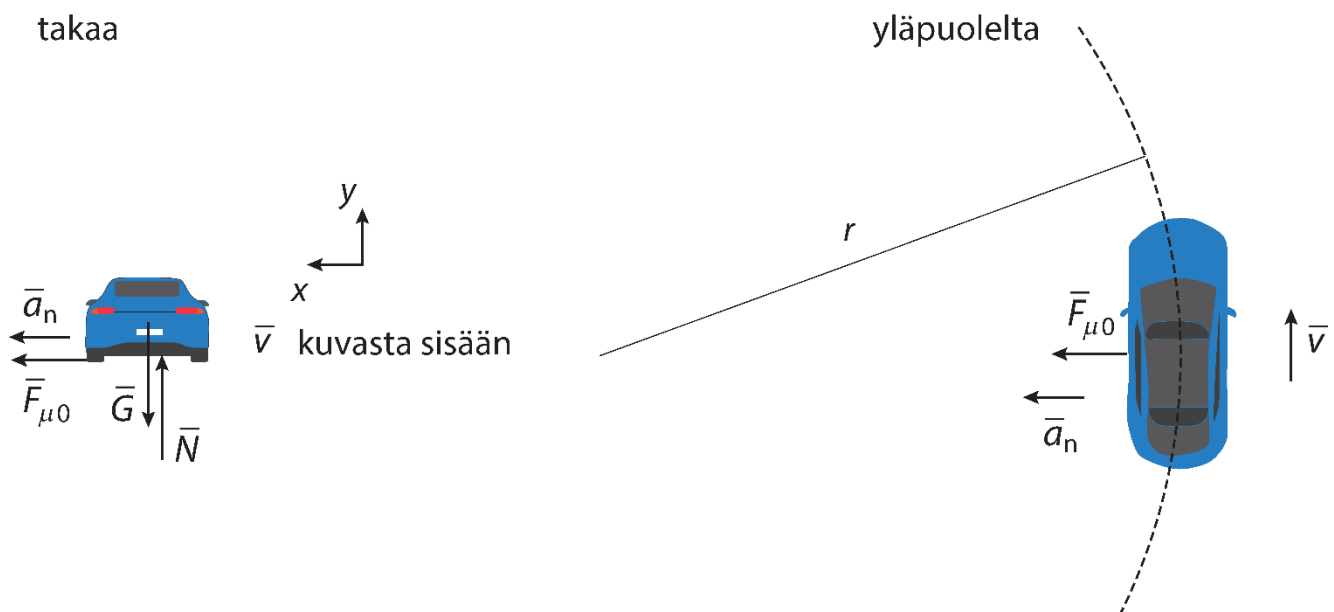
### Tehtävä 3.8.

auton nopeus  $v = 62 \text{ km/h}$

ympyräradan säde  $r = 41 \text{ m}$

auton massa  $m = 1\,410 \text{ kg}$

Laaditaan tilanteesta voimakuvio.



$\vec{G}$  = auton paino

$\vec{N}$  = tienpinnan tukivoima

$\vec{F}_{\mu 0}$  = lepokitka

Auto on tasaisessa ympyräliikkeessä. Newtonin II lain mukaan säteen suunnassa suunnat huomioituina on voimassa

$$F_{\mu 0} = ma_n.$$

Kitkalle on voimassa  $F_{\mu} = \mu N$  ja vaakasuoralla tiellä tukivoimalle  $N = G = mg$ . Tällöin

$$\mu N = ma_n$$

$$\mu mg = m \frac{v^2}{r}.$$

Lepokitkakertoimeksi saadaan

$$\mu = \frac{v^2}{gr} = \frac{\left( \frac{62}{3,6} \text{ m/s} \right)^2}{9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 41 \text{ m}} = 0,737 \approx 0,74.$$

### Tehtävä 3.9.

renkaiden ja lattian välinen kitkakerroin  $\mu = 0,58$

ympyräradan säde  $r = 3,5 \text{ m}$

putoamiskiihtyvyys  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

Auto kiertää tasaisessa ympyräliikkeessä ympyrärataa, jolloin Newtonin II lain mukaan säteen suunnassa on voimassa  $F_\mu = ma_n$ .

Vaakasuoralla pinnalla  $N = G = mg$ . Kitkalle  $F_\mu = \mu N$ . Auton nopeudeksi saadaan

$$\mu mg = m \frac{v^2}{r}$$

$$v^2 = \mu gr$$

$$v = \sqrt{\mu gr} = \sqrt{0,58 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 3,5 \text{ m}} = 4,4625 \text{ m/s} \approx 4,5 \text{ m/s}.$$

b) Edellisen kohdan nopeus on suurin mahdollinen nopeus, jolla auto vielä pysyy ympyräradalla. Koska auto kulkee tasaisessa ympyräliikkeessä, on yhteen kierrokseen kulunut aika

$$s = vt$$

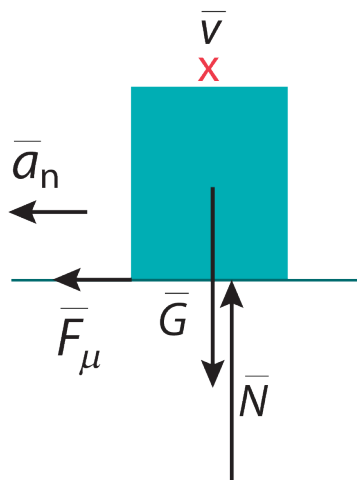
$$t = \frac{s}{v} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\mu gr}} = \frac{2\pi \cdot 3,5 \text{ m}}{\sqrt{0,58 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 3,5 \text{ m}}} = 4,9279 \text{ s} \approx 4,9 \text{ s}.$$

### Tehtävä 3.10.

ympyräradan säde  $r = 18 \text{ m}$

auton nopeus  $v = 21 \text{ km/h}$

a) Tarkastellaan tölkkiin vaikuttavia voimia tölkin takaa katsottuna



$\bar{G}$  = tölkin paino

$\bar{N}$  = auton katon tölkkiin kohdistama tukivoima

$\bar{F}_\mu$  = tölkin ja auton katon välinen lepokitka

Nopeus kuvassa eteenpäin.

Tölkin nopeus on kuvassa katsojasta poispäin. Tätä kuvataan punaisella x-merkillä.

b) Tarkastellaan lepokitkan suurinta arvoa eli täysin kehittynyttä lepokitkaa. Tölkki on tasaisessa ympyräliikkeessä. Newtonin II lain mukaan vaaka- ja pystysuunnassa suunnat huomioituna

$$x: F_{\mu} = m a_n$$

$$y: N - G = 0.$$

$$\text{Kitkalle } F_{\mu} = \mu N \text{ ja } a_n = \frac{v^2}{r}.$$

$$\text{Saadaan } \begin{aligned} x: \mu N &= m \frac{v^2}{r} \\ y: N &= G. \end{aligned}$$

Painolle  $G = mg$ . Lepokitkakertoimen suurin arvo on

$$\mu \cancel{m} g = \cancel{m} \frac{v^2}{r}$$

$$\mu = \frac{v^2}{gr} = \frac{\left(\frac{21 \text{ m}}{3,6 \text{ s}}\right)^2}{9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 18 \text{ m}} = 0,1927 \approx 0,19.$$

c) Jotta tölkki pysyisi katolla täytyy b-kohdan mukaan lepokitkan suurimmalle arvolle olla voimassa

$$F_{\mu} = m \frac{v^2}{r}.$$

Jos auton nopeus ja tölkin massa eivät muutu, on lepokitka kääntäen verrannollinen ympyräradan säteeseen. Jos radan sädettä kasvatetaan, lepokitka voi olla pienempi ja tölkki pysyy silti katolla. Niinpä tölkki pysyy katolla, jos radan sädettä kasvatetaan.

### Tehtävä 3.11.

- a) Avaruusaseman pyöriminen aiheuttaa astronautteihin tukivoiman, joka pitää astronautit ympyränmuotoisella radalla. Newtonin II mukaan säteen suunnassa tukivoima aiheuttaa normaalikiihtyvyyden  $N = ma_n$ .

Jotta saavutetaan painovoiman vaikutusta vastaavat olosuhteet, kappaleisiin kohdistuvan tukivoiman  $N$  tulee olla yhtä suuri kuin Maassa. Tukivoiman  $N$  suuruus on siis yhtä suuri kuin Maassa vallitseva painovoima  $G$ , saadaan kiihtyvyydeksi

$$G = m \frac{v^2}{r}$$

$$\cancel{m}g = \cancel{m} \frac{v^2}{r}$$

$$g = \frac{v^2}{r}$$

Astronautti etenee tasaisessa ympyräliikkeessä nopeudella  $v$ , jolloin astronautin kulkema matka on  $s = vt$ . Yhden kierroksen aikana astronautin kulkema matka on  $s = 2\pi r$  ja kierrosaika on  $T$ . Ratkaistaan kiihtyvyyden yhtälöstä nopeus ja sijoitetaan kierrostaajuus yhtälöön.

$$s = vt \quad \parallel \quad v = \sqrt{gr}$$

$$2\pi r = \sqrt{gr}T$$

$$\frac{1}{T} = \frac{\sqrt{gr}}{2\pi r}$$

$$n = \frac{\sqrt{\frac{g}{r}}}{2\pi} = \frac{\sqrt{\frac{9,81 \text{ m/s}^2}{37 \text{ m}}}}{2\pi} = 0,08195 \text{ 1/s} \approx 4,92 \text{ rpm.}$$

b) Kirjoitetaan astronauttiin vaikuttavan tukivoiman suuruus.

$$N = ma_n$$

$$N = m \frac{v^2}{r}.$$

a-kohdan mukaan nopeus  $v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{T}.$

Tukivoimaksi saadaan

$$N = m \frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = m \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4\pi^2 m r}{T^2}.$$

Tukivoiman suuruus on sitä suurempi, mitä suurempi säde on. Tukivoima siis pienenee mitä lähemmäksi avaruusaseman keskustaa astronautti liikkuu.

## Tehtävä 3.12.

ympyräradan säde  $r = 0,56 \text{ m}$   
auton korkeus radan alimpaan kohtaan  
nähdessä  $h = 0,32 \text{ cm}$   
auton massa  $m = 48 \text{ g}$

- a) Tarkastellaan tilannetta mekaanisen energian säilymislain avulla, jossa paikoiltaan lähteneen auton potentiaalienergiaa muuntuu auton liike-energiaksi. Sovitaan, että auton potentiaalienergian nollataso on radan alimmassa kohdassa. Mekaanisen energian säilymislain mukaan

$$E_{ka} + E_{pa} = E_{kl} + E_{pl}$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

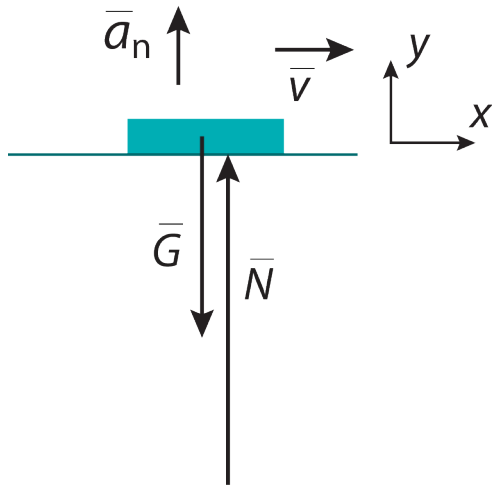
$$gh = \frac{1}{2}v^2.$$

Auton nopeus radan alimmassa kohdassa on

$$v^2 = 2gh$$

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 0,32 \text{ m} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2} = 2,50567 \text{ m/s} \approx 2,5 \text{ m/s}.$$

b)



$\bar{G}$  = auton paino

$\bar{N}$  = tienpinnan autoon kohdistama tukivoima

Auto etenee radan alimmassa kohdassa  
ympyräliikkeessä. Newtonin II lain mukaan voimien  
suunnat huomioituna

$$N - G = ma_n$$

Painolle  $G = mg$

$$N = m \frac{v^2}{r} + mg.$$

Käytetään a-kohdassa laskettua nopeutta. Tienpinnan  
autoon kohdistama tukivoima on

$$N = m \frac{2gh}{r} + mg = mg \left( \frac{2h}{r} + 1 \right)$$

$$N = 48 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot \left( \frac{2 \cdot 0,32 \text{ m}}{0,56 \text{ m}} + 1 \right) = 1,0090 \text{ N} \approx 1,0 \text{ N}.$$

c) Autoon vaikuttava tukivoima riippuu auton lähtökorkeudesta.

$$N = mg \left( \frac{2h}{r} + 1 \right)$$

Yhtälöstä nähdään, että tukivoima on suoraan verrannollinen auton lähtökorkeuteen ja kääntäen verrannollinen ympyräradan säteeseen. Mitä korkeammalta auto päästetään irti, sitä suurempi on radan autoon kohdistama tukivoima. Mitä suurempi on ympyräradan säde, sitä pienempi on radan autoon kohdistama tukivoima.

### Tehtävä 3.13.

jääpalan lähtökorkeus  $h$

ympyräradan säde  $r = 0,12 \text{ m}$

Jääpala voi irrota kohdassa, jossa rata alkaa kaareutua alaspäin. Kun jääpala on juuri irtoamaisillaan radasta, radan jääpalaan kohdistama tukivoima on nolla eli  $N = 0 \text{ N}$ . Jääpala on tällöin ympyräliikkeessä ja jääpalaan kohdistuu vain jääpalan paino. Newtonin II lain mukaan ympyräradan säteen suunnassa

$$G = ma_n$$

$$mg = ma_n$$

$$g = \frac{v^2}{r}.$$

Tarkastellaan jääpalan nopeutta mekaanisen energian säilymislain mukaan ja sovitaan potentiaalienergian nollatasoksi kohta, jossa jääpala on irtoamassa radasta. Jääpala lähtee liikkeelle paikaltaan. Mekaanisen energian säilymislain mukaan

$$E_{\text{pa}} = E_{\text{kl}}$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v^2 = 2gh.$$

Sijoitetaan saatu nopeuden neliö ympyräliikkeen lausekkeeseen, jolloin

$$g = \frac{2gh}{r}$$

$$h = \frac{r}{2} = \frac{0,12 \text{ m}}{2} = 6,0 \text{ cm.}$$

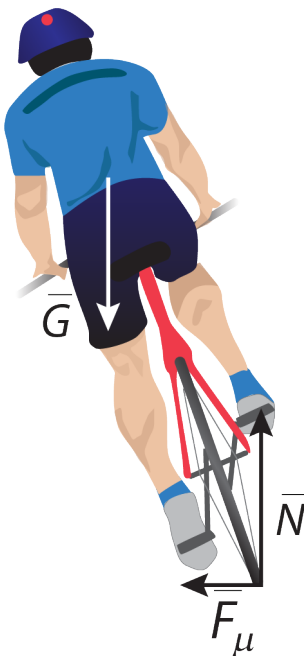
Jääpala voidaan päästää liukumaan korkeudelta 6,0 cm.

### Tehtävä 3.14.

$$r = 15 \text{ m}$$

$$v = 36,0 \text{ km/h} = 10,0 \text{ m/s}$$

Polkupyöräilijä on tasaisessa ympyräliikkeessä. Pyöräilijään vaikuttava voiman momentti on nolla, jos kokonaisvoiman vaikutussuora kulkee pyöräilijän painopisteen kautta.



$\bar{G}$  = paino

$\bar{N}$  = tienpinnan tukivoima

$\bar{F}_\mu$  = tienpinnan ja renkaan välinen kitka

Pystysuunnassa voimien summa on Newtonin II lain mukaisesti nolla. Tällöin pystysuunnassa on voimassa

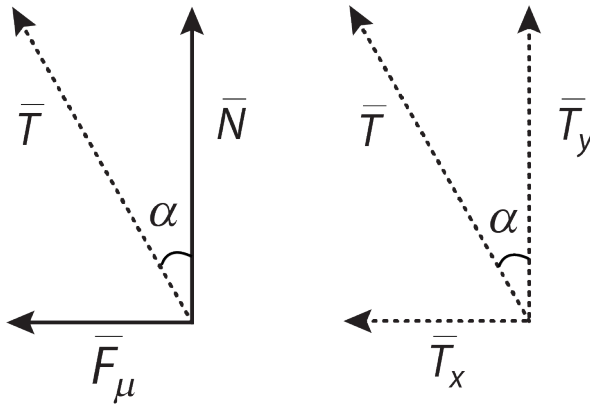
$$N - G = 0$$

$$N = G = mg$$

Kitka pitää polkupyöräilijän ympyräradalla, jolloin säteen suunnassa

$$F_\mu = ma_n.$$

Tienpinnan kokonaisvoima  $T$  muodostuu vaakasuuntaan olevasta kitkasta ja pystysuuntaan olevasta pinnan tukivoimasta  $N$ .



Jaetaan komponentteihin pinnan kokonaisvoima  $T$ .

$$x: T_x = T \sin \alpha = F_\mu$$

$$y: T_y = T \cos \alpha = G.$$

Sijoitetaan lausekkeet liikeyhtälöistä

$$x: T \sin \alpha = m \frac{v^2}{r}$$

$$y: T \cos \alpha = mg.$$

Kulman  $\alpha$  ratkaisemisen helpottamiseksi hyödynnetään trigonometrinen määritelmien yhteyttä  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ . Tähän päästään, kun edellä saaduista yhtälöistä ylempi yhtälö jaetaan alemmalla.

$$\frac{T \sin \alpha}{T \cos \alpha} = \frac{m \frac{v^2}{r}}{mg}$$

$$\tan \alpha = \frac{v^2}{rg} = \frac{(10,0 \text{ m/s})^2}{15 \text{ m} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}$$

$$\alpha = 34,199^\circ \approx 34^\circ$$

### Tehtävä 3.15.

- a) Kun purkki on tasaisessa ympyräliikkeessä, styroksinpala siirtyy kohti ympyrän keskipistettä.
- b) Vedellä on suurempi tiheys kuin styroksilla. Kun vesiastia on ympyräliikkeessä, vesi pakkautuu astian ulkoreunaan. Ympyräliikkeessä tiheämmät aineet pakkautuvat astian ulkoreunaan, jolloin styroksipala jää sisäreunaan. Kyseessä on kiihtyvyyssanturi, joka mittaa normaalikiihtyvyyden suuntaa.

## Tehtävä 3.16.

- c) Tarkastellaan ämpärissä olevaan pyyhekumiin kohdistuvia voimia rajatapauksessa, jossa ämpäri on ympyräliikkeen yläasennossa ja ämpäri ei kohdistatuivoimaa pyyhekumiin. Newtonin II lain mukaan

$$G = ma_n$$

$$\cancel{mg} = \cancel{m}a_n$$

$$g = a_n.$$

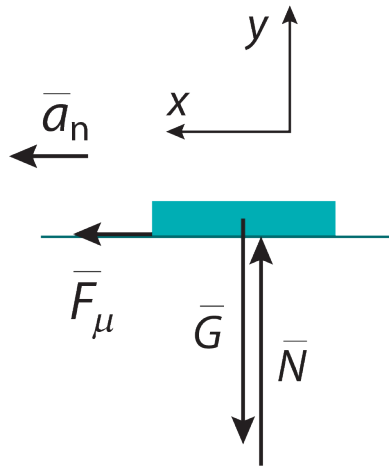
Määritetään nopeus, jolla pyyhekumi vielä pysyy ämpärissä

$$g = \frac{v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{gr}.$$

### Tehtävä 3.17.

a)



$\bar{G}$  = paino

$\bar{N}$  = alustan tukivoima

$\bar{F}_\mu$  = alustan ja prikan välinen lepokitka

Tarkastellaan lepokitkan suurinta arvoa eli täysin kehittynyttä lepokitkaa. Priikka on tasaisessa ympyräliikkeessä. Newtonin II lain mukaan vaaka- ja pystysuunnassa suunnat huomioituna

x-suunnassa  $F_\mu = ma_n$

ja y-suunnassa  $N - G = 0$ .

Kitkalle  $F_\mu = \mu N$  ja  $a_n = \frac{v^2}{r}$ . Vaakasuunnan ja pystysuunnan yhtälöt voidaan kirjoittaa

x-suunnassa  $\mu N = m \frac{v^2}{r}$

ja y-suunnassa  $N = G$ .

Painolle  $G = mg$ .

Ratkaistaan vaakasuunnan yhtälöstä lepokitkakertoimen arvo.

$$\mu mg = m \frac{v^2}{r}$$

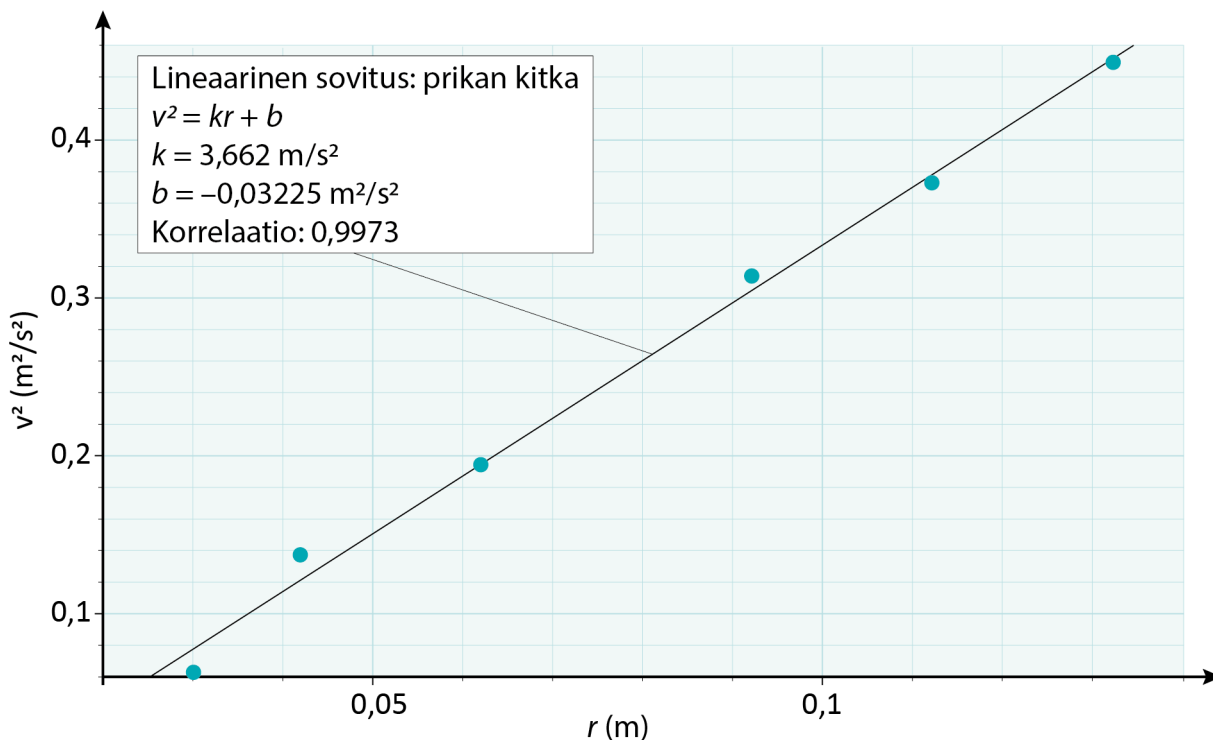
$$\mu = \frac{v^2}{gr}$$

b) Edellisen kohdan mukaan ympyräradan säteelle  $r$  ja prikan nopeuden  $v$  välille saadaan yhtälö

$$v^2 = \mu gr.$$

Prikan tasaisen ympyräliikkeen nopeuden neliö ja radan säde ovat suoraan verrannollisia.

- c) Koska edellisen kohdan mukaan prikan tasaisen ympyräliikkeen nopeuden neliö on suoraan verrannollinen radan säteeseen, on  $(r, v^2)$ -koordinaatiston kuvaajan fysikaalinen kulmakerroin  $k = \mu g$ . Määritetään kulmakerroin



$$\mu g = 3,662 \text{ m/s}^2.$$

Prikan ja alumiinilevyn välinen lepokitkakertoimen arvo on

$$\mu = \frac{3,662 \text{ m/s}^2}{g} = \frac{3,662 \text{ m/s}^2}{9,81 \text{ m/s}^2} = 0,373 \approx 0,37.$$

### Tehtävä 3.18.

korkin massa  $m_k = 9,3 \text{ g}$

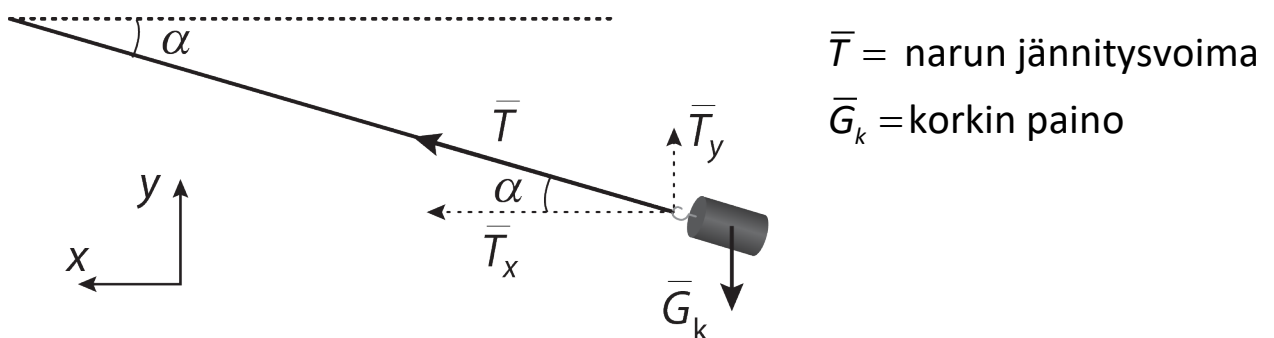
punnuksen massa  $m_p = 94,8 \text{ g}$

putken yläpuolisen narun pituus  $l = 0,212 \text{ m}$

- a) Jotta alempi punnus pysyisi paikallaan, on narun jännitysvoiman oltava yhtä suuri kuin punnuksen paino. Narun jännitysvoiman on oltava.

$$T = G_p = m_p g = 0,0948 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 0,9299 \text{ N} \approx 0,93 \text{ N}$$

- b) Tasaisessa ympyräliikkeessä kiertävä korkki pysyy samassa tasossa. Pystysuuntaisten voimien summa on silloin nolla. Laaditaan tilanteesta voimakuvio.



Tarkastellaan korkkiin kohdistuvia voimia pystysuunnassa. Newtonin II lain mukaan, kun korkin paikka ei muutu pystysuunnassa, on voimassa

$$T_y - G_k = 0$$

$$T_y = G_k$$

$$T \sin \alpha = m_k g.$$

Kulman  $\alpha$  arvoksi saadaan

$$\sin \alpha = \frac{m_k g}{T} = \frac{m_k g}{G_p} = \frac{m_k \cancel{g}}{m_p \cancel{g}} = \frac{9,3 \text{ g}}{94,8 \text{ g}}$$
$$\alpha = \sin^{-1} \left( \frac{9,3 \text{ g}}{94,8 \text{ g}} \right) = 5,6298^\circ \approx 5,6^\circ.$$

c) Korkki on tasaisessa ympyräliikkeessä, jolloin Newtonin II lain mukaan korkille

$$F = m_k a_n$$

$$T_x = m_k \frac{v^2}{r}.$$

Korkkia täytyy pyörittää nopeudella

$$T_x = m_k \frac{v^2}{r}$$

$$T \cos \alpha = m_k \frac{v^2}{r}.$$

Langan jännitysvoima on yhtä suuri kuin punnuksen paino, sillä punnus roikkuu paikoillaan,  $T = G_p$ . Saadaan yhtälö

$$G_p \cos \alpha = m_k \frac{v^2}{r}$$

$$m_p g \cos \alpha = m_k \frac{v^2}{r}$$

Ratkaistaan yhtälöstä nopeus.

$$\begin{aligned}v^2 &= \frac{m_p g \cos \alpha r}{m_k} = \frac{m_p g \cos \alpha \cdot (l \cos \alpha)}{m_k} \\v &= \sqrt{\frac{m_p g \cos \alpha \cdot (l \cos \alpha)}{m_k}} \\&= \sqrt{\frac{94,8 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cos(5,6298^\circ) \cdot (0,212 \text{ m} \cdot \cos(5,6298^\circ))}{9,3 \cdot 10^{-3} \text{ kg}}} \\&= 4,5821 \text{ m/s} \\&\approx 4,6 \text{ m/s}.\end{aligned}$$

- d) Jos korkin ratanopeus kasvaa, c-kohdan perusteella korkkiin kiinnitetyn narun jännitysvoima  $T$  kasvaa. Tällöin narussa roikkuvaan punnukseen kohdistuu suurempi voima kuin punnuksen paino  $G_p$ . Suurempi jännitysvoima siirtää narussa roikkuvaa punnusta ylöspäin. Samalla ympyräliikkeessä oleva punnus siirtyy kiertämään suurempaa ympyrärataa. Lopulta saavutetaan jälleen tilanne, jossa langan jännitysvoima ja punnuksen  $M$  paino  $G_p$  ovat yhtä suuret ja ympyräliikkeessä oleva punnus kiertää vakionopeudella suurempaa ympyrärataa.

### Tehtävä 3.19.

aisan pituus  $l = 5,0 \text{ m}$

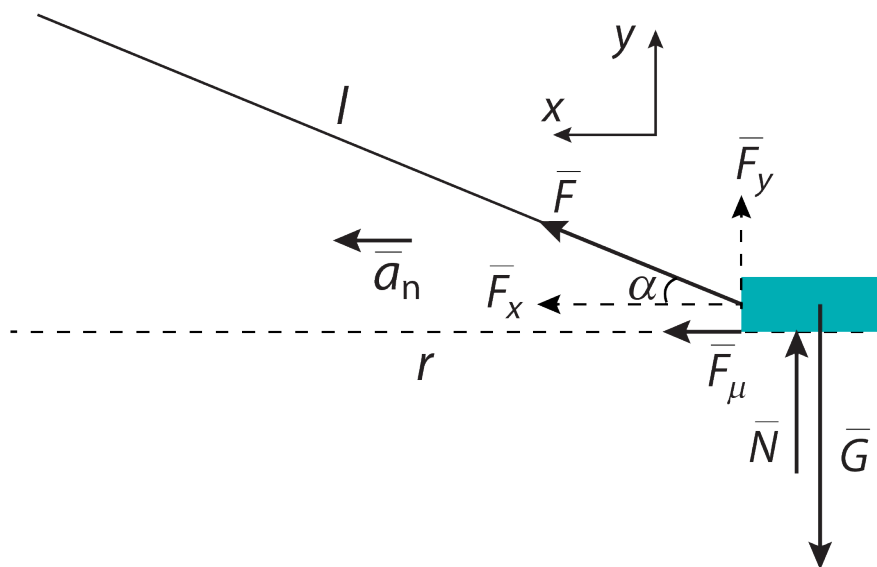
kierrosaika  $t = 3,8 \text{ s}$

kitkakerroin  $\mu = 0,11$

ympyräradan säde  $r = 4,5 \text{ m}$

kelkkailijan massa  $m = 57 \text{ kg}$

Piirretään kelkkaan vaikuttavat voimat



$\vec{G}$  = kelkan paino

$\vec{N}$  = jään kelkkaan kohdistama tukivoima

$\vec{F}$  = aisan kelkkaan kohdistama voima

$F_\mu$  = jään kelkkaan kohdistama voima

Kelkka liikkuu tasaisessa ympyräliikkeessä. Tarkastellaan kelkkaan kohdistuvia voimia Newtonin II lain mukaan vaaka- ja pystysuunnassa suunnat huomioituna

$$F_x + F_\mu = ma_n$$

$$N + F_y - G = 0.$$

Tangon ja jäänpinnan välinen kulma

$$\cos \alpha = \frac{r}{l} = \frac{4,5 \text{ m}}{5,0 \text{ m}}$$

$$\alpha = 25,84^\circ.$$

Esitetään tangon komponentit tangon ja jäänpinnan välisen kulman avulla ja kitkalle  $F_\mu = \mu N$  ja  $a_n = \frac{v^2}{r}$ .

$$\text{Saadaan } F \cos \alpha + \mu N = m \frac{v^2}{r}$$

$$N = G - F \sin \alpha.$$

Sijoitetaan tukivoiman lauseke

$$F \cos \alpha + \mu G - \mu F \sin \alpha = m \frac{v^2}{r}$$

$$F \cos \alpha + \mu mg - \mu F \sin \alpha = m \frac{v^2}{r}$$

$$F \cos \alpha - \mu F \sin \alpha = m \frac{v^2}{r} - \mu mg$$

$$F(\cos \alpha - \mu \sin \alpha) = m \frac{v^2}{r} - \mu mg$$

$$F = \frac{m \frac{v^2}{r} - \mu mg}{(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)}.$$

Koska kelkka liikkuu tasaisessa ympyräliikkeessä, on

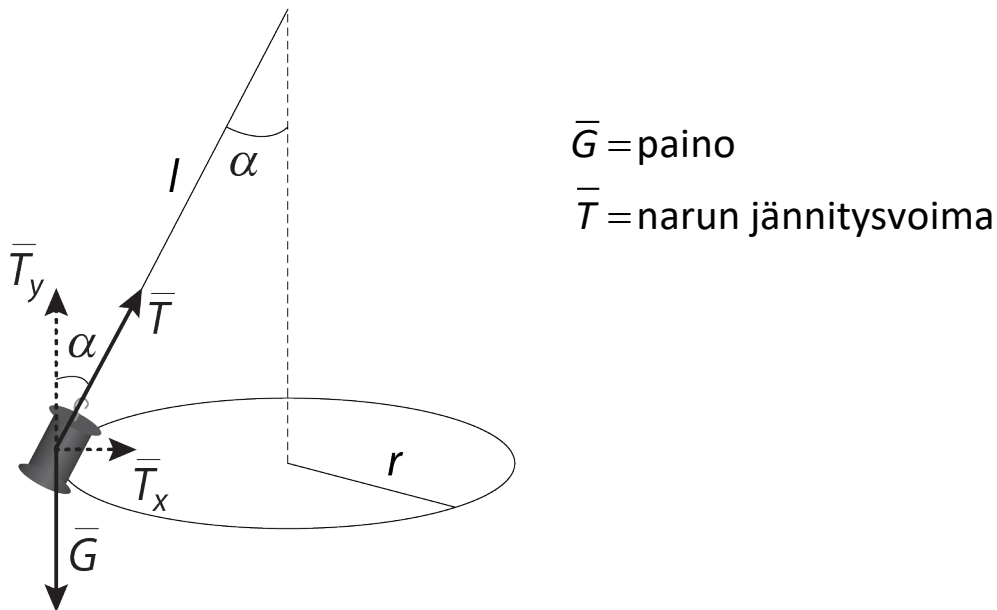
$$\text{nopeudelle } v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{t}.$$

Sijoitetaan saatu nopeus voiman lausekkeeseen. Aisaan vaikuttava voima on aisan suuntainen ja sen suuruus on

$$\begin{aligned} F &= \frac{m \frac{(\frac{2\pi r}{t})^2}{r} - \mu mg}{(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)} = \frac{m \frac{4\pi^2 r^2}{t^2 r} - \mu mg}{(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)} = \frac{m \frac{4\pi^2 r}{t^2} - \mu mg}{(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)} \\ &= \frac{57\text{kg} \cdot \frac{4\pi^2 \cdot 4,5\text{m}}{(3,8\text{s})^2} - 0,11 \cdot 57\text{kg} \cdot 9,81\text{m/s}^2}{(\cos 25,84^\circ - 0,11 \sin 25,84^\circ)} = 750,82\text{ N} \approx 750\text{ N}. \end{aligned}$$

### Tehtävä 3.20.

a) Kartioheilurin punnukseen vaikuttavat voimat:



Punnus on tasaisessa ympyräliikkeessä. Newtonin II lain mukaan  $\sum F = ma_n$ .

$$T_x = ma_n$$

$$T_x = m \frac{v^2}{r}.$$

Koska punnus etenee tasossa, on pystysuuntaisten voimien summa nolla.

$$\sum F_y = 0$$

$$T_y - G = 0$$

$$T_y = G$$

Ratkaistaan trigonometrian avulla vaakakomponentti

$$\tan \alpha = \frac{T_y}{T_x}$$

$$T_x = T_y \tan \alpha$$

ja sijoitetaan se tasaisen ympyräliikkeen yhtälöön.

$$T_x = m \frac{v^2}{r}$$

$$T_y \tan \alpha = m \frac{v^2}{r}$$

$$G \tan \alpha = m \frac{v^2}{r}$$

$$\cancel{m} g \tan \alpha = \cancel{m} \frac{v^2}{r}$$

Ratkaistaan yhtälöstä  $\tan \alpha$

$$\tan \alpha = \frac{v^2}{gr}$$

Koska massa ei esiinny yhtälössä, punnuksen massa ei vaikuta kiertokulman suuruuteen.

- b) Kun nopeus kasvaa, muuttuu  $\tan \alpha$  arvo suuremmaksi. Tämä tarkoittaa suurempaa kulmaa.

c) Kartioheilurin kierrosajan lauseke voidaan johtaa seuraavasti: Tasainen ympyräliike:  $\sum F = ma_n$

$$T_x = m \frac{v^2}{r}$$

$$T_y \tan \alpha = m \frac{v^2}{r}$$

$$G \tan \alpha = m \frac{v^2}{r}$$

$$mg \tan \alpha = m \frac{v^2}{r}$$

Koska tasaisessa ympyräliikkeessä punnus etenee tasaisella nopeudella, voidaan kirjoittaa:

$$g \tan \alpha = \frac{(2\pi r)^2}{t^2 r} = \frac{4\pi^2 r^2}{t^2 r} = \frac{4\pi^2 r}{t^2}$$

Ratkaistaan kuvan avulla säde  $r$ .

$$\sin \alpha = \frac{r}{L}$$

$$r = L \sin \alpha$$

Sijoitetaan säteen lauseke yhtälöön ja ratkaistaan kiertoaika.

$$g \tan \alpha = \frac{4\pi^2 r}{t^2}$$

$$g \tan \alpha = \frac{4\pi^2 L \sin \alpha}{t^2}$$

$$t^2 = \frac{4\pi^2 L \sin \alpha}{g \tan \alpha} = \frac{4\pi^2 L \cos \alpha}{g}$$

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{L \cos \alpha}{g}}$$

Kun kulman suuruus lähestyy arvoa  $90^\circ$ , kiertoaika  $t$  pienenee lähelle nollaa. Näin ollen  $90^\circ$  kulman saavuttaminen ei ole mahdollista.

Asian voi perustella myös voimakuvion avulla. Painovoima vaikuttaa punnukseen, joten narun jännitysvoimalla on oltava pystykomponentti, jotta punnus kiertäisi keskusta tasossa.

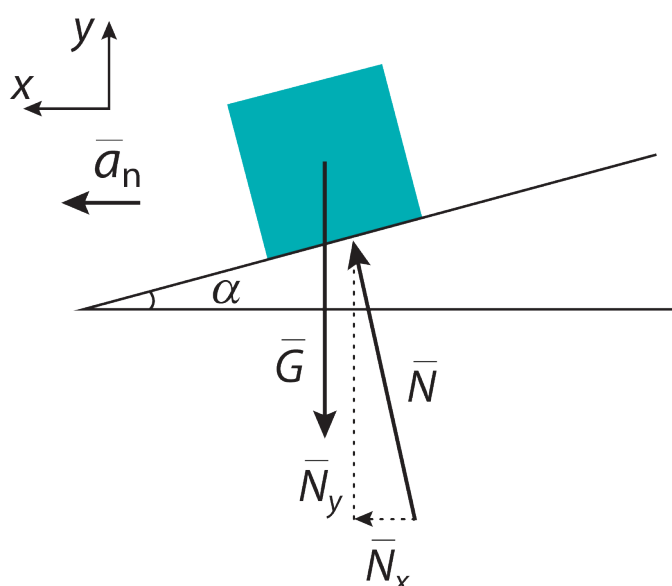
### Tehtävä 3.21.

radan kallistuskulma  $\alpha = 4,0^\circ$

kaarevuussäde  $r = 1\,900\text{ m}$

Matkustaja ei tunne sivusuuntaisia voimia silloin, kun penkin tukivoiman vaakakomponentti aiheuttaa normaalikiihtyvyyden. Penkin tukivoima ja radan tukivoima ovat samansuuntaiset.

Piirretään voimakuvio tilanteesta.



$\vec{G}$  = junan paino

$\vec{N}$  = radan tukivoima

Newtonin II lain mukainen liikeyhtälö junalle liikkeeseen nähden poikittaisessa suunnassa on  $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ .

Kirjoitetaan liikeyhtälö erikseen x-suunnassa ja

y-suunnassa ja sovitaan suunnat voimakuvion mukaan

$$\text{x-suunnassa: } N_x = ma_n \text{ eli } N \sin \alpha = m \frac{v^2}{r}$$

$$\text{y-suunnassa: } N_y - G = 0 \text{ eli } N \cos \alpha = mg$$

Tukivoiman yhtälöksi saadaan y-suunnan yhtälöstä

$$N = \frac{mg}{\cos \alpha}.$$

Sijoitetaan ratkaisu x-suunnan yhtälöön, jolloin saadaan

$$\frac{mg}{\cos \alpha} \sin \alpha = m \frac{v^2}{r} \quad || : m$$

$$g \tan \alpha = \frac{v^2}{r}$$

$$v^2 = rg \tan \alpha$$

$$v = \pm \sqrt{rg \tan \alpha} = \pm \sqrt{1900 \text{ m} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \tan 4,0^\circ}$$

$$= \pm 36,10216 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \pm 129,96778 \frac{\text{km}}{\text{h}} \approx \pm 130 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Matkustaja ei tunne sivusuuntaisia voimia jo juna ajaa kaartein nopeudella 130 km/h.

### Tehtävä 3.22.

- a) Pyörien vierimisvastus on ulkoinen voima, jonka takia moottoripyörän mekaaninen energia ei säily vakiona, kun moottoripyörä kulkee radalla. Pyörien ja radan pinnan välisen lepokitkan pitää toisaalta olla riittävän suuri, jotta pyörät eivät sudi. Lepokitka on moottoripyörää eteenpäin vievä voima.
- b) Kappaleen mekaaninen energia on kappaleen potentiaalienergian  $E_p$  ja liike-energian  $E_k$  summa. Koska tarkasteltavassa mallissa kappaleeseen ei vaikuta ulkoisia vastusvoimia, kappaleen mekaaninen energia säilyy. Toisin sanoen kappaleen mekaaninen energia on yhtä suuri mäen päällä ja silmukan yläosassa.
- c) Radan pinta aiheuttaa kappaleeseen tukivoiman  $N$ , jonka suunta on kohti silmukan keskipistettä. Radan ylimmässä kohdassa myös painon  $G$  suunta on kohti silmukan keskipistettä. Silmukan ylimmässä kohdassa kappaleen liikeyhtälö on

$$\Sigma F = ma_n$$

$$N + G = ma_n = m \frac{v^2}{r}.$$

d) Kappaleen mekaaninen säilyy, koska vastusvoimat oletetaan mallissa mitättömiksi. Valitaan potentiaalienergian nollassoksi mäen alareuna eli silmukan alaosa. Mäen yläosassa kappale on paikallaan ja kappaleella on ainoastaan potentiaalienergiaa. Mäen alaosassa potentiaalienergia on muuntunut kokonaan kappaleen liike-energiaksi. Silmukan yläosassa kappaleella on potentiaalienergiaa ja liike-energiaa.

$$E_{\text{lähtö}} = E_{\text{alaosa}} = E_{\text{yläosa}}$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv_a^2 = mg2r + \frac{1}{2}mv_y^2,$$

jossa  $m$  on kappaleen massa ja  $g$  on putoamiskiihtyvyys.

Kun tukivoima  $N$  lähestyy nollaa silmukan yläosassa, liikeyhtälö voidaan kirjoittaa  $G - ma_n = 0$ . Yhtälöstä voidaan ratkaista pienin vauhti  $v_y$ , jolla kappale pysyy vielä radalla putoamatta.

$$ma_n = G$$

$$m \frac{v_y^2}{r} = mg$$

$$v_y^2 = gr.$$

Koska mekaaninen energia säilyy,

$$mgh = \frac{1}{2}mv_a^2 = mg2r + \frac{1}{2}mv_y^2.$$

Tästä saadaan ratkaistua pienin mäen korkeus  $h$ .

$$mgh = mg2r + \frac{1}{2}mv_y^2$$

$$gh = g2r + \frac{1}{2}v_y^2$$

$$gh = g2r + \frac{1}{2}gr$$

$$h = 2r + \frac{1}{2}r = \frac{5}{2}r$$

Mäen korkeuden pitää olla vähintään  $\frac{5}{2}r$ , jotta kappale selvittää surmansilmukan.

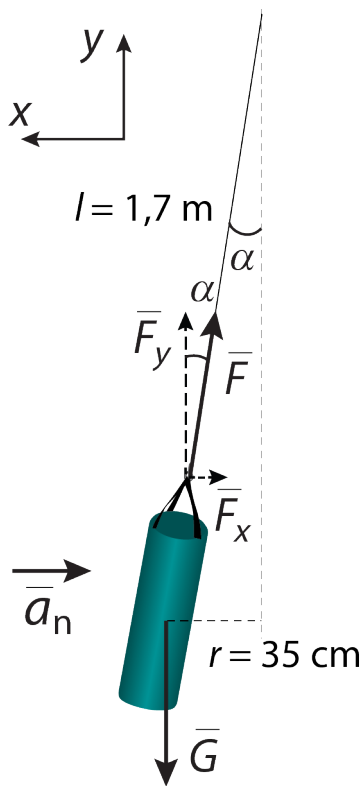
### Tehtävä 3.23.

nyrkkeilysäkin massa  $m = 19,6 \text{ kg}$

narun pituus  $l = 1,7 \text{ m}$

nyrkkeilysäkin etäisyys pystysuunnasta  $r = 0,35 \text{ m}$

a)



$\vec{G}$  = säkin paino

$\vec{N}$  = narun jännitysvoima

Voimakuvion pisteytys:

Kuvaan on merkitty kaikki tilanteessa vaikuttavat voimavektorit oikeisiin suuntiin ja oikeille kohdilleen.  
(2 p)

kappaleen paino painopisteestä

alustan tukivoima alkaa tai päättyy kappaleen alapinnasta

kitka alkaa kappaleen alareunasta

Voimavektorien pituudet ovat oikein. (1 p)

pystysuunnassa: tukivoima ja paino ovat yhtä pitkiä

Voimat on nimetty listaan kuvion alle ja kuvioon on merkitty nopeus- ja kiihtyvyyshvektorit (1 p)

Huom!

- Jos voimakuviossa on yksikin ylimääräinen voima, ei voimakuviosta saa pisteitä, 0 p.

- Jos kaksi tai useampi voimista puuttuu, ei voimakuviosta saa pisteitä, 0 p.

- Jos voimavektorien vaikutuspisteet ovat väärin, esimerkiksi voima on piirretty irti kappaleesta, kappaleen vierelle tai kappaleen eteen, kyseisestä voimasta ei anneta pisteitä. Jos kaksi tai useampi voima on näin piirretty, ei voimakuviosta saa pisteitä, 0 p.

- b) Kun nyrkkeilysäkki on tasaisessa ympyräliikkeessä, on Newtonin II lain mukaan voimien suunnat huomioituna vaaka- ja pystysuunnassa

$$F_x = ma_n \quad (1 \text{ p})$$
$$F_y - G = 0.$$

Esitetään narun jännitysvoimat komponenttimuodossa

$$F \sin \alpha = m \frac{v^2}{r} \quad (1 \text{ p})$$
$$F \cos \alpha = mg.$$

Lasketaan narun ja pystysuoran välinen kulma

$$\sin \alpha = \frac{0,35 \text{ m}}{1,7 \text{ m}}$$
$$\alpha = 11,881^\circ.$$

Narun jännitysvoima on

$$F = \frac{mg}{\cos \alpha} = \frac{19,6 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{\cos 11,881^\circ} = 196,485 \text{ N} \approx 196 \text{ N}. \quad (2 \text{ p})$$

c) Säkki liikkuu kierroksen vakionopeudella. Kierrosaika saadaan

$$t = \frac{s}{v} = \frac{2\pi r}{v}. \quad (2 \text{ p})$$

Säkkiin kohdistuvat voimat saadaan b-kohdan mukaan

$$F \sin \alpha = m \frac{v^2}{r} \quad (1 \text{ p})$$

$$F \cos \alpha = mg.$$

Säkin nopeus on

$$\cancel{m} g \tan \alpha = \cancel{m} \frac{v^2}{r} \quad (2 \text{ p})$$
$$v = \sqrt{gr \tan \alpha}.$$

Säkin kierrokseen kulunut aika

$$t = \frac{2\pi r}{\sqrt{gr \tan \alpha}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^2}{g \cancel{r} \tan \alpha}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 r}{g \tan \alpha}} \quad (2 \text{ p})$$
$$= \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot 0,35 \text{ m}}{9,81 \text{ m/s}^2 \tan 11,881^\circ}} = 2,587 \text{ s} \approx 2,6 \text{ s}.$$

# 4. Gravitaatiovoima

## Tehtävä 4.1.

Oikeat vastaukset:

- a) C
- b) A
- c) B
- d) B
- e) C

## Tehtävä 4.2.

a) Maan massa  $m_1 = 5,9723 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Kuun massa  $m_2 = 7,346 \cdot 10^{22} \text{ kg}$

Maan ja Kuun välimatka

$r = 384\,400 \text{ km} = 384\,400\,000 \text{ m}$

gravitaatiovakio  $\gamma = 6,674\,30 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$

Gravitaatiolain mukaan Maa vetää Kuuta puoleensa voimalla

$$F_g = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} = 6,67430 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5,9723 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 7,346 \cdot 10^{22} \text{ kg}}{(384\,400\,000 \text{ m})^2}$$
$$= 1,981670776 \cdot 10^{20} \text{ N} \approx 1,982 \cdot 10^{20} \text{ N}.$$

b) Gravitaatiolain mukaan kumpaankin kappaleeseen vaikuttaa yhtä suuri gravitaatiovoima, joten Kuu vetää maata puoleensa yhtä suurella voimalla kuin Maa Kuuta.  $F_g = 1,982 \cdot 10^{20} \text{ N}$

## Tehtävä 4.3.

a) Gravitaatiokentän voimakkuuteen vaikuttavat taivaankappaleen massa ja etäisyys taivaankappaleen keskipisteestä.

b) Phoboksen massa  $M = 1,066 \cdot 10^{16} \text{ kg}$

Phoboksen keskimääräinen säde  $r = 11,3 \text{ km} = 11\,300 \text{ m}$

gravitaatiovakio  $\gamma = 6,67430 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$

Gravitaatiokentän voimakkuus kuvaa, kuinka suuren kiihtyvyyden gravitaatiovoima aiheuttaa kappaleelle. Newtonin II lain mukaan gravitaatio voima aiheuttaa kiihtyvyyden voiman suuntaan

$$F_g = ma.$$

Kun merkitään kiihtyvyyttä symbolilla  $g_r$ , niin

$$\gamma \frac{M}{r^2} = g_r$$

$$g_r = \gamma \frac{M}{r^2}.$$

Gravitaatiokentän voimakkuus Phoboksen pinnalla on noin

$$g_r = \gamma \frac{M}{r^2} = 6,67430 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{1,066 \cdot 10^{16} \text{ kg}}{(11300 \text{ m})^2} = 0,005571935 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 0,00557 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

## Tehtävä 4.4.

a) heilurin langan pituus  $l = 1,5 \text{ m}$

Heiluria voidaan tarkastella matemaattisena heilurina, sillä lanka on oletuksen mukaan massaton ja punnusta voidaan pitää pistemäisenä langan pituuden mittakaavassa.

Heilurin jaksonaika on

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{1,5 \text{ m}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 2,456920 \text{ s} \approx 2,5 \text{ s}.$$

b) Matemaattisen heilurin jaksonaika on  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ .

Yhtälöstä nähdään, että poikkeutuksen suuruus ei vaikuta jaksonaikaan.

c) Matemaattisen heilurin jaksonajan yhtälöstä nähdään, että punnuksen massa ei vaikuta jaksonaikaan.

## Tehtävä 4.5.

- a) Massa aiheuttaa aika-avaruuden kaareutumisen.
- b) Gravitaatiokentän muutokset liikkuvat avaruudessa gravitaatioaaltoina. Gravitaatioallot etenevät valonnopeudella. Tämän vuoksi gravitaatiokentän muutokset eivät vaikuta heti kaukana avaruudessa.

## Tehtävä 4.6.

- a) Gravitaatiovoiman voimakkuus kasvaa tasaisesti Maan keskipisteestä kohti Maan pintaa. Kun etäisyys pinnasta kasvaa, gravitaatiovoima heikkenee. Gravitaatiovoima on suurin Maan pinnalla.
- b) Maan keskipisteessä Maan massa on jakautunut tasaisesti Maan keskipisteen ympärille. Siksi Maan gravitaatiokentän voimakkuus Maan keskipisteessä on nolla.

## **Tehtävä 4.7.**

- a) Maan ja Kuun vuorovaikutuksessa kumpaankin kappaleeseen vaikuttaa gravitaatiovoima. Jos Kuussa olisi meriä, myös siellä havaittaisiin vuoroveden kaltainen ilmiö. Kuussa merenpinta nousisi sekä Maan puolella Kuuta että Maasta katsoen Kuun takana. Nousuvesi olisi aina samoissa kohdissa, koska Kuusta aina sama puoli on kohti Maata.
- b) Uudenkuun ja täysikuun aikana Maa, Kuu ja Aurinko ovat samassa linjassa. Tällöin Aurinko ja Kuu aiheuttavat Maahan yhdensuuntaiset gravitaatiovoimat, mikä aiheuttaa suuremman nousuveden.
- c) Vaikka Kuu kohdistaa Maahan selvästi pienemmän gravitaatiovoiman kuin Aurinko, Kuun gravitaatiovoimalla on suurempi merkitys Maassa havaittavaan vuorovesi-ilmiöön kuin Auringon aiheuttamalla gravitaatiovoimalla. Koska Kuu on selvästi Aurinkoa lähempänä, Kuun Maahan kohdistama gravitaatiovoima heikkenee suhteessa merkittävästi enemmän Maan halkaisijan mittaisella matkalla kuin Auringon Maahan kohdistama gravitaatiovoima. Siksi Maan Kuuta kohti olevassa osassa Kuun aiheuttama gravitaatiovoima on merkittävästi suurempi kuin Maan takana. Auringon aiheuttama gravitaatiovoima on molemmilla Maan puolilla lähes yhtä suuri. Tämä voimien ero selittää vuorovesi-ilmiön.

## Tehtävä 4.8.

Kuun etäisyys Auringosta  $r_1 = 1 \text{ au} = 1\,495\,979 \cdot 10^9 \text{ m}$

Auringon massa  $m_1 = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

Maan massa  $m_2 = 5,9723 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Maan etäisyys Kuusta  $r_2 = 384\,400\,000 \text{ m}$

Lasketaan Auringon gravitaatiovoiman suhde Maan gravitaatiovoimaan

$$\frac{F_{G,A}}{F_{G,M}} = \frac{\cancel{\gamma} \frac{m_1 \cancel{m}}{r_1^2}}{\cancel{\gamma} \frac{m_2 \cancel{m}}{r_2^2}} = \frac{r_2^2 m_1}{r_1^2 m_2} = \frac{(384\,400\,000 \text{ m})^2 \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{(1,495\,979 \cdot 10^9 \text{ m})^2 \cdot 5,9723 \cdot 10^{24} \text{ kg}} = 2,1989 \approx 2,2.$$

## Tehtävä 4.9.

Rhean säde  $r = 764\,000\text{ m}$

gravitaatiokentän voimakkuus  $g_r = 0,265\text{ m/s}^2$

gravitaatiovakio  $\gamma = 6,674\,30 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$

- a) Kuu aiheuttaa kuun pinnalla olevalla kappaleelle gravitaatiovoiman, jolloin kappaleen kiihtyvyys on Newtonin II lain mukaan  $F_g = ma$ . Kiihtyvyys kuvastaa gravitaatiokentän voimakkuutta, jolloin  $a = g_r$ . Rhean massaksi saadaan

$$\gamma \frac{m_R m}{r^2} = m g_r$$

$$m_R = \frac{g_r r^2}{\gamma} = \frac{0,265 \text{ m/s}^2 \cdot (764\,000 \text{ m})^2}{6,674\,30 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}} = 2,3175 \cdot 10^{21} \text{ kg} \approx 2,32 \cdot 10^{21} \text{ kg}.$$

- b) Rhea oletetaan palloksi, jolloin Rhean keskitiheys on

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{2,2388 \cdot 10^{21} \text{ kg}}{\frac{4}{3}\pi (764\,000 \text{ m})^3} = 1\,240,7 \text{ kg/m}^3 \approx 1\,200 \text{ kg/m}^3.$$

## Tehtävä 4.10.

gravitaatiovoima maapallon pinnalla  $G_1 = 2\,060\text{ N}$

Maan säde  $r_1 = 6\,378\text{ km}$

Kuun säde  $r_2 = 1\,738\text{ km}$

gravitaatiovakio  $\gamma = 6,674\,30 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$

Maan massa  $m_1 = 5,9723 \cdot 10^{24}\text{ kg}$

Kuun massa  $m_2 = 7,3446 \cdot 10^{22}\text{ kg}$

- a) Määritetään gravitaatiolain avulla kuumönkijän massa, kun mönkijä on maapallon pinnalla. Kuumönkijään kohdistuva gravitaatiovoima

$$G_1 = F_1.$$

Kuumönkijän massa on

$$F_1 = \gamma \frac{m_1 m}{R_1^2}$$

$$m = \frac{G_1 R_1^2}{\gamma m_1} = \frac{2060\text{ N} \cdot (6\,378\,000\text{ m})^2}{6,674\,30 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5,9723 \cdot 10^{24}\text{ kg}} = 210,227\text{ kg}.$$

Kuun mönkijään kohdistama gravitaatiovoima

$$G_2 = F_2 = \gamma \frac{m_2 m}{R_2^2} = \gamma \frac{m_2}{R_2^2} \frac{G_1 R_1^2}{\gamma m_1} = \frac{m_2 G_1 R_1^2}{m_1 R_2^2}$$

$$G_2 = \frac{7,346 \cdot 10^{22}\text{ kg} \cdot 2060\text{ N} \cdot (6\,378\,000\text{ m})^2}{5,9723 \cdot 10^{24}\text{ kg} \cdot (1\,738\,000\text{ m})^2} = 341,2\text{ N} \approx 341\text{ N}.$$

- b) Tarkastellaan, millä etäisyydellä maapallon aiheuttama gravitaatiovoima on yhtä suuri kuin Kuun aiheuttama gravitaatiovoima.

Merkitään etäisyyttä Maan keskipisteestä tunnuksella  $R$ . Merkitään Maan gravitaatiokentän aiheuttama voima  $F_G$  yhtä suureksi kuin Kuun gravitaatiokentän voimakkuus Kuun pinnalla  $G_2$ . Ratkaistaan etäisyys  $R$ .

$$F_G = G_2$$

$$\gamma \frac{m_1 \cancel{m}}{R^2} = \gamma \frac{m_2 \cancel{m}}{R_2^2}$$

$$R^2 = \frac{m_1}{m_2} R_2^2$$

$$R = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} R_2 = \sqrt{\frac{5,9723 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{7,346 \cdot 10^{22} \text{ kg}}} \cdot 1738\,000 \text{ m} = 15\,670\,942,5 \text{ m} \approx 15\,670 \text{ km}.$$

## Tehtävä 4.11.

kahdeksan heilahduksen aika  $t = 13,6 \text{ s}$

a) Kun heilahdusaika määritetään useammasta heilahduksesta, mittausvirheen vaikutus pienenee ja mittaustuloksesta saadaan tarkempi.

b) Heilurin jaksonaika on yhden edestakaiseen heilahdukseen kulunut aika eli

$$T = \frac{t}{n} = \frac{13,6 \text{ s}}{8} = 1,7 \text{ s}.$$

c) Matemaattisen heilurin jaksonajalle on voimassa

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

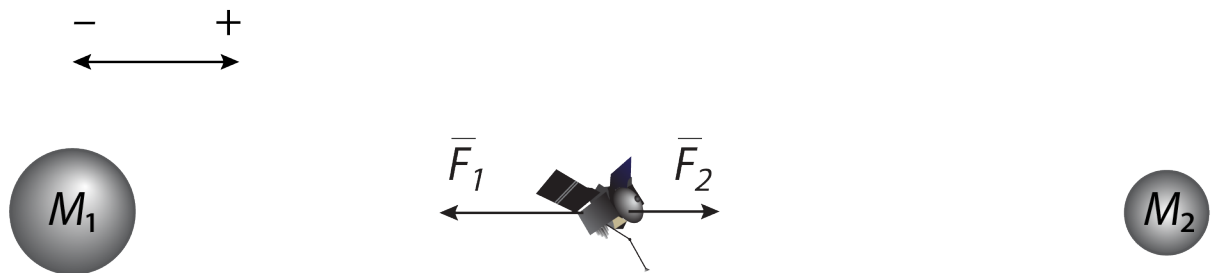
Heilurin langan pituudeksi saadaan a-kohdan tuloksen perusteella

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \\ T^2 &= 4\pi^2 \frac{l}{g} \\ l &= \frac{gT^2}{4\pi^2} = \frac{9,81 \text{ m/s}^2 \cdot (1,7 \text{ s})^2}{4\pi^2} = 0,7181 \text{ m} \approx 72 \text{ cm}. \end{aligned}$$

## Tehtävä 4.12.

- a) Merkitään avaruusluotaimen massaa tunnuksella  $m$ .  
Taivaankappaleiden massat ovat  $M_1$  ja  $M_2$ .  
Luotaimen etäisyydet taivaankappaleisiin ovat  $r_1$  ja  $r_2$ .

Avaruusluotain liikkuu taivaankappaleiden välissä, joten taivaankappaleiden gravitaatiokentät aiheuttavat luotaimeen vastakkaissuuntaiset voimat.



Taivaankappaleen 1 ja luotaimen välisen gravitaatiovoiman suuruus on  $F_1 = \gamma \frac{mM_1}{r_1^2}$ .

Taivaankappaleen 2 ja luotaimen välisen gravitaatiovoiman suuruus on  $F_2 = \gamma \frac{mM_2}{r_2^2}$ .

Otetaan huomioon suuntasopimus. Newtonin II lain mukaan

$$\Sigma F = ma$$

$$-F_1 + F_2 = ma$$

$$-\gamma \frac{mM_1}{r_1^2} + \gamma \frac{mM_2}{r_2^2} = ma$$

$$a = \gamma \frac{M_2}{r_2^2} - \gamma \frac{M_1}{r_1^2}$$

$$a = \gamma \left( \frac{M_2}{r_2^2} - \frac{M_1}{r_1^2} \right).$$

Luotaimen kiihtyvyys taivaankappaleiden välissä on

$$a = \gamma \left( \frac{M_2}{r_2^2} - \frac{M_1}{r_1^2} \right).$$

- b) Jos luotaimen tilalla olisi kolmas taivaankappale, sen massa vaikuttaisi kahden muun taivaankappaleen liikkeisiin. Tällöin kappaleen kiihtyvyyden ratkaiseminen olisi monimutkaista.

## Tehtävä 4.13.

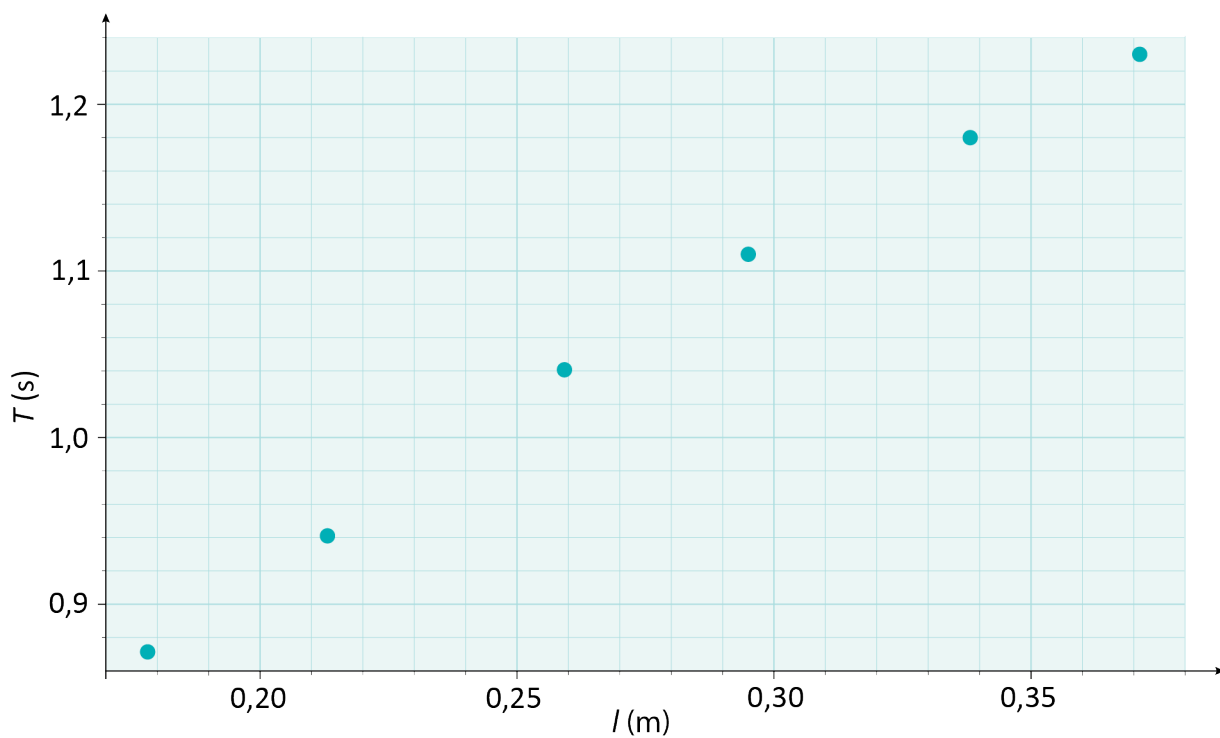
Matemaattisen heilurin jaksonaika noudattaa yhtälöä

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{g}}.$$

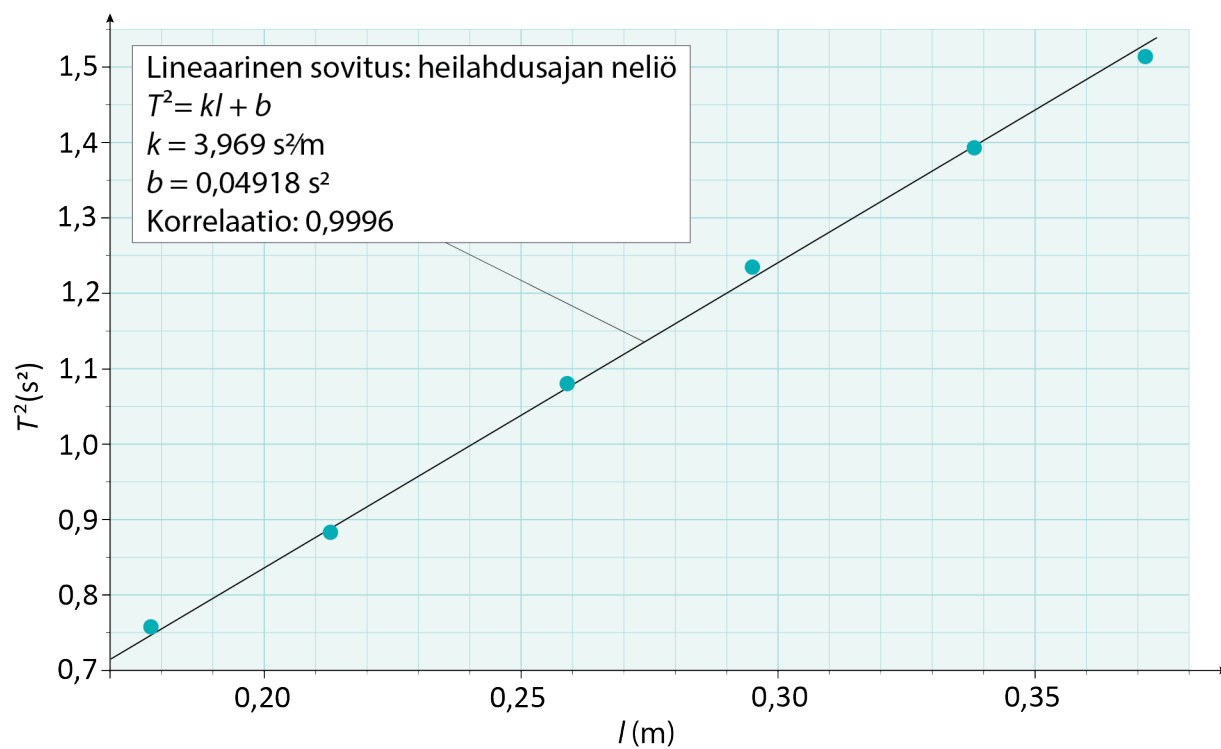
Massa tai heilahduskulma eivät vaikuta heilurin jaksonaikaan.

## Tehtävä 4.14.

a)



b)



- c) Punnusta voidaan tarkastella matemaattisena heilurina. Matemaattisen heilurin jaksonaika noudattaa yhtälöä

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Muokataan yhtälöä siten, että jaksonajan neliölle ja langan pituudelle tulee lineaarinen riippuvuus.

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l.$$

$(l, T^2)$ -koordinaatiston mittauspisteisiin sovitetun suoran fysikaalinen kulmakerroin on  $\frac{4\pi^2}{g}$ . b-kohdan mukaan saadaan

$$\frac{4\pi^2}{g} = 3,969 \frac{\text{s}^2}{\text{m}}.$$

Putoamiskiihtyvyydeksi saadaan

$$g = \frac{4\pi^2}{3,969 \frac{\text{s}^2}{\text{m}}} = 9,946\,69 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 9,95 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

## Tehtävä 4.15.

Maan massa  $m$

Maan säde  $r$

Planeetan massa  $M$

- a) Newtonin II lain mukaisesti gravitaatiovoiman suunnassa  $F_g = ma$ . Kiihtyvyys kuvaa gravitaatiokentän voimakkuutta, jolloin  $a = g_r$  eli

$$\gamma \frac{Mm}{r^2} = mg_r$$

Maan gravitaatiokentän voimakkuus

$$g_r = \gamma \frac{M}{r^2}$$

Planeetan X pinnalla gravitaatiokentän voimakkuus on

$$g_{rx} = \gamma \frac{2M}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} = \gamma \frac{2M}{\frac{r^2}{4}} = \gamma \frac{8M}{r^2} = 8\gamma \frac{M}{r^2} = 8g_r.$$

Toisen planeetan gravitaatiokentän voimakkuus on 8-kertainen Maan gravitaatiokenttään verrattuna.

b) Merkitään, että planeetan Y pinnalla gravitaatiokentän voimakkuus on yhtä suuri kuin Maan pinnalla.

$$\begin{aligned}g_r &= g_{r_Y} \\ \cancel{\gamma} \frac{\cancel{M}}{r^2} &= \cancel{\gamma} \frac{2\cancel{M}}{r_Y^2} \\ r_Y^2 &= 2r^2 \\ r_Y &= \sqrt{2}r.\end{aligned}$$

## Tehtävä 4.16.

- a) Amplitudi ei vaikuta heilahdusaikaan.  
b) Kun lankaa lyhennetään, heilahdusaika lyhenee.

## Tehtävä 4.17.

pienten kuulien massa  $m_1 = 1,05 \text{ kg}$

suurten kuulien massa  $m_2 = 22,0 \text{ kg}$

kiertoakselin pituus  $r_k = 0,130 \text{ m}$

ison ja pienen kuulan välinen etäisyys  $r_e = 0,01 \text{ m}$

gravitaatiovakio  $\gamma = 6,674\,30 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$

Pienen ja ison kuulan välillä vaikuttaa gravitaatiosta aiheutuva voima, joka aiheuttaa momenttia. Kiertoakselina on kvartsitanko. Molemmat momentit alkavat kiertää tankoa samaan suuntaan. Gravitaatiovoimien aiheuttama kokonaismomentti on

$$\Sigma M = F_g r_k + F_g r_k = 2F_g r_k$$

$$\Sigma M = 2\gamma \frac{m_1 m_2}{r_e^2} r_k$$

$$\Sigma M = 2 \cdot 6,674\,30 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{1,05 \text{ kg} \cdot 22,0 \text{ kg} \cdot 0,13 \text{ m}}{(0,01 \text{ m})^2}$$

$$= 4,008\,58 \cdot 10^{-6} \text{ Nm}$$

$$\approx 4,00 \cdot 10^{-6} \text{ Nm.}$$

## Tehtävä 4.18.

moduulin etäisyys Marsin pinnasta  $h = 1\,500\,000\text{ m}$

Marsin massa  $M = 0,107 \cdot 5,9723 \cdot 10^{24}\text{ kg}$

Marsin säde  $R = 3\,390\text{ km}$

a) Koska luotain lähetetään samalla nopeudella taaksepäin, kun se etenee ennen lähettämistä, on nopeuksien vektorisumma nolla ja luotaimen nopeus Marsin pinnan suhteen on nolla. Luotaimeen vaikuttaa vain Marsin paino, joten luotain on laukaisun jälkeen kiihtyvässä liikkeessä kohti Marsin keskipistettä.

b) Newtonin II lain mukaan luotaimeen vaikuttavat voimat, kun luotain on liikkeessä laukaisun jälkeen

$$F_g = ma.$$

Luotaimen kiihtyvyys on tällöin

$$\gamma \frac{Mm}{r^2} = ma$$

$$\gamma \frac{Mm}{r^2} = ma$$

$$\begin{aligned} a &= \gamma \frac{M}{r^2} = \gamma \frac{M}{(R+h)^2} = 6,674\,30 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \frac{0,107 \cdot 5,9723 \cdot 10^{24}\text{ kg}}{(3\,390\,000\text{ m} + 1\,500\,000\text{ m})^2} \\ &= 1,783\,665\text{ m/s}^2 \approx 1,78\text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

## Tehtävä 4.19.

Ceresin halkaisija  $d = 975 \text{ km}$

kiven pudotusmatka  $s = 3,0 \text{ m}$

kiven pudotusaika  $t = 4,75 \text{ s}$

heilurin pituus  $l = 1 \text{ m}$

Kiven kiihtyvyys oletetaan pysyvän vakiona. Lasketaan kiven kiihtyvyys tasaisen kiihtyvyyden mallista.

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

$$a = \frac{2s}{t^2}$$

Lasketaan gravitaatiolain avulla gravitaatiokentän aiheuttama kiihtyvyys asteroidin pinnalla.

$$\gamma \frac{M}{r^2} = a$$

$$a = \gamma \frac{M}{r^2}.$$

Merkitään kiihtyvyydet yhtä suuriksi ja määritetään Ceresin massa.

$$\gamma \frac{M}{r^2} = \frac{2s}{t^2}$$

$$M = \frac{2sr^2}{\gamma t^2} = \frac{2 \cdot 3 \text{ m} \cdot (487,5 \text{ km})^2}{6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot (4,75 \text{ s})^2} = 9,469 \cdot 10^{20} \text{ kg} \approx 9,5 \cdot 10^{20} \text{ kg}.$$

## Tehtävä 4.20.

a) LIGO mittaa suoraan painovoima-aaltojen aiheuttamaa ilmiötä eli suhteellista venymää järjestelmässä kulkevien valonsäteiden kulkemassa matkassa. Vuoden 1974 havainnossa nähtiin pulsarien menettävän energiaa, mutta havainto ei sulje pois sitä mahdollisuutta, että tämä energia poistuu jollakin muulla tavalla kuin painovoima-aaltoina.

b) Auringon massa  $M = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$   
valon nopeus  $c = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s}$   
energian poistumisaika  $t = 0,015 \text{ s}$   
Auringon säteilyteho on  $P = 3,9 \cdot 10^{26} \text{ W}$ .

Kun kappaleet yhdistyivät, energiaa vapautui kolmen Auringon massan verran, eli

$$E = mc^2$$

$$E = 3Mc^2 = 3 \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg} \cdot \left( 2,99792458 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 = 5,362872 \cdot 10^{47} \text{ J}.$$

Tämä energia määrä poistui nopeasti, 0,015 sekunnissa. Teho on energia jaettuna ajalla, eli

$$P = \frac{E}{t} = \frac{5,362872 \cdot 10^{47} \text{ J}}{0,015 \text{ s}} = 3,5752 \cdot 10^{49} \text{ W} \approx 3,6 \cdot 10^{49} \text{ W}.$$

Kun tehoa verrataan Auringon tehoon, saadaan

$$\frac{3,5752 \cdot 10^{49} \text{ W}}{3,9 \cdot 10^{26} \text{ W}} = 0,9167 \cdot 10^{23} \approx 1 \cdot 10^{23}.$$

Gravitaatioaaltojen teho vastaa  $10^{23}$  Auringon tehoa.

- c) Kun kappaleet kiertävät toisiaan, ajanhetkellä 0,35 s niiden välinen etäisyys on  $4R_s$  eli neljä Schwarzschildin sädettä. Aineiston mukaan kappaleelle, jonka massa on noin 62 Auringon massaa, Schwarzschildin säde on noin 180 km. Toisiaan kiertävien kappaleiden välinen etäisyys on näin ollen vain noin 700 km. Tämä sulkee pois tavalliset tähdet ja valkoiset kääpiöt, sillä niiden säteet ovat paljon tätä etäisyyttä suurempia. Kappaleet voisivat olla neutronitähtiä, mutta niiden massat eivät voi olla 30 kertaa Auringon massan suuruisia, kuten LIGO havaitsi. Kappaleiden on siis oltava mustia aukkoja.

## Tehtävä 4.21.

punnuksen massa  $m = 0,560 \text{ kg}$

a) C

b) D

c) Heilurin jaksonaika  $T = 1,6 \text{ s}$ .

Punnusta voidaan tarkastella matemaattisena heilurina, jonka jaksonaika on

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (1 \text{ p})$$

Punnuksen langan pituus saadaan laskettua jaksonajan perusteella.

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g} \quad (2 \text{ p})$$
$$l = \frac{gT^2}{4\pi^2} = \frac{9,81 \text{ m/s}^2 \cdot (1,6 \text{ s})^2}{4\pi^2} = 0,6361 \text{ m} \approx 0,64 \text{ m}$$

d) ISS etäisyys maanpinnalta  $h = 408\,000\text{ m}$

maapallon säde  $R = 6\,378\text{ km}$

gravitaatiovakio  $\gamma = 6,674\,30 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$

maapallon massa  $M = 5,9723 \cdot 10^{24}\text{ kg}$

Punnuksen etäisyys maapallon keskipisteestä

$$r = R + h \text{ (1 p)}$$

Kun punnus on ISS:lla, vaikuttaa punnukseen gravitaatiovoima

$$F_g = \gamma \frac{Mm}{r^2} = \gamma \frac{Mm}{(R+h)^2} = 6,67430 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5,9723 \cdot 10^{24}\text{ kg} \cdot 0,560\text{ kg}}{(6\,378\,140\text{ m} + 408\,000\text{ m})^2} \\ = 4,847\text{ N} \approx 4,8\text{ N}.$$

(3 p) Jos ei ole huomioitu korkeutta  $h$ , maksimissa (2 p)

e) Punnuksen putoamiskiihtyvyys Kuussa saadaan taulukosta

$$g_K = 1,622\text{ m/s}^2 \quad (1\text{ p})$$

Vastaavan matemaattisen heilurin jaksonaika Kuun pinnalla on c-kohdassa saadun pituuden mukaan

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_K}} = 2\pi \sqrt{\frac{0,52129\text{ m}}{1,622 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 3,9347\text{ s} \approx 3,9\text{ s. (3 p)}$$

(Jos c-kohdassa langan pituus väärin, ei pistemenetyksiä tässä kohdassa)

# 5. Planeettojen ja satelliittien liike

## Tehtävä 5.1.

Väitteistä ovat oikein: b), c) ja e)

Väitteistä ovat väärin a), d) ja f)

Korjaukset vääriin väitteisiin:

- a) Avaruusasemalla gravitaatiokenttä on lähes yhtä voimakas kuin Maan pinnalla. Astronautit ovat asemalla näennäisesti painottomassa tilassa, koska asema ja astronautti ovat jatkuvassa putoamisliikkeessä Maan ohi ja niillä on sama kiihtyvyys.
- d) Esimerkiksi Maata kiertävän satelliitin nopeuteen vaikuttaa vain satelliitin etäisyys Maasta. Kiertävän kappaleen massa ei vaikuta kappaleen kiertorataan, joten massaa eri voi päätellä kappaleen nopeuden avulla.
- f) Televisio-ohjelmia välittävät tietoliikennesatelliitit kiertävät geostationaarisella radalla. Geostationaarinen rata on moniin muihin ratoihin verrattuna kaukana maanpinnasta.

## Tehtävä 5.2.

a) Vuoren huipulta ammuttu tykinkuula lentää sitä pidemmälle, mitä suurempi lähtönopeus tykinkuulalla on. Jos tykinkuulalla on riittävän suuri lähtönopeus, tykinkuula ei osu ollenkaan maanpintaan vaan putoaa jatkuvasti Maan ohi ja päättyy näin kiertämään Maata.

b) Maan massa  $M = 5,9723 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Maan ekvaattorisäde  $r = 6\,378,137 \text{ km} = 6\,378\,137 \text{ m}$

tykinkuulan massa  $m$

Newtonin II lain mukaan kappaleen liikeyhtälö ympyräliikkeessä on  $\sum \vec{F} = m\vec{a}_n$ .

Tykinkuula päättyy ympyräradalle gravitaatiovoiman

$F_g = \gamma \frac{mM}{r^2}$  vaikutuksesta. Vektorien suunnat huomioituina

$$F = ma_n$$

$$\gamma \frac{mM}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{\gamma \frac{M}{r}} = \sqrt{6,674\,30 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5,9723 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{6\,378\,137 \text{ m}}}$$

$$= 7\,905,4528 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\approx 7\,900 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Tykinkuulan nopeuden pitäisi olla vähintään  $7\,900 \text{ m/s}$ , jotta se päätyisi kiertämään Maata.

- c) Vaadittu nopeus on todella suuri. Tykinkuula on käytännössä mahdotonta ampua tällä lähtönopeudella. Lisäksi ilmanvastus estää näin nopean liikkeen ilmakehässä.

### Tehtävä 5.3.

Maan massa  $M = 5,9723 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Maan keskimääräinen säde  $R = 6\,371\,000 \text{ m}$

satelliitin etäisyys

maanpinnasta  $h = 20\,200 \text{ km} = 20\,200\,000 \text{ m}$

satelliitin etäisyys Maan

keskipisteestä  $r = R + h = 26\,571\,000 \text{ m}$

- a) Satelliittiin vaikuttaa Maan gravitaatiovoima, mikä aiheuttaa satelliitin tasaisen liikkeen ympyräradalla. Newtonin II lain mukaan ympyräradan säteen suunnassa

$$F_g = ma_n$$

$$\gamma \frac{mM}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

Ratkaistaan satelliitin nopeus

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\gamma \frac{M}{r}} = \sqrt{6,674\,30 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5,9723 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{26\,571\,000 \text{ m}}} \\ &= 3\,873,198\,18 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 3\,870 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

b) yksi vuorokausi sekunteina  $t = 24 \cdot 3\,600\text{ s} = 86\,400\text{ s}$

Satelliitti kulkee vuorokaudessa matkan  $s = vt = \sqrt{\gamma \frac{M}{r}} t$ .

Satelliitin kulkemien kierrosten määrä vuorokaudessa on

$$n = \frac{s}{2\pi r} = \frac{\sqrt{\gamma \frac{M}{r}} t}{2\pi r} = \frac{\sqrt{6,67430 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5,9723 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{26\,571\,000\text{ m}}} \cdot 86\,400\text{ s}}{2\pi \cdot 26\,571\,000\text{ m}} \\ = 2,004\,452 \approx 2,0.$$

GPS-satelliitti kiertää maapallon kaksi kertaa vuorokaudessa.

## Tehtävä 5.4.

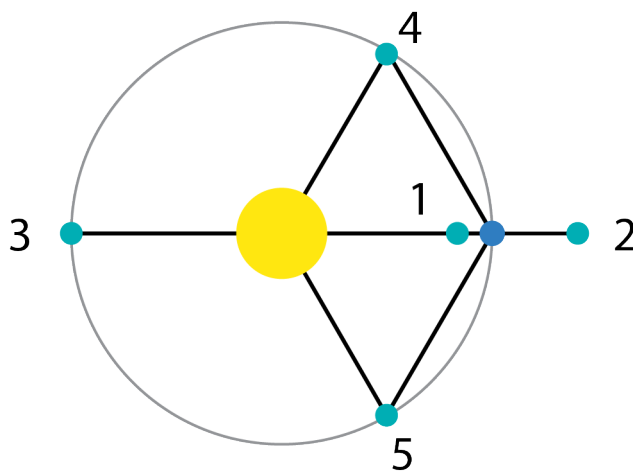
- a) Satelliitti on kappale tai laite, joka kiertää Maata tai muuta planeettaa.
- b) Satelliitteja käytetään esimerkiksi tietoliikenteeseen, paikannusjärjestelmiin, sään ennustamiseen ja vakoiluun.

## Tehtävä 5.5.

- a) Aalto 1 on satelliitti, joka suunniteltiin muun muassa Maan kaukokartoittamiseen spektrometrillä ja avaruussäteilyn mittaamiseen säteilymittarilla. Aalto 2 on satelliitti, joka suunniteltiin tutkimaan yläilmakehän plasman ominaisuuksia ja hiukkasia.
- b) Geostationaarinen satelliitti pysyy Maan pintaan nähden koko ajan samassa paikassa. Geostationaarisen satelliitin kiertoaika Maan ympäri on yhtä suuri kuin yhteen Maan pyörähdykseen kuluva aika. Geostationaariset satelliitit sijaitsevat päiväntasaajan yläpuolella.
- c) Satelliitin polaarinen rata kulkee sekä pohjoisnavan että etelänavan yli.

## Tehtävä 5.6.

- a) Kun kaksi suurta taivaankappaletta kiertää toisiaan, syntyy pisteitä, jossa kolmas taivaankappale voi olla tasapainossa kiertolaisten kanssa. Esimerkiksi Maan kiertäessä Aurinkoa Lagrangen pisteitä on yhteensä viisi kappaletta.



Kolme Lagrangen pisteistä ovat samalla janalla Maan ja Auringon kanssa ja kaksi muuta Maan kiertoradalla. Lagrangen pisteet ovat erinomaisia sijainteja satelliiteille, koska ne pysyvät paikoillaan suhteessa Maahan ja Aurinkoon.

- b) SOHO-satelliitti tutkii Aurinkoa ja sijaitsee Maan ja Auringon välissä Lagrangen pisteessä L1. Kuvassa Lagrangen pisteet numeroitu luvuilla 1–5. SOHO-satelliitti tutkii esimerkiksi Auringon sisäosia, auringonpurkauksia ja niihin liittyviä partikkeleita, aurinkopilkkuja, Auringon koronaa ja aurinkotuulta.

- c) CubeSat on kuution muotoinen pienoissatelliitti, jonka mitat on vakioitu. Sen koko on yleensä  $10\text{ cm} \times 10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$ . Niitä voidaan hyödyntää esimerkiksi instrumenttien testaamisessa, tiedeprojekteissa, opetustarkoituksessa ja kaupallisissa sovelluksissa.

## Tehtävä 5.7.

kiertoaika  $t = 7 \text{ h } 39,2 \text{ min} = 27\,552 \text{ s}$

säde  $r = 9,376 \cdot 10^6 \text{ m}$

Phoboksen massa  $m$

Marsin massa  $M$

a) Newtonin II lain mukaan kappaleen liikeyhtälö  
ympyräliikkeessä on  $\sum \vec{F} = m\vec{a}_n$ .

Phobos on ympyräradalla gravitaatiovoiman  $F_g = \gamma \frac{mM}{r^2}$   
vaikutuksesta. Suunnat ympyräradan säteen suunnassa  
huomioituina

$$F_g = ma_n$$
$$\gamma \frac{mM}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

Phobos kulkee tasaista ympyräliikettä, jolloin kuun  
yhden kierroksen aikana kulkema matka on  $s = 2\pi r = vt$ .  
Sijoitetaan yllä olevaan liikeyhtälöön nopeus. Marsin  
massa on

$$M = \frac{\left(\frac{s}{t}\right)^2 r}{\gamma} = \frac{\left(\frac{2\pi r}{t}\right)^2 r}{\gamma} = \frac{4\pi^2 r^3}{t^2 \gamma}$$
$$= \frac{4\pi^2 (9,376 \cdot 10^6 \text{ m})^3}{(27\,552 \text{ s})^2 \cdot 6,674\,30 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}} = 6,422\,45 \cdot 10^{23} \text{ kg} \approx 6,42 \cdot 10^{23} \text{ kg}.$$

b) Auringon massa  $M = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

Marsin etäisyys Auringosta

$$r = 1,52 \text{ au} = 227\,388\,763,9 \text{ km}$$

Mars kiertää Auringon ympäri tasaisessa ympyräliikkeessä, jolloin Newtonin II lain mukaan suunnat säteen suunnassa huomioituina on

$$\begin{aligned} F_g &= ma_n \\ \cancel{\gamma} \frac{\cancel{m}M}{r^2} &= \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}} \\ \frac{\gamma M}{r} &= v^2. \end{aligned}$$

Oletetaan, että Mars kulkee tasaista ympyräliikettä Auringon ympäri, jolloin Marsin yhden kierroksen aikana kulkema matka on  $s = 2\pi r = vt$ . Sijoitetaan yllä olevaan liikeyhtälöön nopeus. Marsin kiertoaika on

$$\begin{aligned} \gamma M &= \left(\frac{s}{t}\right)^2 r = \left(\frac{2\pi r}{t}\right)^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{t^2} \\ t &= \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{\gamma M}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 (227\,388\,763,9 \cdot 10^3 \text{ m})^3}{6,674\,30 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}}} = 58\,967\,879,4 \text{ s} \approx 5,9 \cdot 10^7 \text{ s}. \end{aligned}$$

Phobosin kiertoaika on 27 552 s, joten Marsin vuoden aikana kierrettyjen kierrosten määrä on

$$N = \frac{58\,967\,879,4 \text{ s}}{27\,552 \text{ s}} = 2\,140,24 \approx 2\,140.$$

## Tehtävä 5.8.

Deimoksen massa  $M = 1,4762 \cdot 10^{15} \text{ kg}$

Deimoksen säde  $r = 6,0 \text{ km}$

Kun kappaleelle annetaan sopivan suuruinen vaakasuuntainen nopeus, kappale päättyy ympyrän muotoiselle radalle gravitaatiovoiman  $F_g = \gamma \frac{mM}{r^2}$  vaikutuksesta. Newtonin II lain mukaan tasaisessa ympyräliikkeessä olevan kappaleen liikeyhtälö säteen suunnassa suunnat huomioituina on

$$\begin{aligned} F_g &= ma_n \\ \gamma \frac{mM}{r^2} &= m \frac{v^2}{r} \\ \frac{\gamma M}{r} &= v^2. \end{aligned}$$

Pallon nopeuden tulee olla

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}} = \sqrt{\frac{6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 1,4762 \cdot 10^{15} \text{ kg}}{6000 \text{ m}}} = 4,052 \cdot 10^3 \text{ m/s} \approx 4,1 \text{ m/s}.$$

## Tehtävä 5.9.

pyörimisnopeus  $n = 20/24 \text{ 1/h} = 0,00023148 \text{ 1/s}$

jaksonaika  $T = 1/n = 1/0,002320 \text{ s} = 4 \text{ 320 s}$

asteroidin tiheys  $\rho = 2,500 \text{ kg/m}^3$

asteroidin halkaisija  $d = 95 \text{ m}$

Asteroidin massa on

$$m = \rho V = \rho \frac{4\pi r^3}{3} = 2\,500 \text{ kg/m}^3 \cdot \frac{4\pi \cdot (47,5 \text{ m})^3}{3} = 1,122\,3 \cdot 10^9 \text{ kg}.$$

Asteroidin pinnasta irronnut kivi on tasaisessa ympyräliikkeessä. Lasketaan nopeus, jolla kivi vielä pysyisi asteroidin pinnassa. Kivi on ympyräradalla gravitaatiovoiman  $F = \gamma \frac{mM}{r^2}$  vaikutuksesta. Newtonin II lain mukaan suunnat säteen suunnassa huomioituna saadaan kiven nopeudeksi

$$\begin{aligned} F_g &= ma_n \\ \gamma \frac{mM}{r^2} &= m \frac{v^2}{r} \\ v &= \sqrt{\frac{\gamma M}{r}} = \sqrt{\frac{6,674\,30 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 1\,122\,301\,251 \text{ kg}}{47,5 \text{ m}}} \\ &= 0,039\,710 \text{ m/s} \\ &\approx 0,04 \text{ m/s.} \end{aligned}$$

Lasketaan tasaisessa ympyräliikkeessä liikkuvan kiven nopeus. Asteroidin pinnalla oleva kivi kiertää 20 kierrosta 24 h aikana.

$$v = \frac{20 \cdot 2\pi r}{t} = \frac{20 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{95 \text{ m}}{2}}{24 \cdot 3600 \text{ s}} = 0,069\,0859 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0,069 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Kivi pysyisi asteroidin pinnalla gravitaatiovuorovaikutuksen johdosta, jos kiven ratanopeus olisi alle 0,04 m/s. Kivi ei siis pysy asteroidin pinnalla.

## Tehtävä 5.10.

- a) Kun voima-anturi putoaa, on voima-anturilla ja punnuksella sama kiihtyvyys. Tällöin punnus ei kohdistakaan voima-anturiin voimaa eli voima on 0 N. Luetaan kuvaajasta ajan arvot, milloin voima-anturin lukema oli likimain 0 N. Kuvaajan mukaan putoaminen alkoi ajanhetkellä  $t = 0,34 \text{ s}$  ja päättyi ajanhetkellä  $t = 0,59 \text{ s}$ .
- b) Voima-anturin lukema on putoamisen aikana 0 N. Koska anturi ja punnus putoavat samalla kiihtyvyydellä, voima-anturi ei aiheuta tukivoimaa punnukseen ja voima-anturin lukema on nolla.
- c) Avaruusasemalla sekä asema että siellä olevat ihmiset putoavat samalla kiihtyvyydellä ja siten leijuvat toistensa suhteen. Avaruusasemalla vallitsee näennäisesti painoton tila.

## Tehtävä 5.11.

- a) Satelliitin massa ei vaikuta kiertoaikaan eikä kiertoradan säteeseen.
- b) Nopeusvektorin suunta on ympyräradan tangentin suuntainen.
- c) Painovoimavektorin suunta on koko ajan kohti Maan keskipistettä.
- d) Mittauksen mukaan saadaan radan säteeksi  $r = 6\,559\text{ km}$  ja kiertoajaksi  $t = 91\text{ min}$ .

Newtonin II lain mukaan ympyräliikkeessä olevan satelliitin liikeyhtälö on  $\sum \vec{F} = m\vec{a}_n$ .

Satelliitti on ympyräradalla gravitaatiovoiman  $F_g = \gamma \frac{mM}{r^2}$  vaikutuksesta. Newtonin II lain mukaan suunnat säteen suunnassa huomioituina

$$\begin{aligned} F_g &= ma_n \\ \gamma \frac{mM}{r^2} &= m \frac{v^2}{r} \\ \frac{\gamma M}{r} &= v^2. \end{aligned}$$

Satelliitti kulkee tasaista ympyräliikettä, jolloin satelliitin yhden kierroksen aikana kulkema matka on  $s = 2\pi r = vt$ . Sijoitetaan yllä olevaan liikeyhtälöön nopeus. Maan massa on

$$M = \frac{\left(\frac{s}{t}\right)^2 r}{\gamma} = \frac{\left(\frac{2\pi r}{t}\right)^2 r}{\gamma} = \frac{4\pi^2 r^3}{t^2 \gamma}$$

$$= \frac{4\pi^2 (6\,559 \cdot 10^3 \text{ m})^3}{(91 \cdot 60 \text{ s})^2 \cdot 6,674\,30 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}} = 5,5986 \cdot 10^{24} \text{ kg} \approx 5,6 \cdot 10^{24} \text{ kg}.$$

## Tehtävä 5.12.

a) avaruusaluksen massa  $m = 81\,000\text{ kg}$

Maan massa  $M = 5,9723 \cdot 10^{24}\text{ kg}$

Maan keskimääräinen säde  $R = 6\,371\,000\text{ m}$

avaruusaluksen etäisyys

maanpinnasta  $h = 350\text{ km} = 350\,000\text{ m}$

avaruusaluksen etäisyys Maan

keskipisteestä  $r = R + h = 6\,721\,000\text{ m}$

Newtonin II lain mukaan tasaisessa ympyräliikkeessä  
olevalle alukselle on voimassa vektorien suunnat säteen  
suunnassa huomioituina

$$F_g = ma_n$$
$$\gamma \frac{mM}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$
$$\frac{\gamma M}{r} = v^2.$$

Ratkaistaan avaruusaluksen nopeus sen liikeyhtälöstä.

$$v = \sqrt{\gamma \frac{M}{r}}$$

Avaruusaluksen liike-energiaksi saadaan

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}m\sqrt{\gamma\frac{M}{r}}^2 = \gamma\frac{mM}{2r} \\ &= 6,674\,30 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{81\,000\,\text{kg} \cdot 5,9723 \cdot 10^{24}\,\text{kg}}{2 \cdot 6\,721\,000\text{m}} \\ &= 2,401\,97 \cdot 10^{12}\,\text{J} = 2,401\,97 \cdot 10^{12}\,\text{TJ} \approx 2,4\,\text{TJ} \end{aligned}$$

b) palamisessa vapautuvan energian määrä

$$Q = E = 2,40197 \cdot 10^{12}\,\text{J}$$

$$\text{vedyn lämpöarvo } H = 119\,\text{MJ/kg} = 119 \cdot 10^6\,\text{J}$$

Ratkaistaan vedyn massa palamisessa vapautuvan energia yhtälöstä  $Q = Hm$ .

$$m = \frac{Q}{H} = \frac{2,40197 \cdot 10^{12}\,\text{J}}{119 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{kg}}} = 20\,184,62\,\text{kg} \approx 20\,000\,\text{kg}$$

## Tehtävä 5.13.

a) Maan massa  $M = 5,9723 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

avaruusromun kiertosäde  $r = 25\,000 \text{ km}$

avaruusromun massa  $m = 150 \text{ kg}$

lämpötila törmäyshetkellä  $T = 170 \text{ K}$

Raudan sulamispiste taulukkokirjan mukaan

$T = 1\,808,15 \text{ K}$

Newtonin II lain mukaan tasaisessa ympyräliikkeessä  
olevalle avaruusromukappaleelle on voimassa vektorien  
suunnat säteen suunnassa huomioituina

$$F_g = ma_n$$
$$\gamma \frac{mM}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$
$$\frac{\gamma M}{r} = v^2.$$

Ratkaistaan avaruusromukappaleen nopeus sen  
liikeyhtälöstä.

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}} = \sqrt{\frac{6,674\,30 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5,9723 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{25\,000 \cdot 10^3 \text{ m}}} = 3\,993,04 \text{ m/s} \approx 4\,000 \text{ m/s}.$$

b) Avaruusromukappaleen liike-energia

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$
$$= \frac{\gamma m M}{2r} = \frac{6,674\,30 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 150 \text{ kg} \cdot 5,9723 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{2 \cdot 25\,000 \cdot 10^3 \text{ m}}$$
$$= 1\,195\,827\,657 \text{ J} \approx 1,2 \text{ GJ}.$$

c) raudan ominaislämpökapasiteetti  $c = 0,449 \text{ kJ/kgK}$

avaruusromun massa  $m = 150 \text{ kg} + 150 \text{ kg} = 300 \text{ kg}$

Raudan sulamispiste on  $1\,535 \text{ °C} = 1\,808,15 \text{ K}$ . Jotta rauta sulaisi, sen lämpötilan pitää nousta

$$\Delta T = 1\,808,15 \text{ K} - 170 \text{ K} = 1\,638,15 \text{ K}.$$

Törmäyksessä vapautuva energia on edellisen kohdan perusteella

$$E = 2E_k \cdot 0,050 = 2 \cdot 1\,195\,827\,657 \text{ J} \cdot 0,050 = 119\,582\,765,7 \text{ J} \approx 0,12 \text{ GJ}.$$

Avaruusromun lämpeneminen sulamispisteeseen vaatii energiaa

$$Q = cm\Delta T = 0,449 \text{ kJ/kgK} \cdot 300 \text{ kg} \cdot 1\,638,15 \text{ K} = 220\,658\,805 \text{ J} \approx 0,22 \text{ GJ}.$$

Jos oletetaan, että sisäenergia jakautuu kappaleessa tasaisesti, niin rauta lämpenee, mutta ei sula, sillä  $Q > E$ .

## Tehtävä 5.14.

- a) Tarkastellaan tasaissa ympyräliikkeessä etenevää satelliittia.

Satelliitti pysyy ympyräradallaan gravitaatiovoiman

$F_g = \gamma \frac{mM}{r^2}$  vaikutuksesta. Newtonin II lain mukaan säteen suunnassa on voimassa

$$\begin{aligned} F_g &= ma_n \\ \gamma \frac{mM}{r^2} &= m \frac{v^2}{r} \\ \frac{\gamma M}{r} &= v^2. \end{aligned}$$

Satelliitti kulkee tasaista ympyräliikettä, jolloin satelliitin yhden kierroksen aikana kulkema matka on  $s = 2\pi r = vt$ . Sijoitetaan yllä olevaan liikeyhtälöön nopeus. Satelliitin kiertoaika Maan ympäri on

$$\begin{aligned} \gamma M &= \left( \frac{s}{t} \right)^2 r = \left( \frac{2\pi r}{t} \right)^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{t^2} \\ t &= \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{\gamma M}} \end{aligned}$$

Yhtälöstä nähdään, että kun etäisyys  $r$  kasvaa, kiertoaika  $t$  pitenee.

- b) Maan pinnan lähellä vaikuttaa ilmanvastus, joka estäisi nopeasti etenevän satelliitin kulun. Myös Maan pinnanmuodot saattaisivat vaikuttaa häiritsevästi satelliitin kulkuun.
- c) Kun astronautti lähtee avaruuskävelylle, on astronautin nopeus sama kuin avaruusaluksen. Myös hohtimien nopeus on sama kuin avaruusaluksen. Hohtimien nopeus on tällöin riittävän suuri pitämään hohtimet ympyräliikkeessä Maan suhteen. Jos astronautti haluaisi pudottaa hohtimet Maahan, hänen täytyisi heittää hohtimet vastakkaiseen suuntaan samalla nopeudella.

## Tehtävä 5.15.

a) Kuun massa  $M = 7,348 \cdot 10^{22} \text{ kg}$

komentomoduulin kiertosäde

$$r = 1\,738 \text{ km} + 110 \text{ km} = 1\,848 \text{ km}$$

Kiertämiseen kulunut aika

$$t = 128 \text{ h } 3 \text{ min} - 100 \text{ h } 12 \text{ min} = 27 \text{ h } 51 \text{ min} = 100\,260 \text{ s}$$

Newtonin II lain mukaan kappaleen liikeyhtälö

$$\text{ympyräliikkeessä on } \sum \vec{F} = m\vec{a}_n.$$

Komentomoduuli pysyy ympyräradallaan Kuun

gravitaatiovoiman  $F_g = \gamma \frac{mM}{r^2}$  vaikutuksesta. Kuumoduuli

on tasaisessa ympyräliikkeessä. Newtonin II lain mukaan ympyräradan säteen

$$F_g = ma_n$$

$$\gamma \frac{mM}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

$$\frac{\gamma M}{r} = v^2.$$

Collins kulkee tasaista ympyräliikettä, jolloin hänen

yhden kierroksen aikana kulkema matka on  $s = 2\pi r = vt$ .

Sijoitetaan yllä olevaan liikeyhtälöön nopeus. Collinsin kiertoaika Kuun ympäri on

$$\gamma M = \left(\frac{s}{t}\right)^2 r = \left(\frac{2\pi r}{t}\right)^2 r = \frac{4\pi^2 r^3}{t^2}$$

$$t = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{\gamma M}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (1848 \cdot 10^3 \text{ m})^3}{6,67430 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 7,348 \cdot 10^{22} \text{ kg}}} = 7127,63 \text{ s} \approx 7,1 \cdot 10^3 \text{ s}.$$

Collins ehtii kiertää Kuun

$N = 100\,260 \text{ s} / 7\,127,6338 \text{ s} = 14,066$  kertaa eli noin  
14,1 kertaa

- b) Kun Collins kiertää Kuuta komentomoduulissa, hän on vapaassa pudotuksessa. Sekä komentomoduuli että Collins ovat samassa kiihtyvyydessä, jonka gravitaatiovuorovaikutus saa aikaan. Komentomoduuli ei silloin aiheuta Collinsiin tukivoimia, ja Collins tuntee olevansa painoton moduulin sisällä.

## Tehtävä 5.16.

a) Maan massa  $M = 5,9723 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

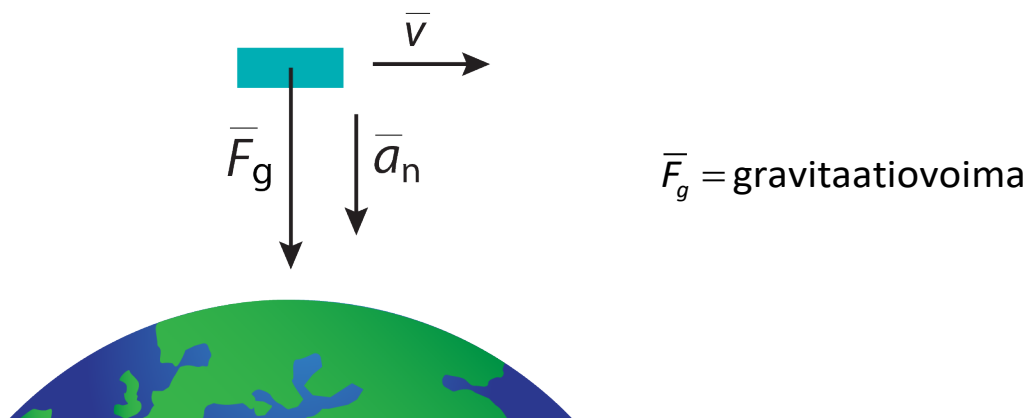
avaruusaseman etäisyys Maan pinnasta  $h = 405\,000 \text{ m}$

Maan säde  $R = 6\,378\,140 \text{ m}$

avaruusaseman kiertosäde

$$r = R + h = 405\,000 \text{ m} + 6\,378\,140 \text{ m} = 6\,783\,140 \text{ m}$$

Avaruusasemaan vaikuttavat voimat



Avaruusasema pysyy ympyräradallaan Maan

gravitaatiovoiman  $F_g = \gamma \frac{mM}{r^2}$  vaikutuksesta.

Avaruusasema on tasaisessa ympyräliikkeessä.

Newtonin II lain mukaan ympyräradan säteen suunnassa, jolloin avaruusaseman nopeus on

$$F_g = ma_n$$
$$\gamma \frac{mM}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}} = \sqrt{\frac{6,67430 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5,9723 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{6\,783\,140 \text{ m}}}$$

$$= 7\,665,814 \text{ m/s}$$

$$\approx 7\,670 \text{ m/s.}$$

- b) Avaruusasema on tasaisessa ympyräliikkeessä. Avaruusasema kiertää yhden kiertoajan aikana yhden kierroksen Maan ympäri. Kiertoaika Maan ympäri

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 6\,783\,140 \text{ m}}{7\,665,814\,026 \text{ m/s}} = 5\,559,71 \text{ s} \approx 5\,560 \text{ s} = 92,7 \text{ min.}$$

- c) Kun avaruusasema kiertää Maata, asema on tasaisessa ympyräliikkeessä ja putoaa jatkuvasti Maan ohi. Avaruusaseman sisällä oleva ihminen on samassa putoamisliikkeessä. Koska avaruusasema ei kohdistakaan ihmiseen tukivoimia, ihminen kokee olevansa painottomassa tilassa.

## Tehtävä 5.18.

- a) Satelliitin tuottama sähköteho laskee nollaan yhden kerran kierroksen aikana, mikä johtuu siitä, että maapallo varjostaa satelliittia jossain kiertoradan kohdassa.
  
- b) Satelliitin kiertoradan kulma suhteessa maapallon pyörimisakseliin vaikuttaa varjostusaikaan. Kun satelliitin kiertorata suuntautuu kohti pyörimisakselia eli pohjois-etelänapa suuntaan, varjostusaika pienenee.

## Tehtävä 5.19.

- a) Kun rakettimoottori on käynnissä, polttoaineen sisäenergia muuntuu osittain rakettimoottorin ja vapautuvien kaasujen sisäenergiaksi ja osittain ulosvirtaavan kaasusuihkun liike-energiaksi.

Osa sisäenergian muutoksesta lämmittää rakettimoottorin osia. Ulosvirtaava kaasusuihku aiheuttaa raketin runkoon työntövoiman, joka tekee työtä rakettiin. Osa ulosvirtaavan kaasusuihkun liike-energiasta kasvattaa raketin mekaanista energiaa.

- b) Raketin mekaaninen energia kasvaa, kun moottori on käynnissä, koska rakettiin tehdään silloin työtä.

- c) gravitaatiovakio  $\gamma = 6,67428 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{kg}^2$

maapallon massa on  $M = 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

maapallon säde  $R = 6378000 \text{ m}$

raketin korkeus polttoaineen loppuessa

$$r_1 = h_1 + R = 8000 \text{ m} + 6378000 \text{ m} = 6386000 \text{ m}$$

Maapallon gravitaatiokentän voimakkuus on

$$g_r = \gamma \frac{M}{r_1^2} = 6,67430 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(6386000 \text{ m})^2} = 9,7771 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 9,78 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

d) Raketin etäisyys Maan keskipisteestä

$$r_2 = h_2 + R = 4\,500\,000\text{m} + 6\,378\,000\text{m} = 10\,878\,000\text{m}.$$

Koska ulkoisia voimia ei tarvitse huomioida, raketin mekaaninen energia säilyy. Kun polttoaine loppuu, ollaan alkutilanteessa eli 8 km:n korkeudella Maan pinnasta. Lopputilanteessa eli lakipisteessä raketin korkeus on 4 500 km ja pystysuuntainen nopeus on nolla. Raketti liikkuu pystysuunnassa, joten vaakasuuntainen nopeus on koko lennon ajan häviävän pieni.

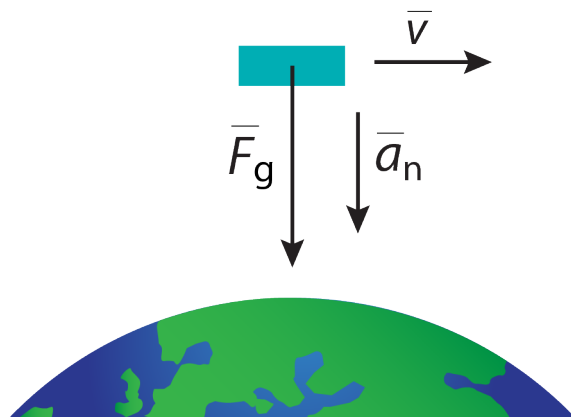
Kirjoitetaan mekaanisen energian säilymislain mukainen yhtälö ja ratkaistaan siitä raketin nopeus alkutilanteessa eli 8 km:n korkeudella.

$$\begin{aligned} E_{\text{pa}} + E_{\text{ka}} &= E_{\text{pl}} + E_{\text{kl}} \\ -\gamma \frac{mM}{r_1} + \frac{1}{2}mv_a^2 &= -\gamma \frac{mM}{r_2} + \frac{1}{2}mv_l^2 \\ -2\gamma \frac{M}{r_1} + v_a^2 &= -2\gamma \frac{M}{r_2} \\ v_a &= \sqrt{2\gamma \frac{M}{r_1} - 2\gamma \frac{M}{r_2}} \\ &= \sqrt{2\gamma M \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} \\ &= \sqrt{2 \cdot 6,67430 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5,9723 \cdot 10^{24} \text{kg} \cdot \left( \frac{1}{6\,386\,000\text{m}} - \frac{1}{10\,871\,000\text{m}} \right)} \\ &= 7\,176,63 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 7,2 \frac{\text{km}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

Raketin nopeus oli 7,2 km/s.

## Tehtävä 5.20.

a)



$\vec{F}_g$  = maapallon satelliittiin kohdistama gravitaatiovoima

Voimakuvion pisteytys:

Kuvaan on merkitty tilanteessa vaikuttava voimavektori, kiihtyvyyssvektori ja nopeusvektori oikeisiin suuntiin ja oikeille kohdilleen.

- gravitaatiovoima satelliitin keskipisteestä piirrettynä (1 p)
- normaalikiihtyvyys säteen suunnassa ja nopeus tangentin suuntaan (1 p)

Huom!

- Jos voimakuviossa on yksikin ylimääräinen voima, ei voimakuviosta voi saada pisteitä.
- Jos voimavektorin vaikutuspiste on väärin, esimerkiksi voima on piirretty irti kappaleesta sen vierelle tai eteen, voimavektorista ei anneta pisteitä.

b) kiertoradan korkeus  $h = 1\,700\text{ km}$

Maan säde  $R = 6\,378\,140\text{ m}$

satelliitin kiertosäde

$$r = 1\,700\,000\text{ m} + 6\,378\,140\text{ m} = 8\,078\,140\text{ m} \quad (1\text{ p})$$

Satelliitti pysyy ympyräradallaan Maan

gravitaatiovoiman  $F = \gamma \frac{mM}{r^2}$  vaikutuksesta. Satelliitti

liikkuu tasaisessa ympyräliikkeessä Maan ympäri, jolloin Newtonin II lain mukaan (1 p) säteen suunnassa

$$F_g = ma_n. \quad (1\text{ p})$$

Lasketaan satelliitin nopeus

$$\gamma \frac{mM}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

$$\frac{\gamma M}{r} = v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}} = \sqrt{\frac{6,674\,30 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5,9723 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{8\,078\,140\text{ m}}}$$

$$= 7\,024,541\text{ m/s}$$

$$\approx 7\,020\text{ m/s.}$$

(2 p)

- c) Satelliitti liikkuu tasaista ympyräliikettä. (1 p) Kiertoajan aikana satelliitti kiertää yhden kierroksen Maan ympäri. (1 p) Nopeus b-kohdan mukaan. Kiertoaika Maan ympäri

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 8078140 \text{ m}}{7024,541484 \text{ m/s}} = 7225,589 \text{ s} \approx 120,4 \text{ min.} \quad (2 \text{ p})$$

- d) Hyödynnetään c-kohdan yhtälöä  $\frac{\gamma M}{r} = v^2$ .

Satelliitti kulkee tasaista ympyräliikettä, jolloin satelliitin yhden kierroksen aikana kulkema matka on  $s = 2\pi r = vt$ . Sijoitetaan yllä olevaan liikeyhtälöön nopeus. Satelliitin kiertoaika Maan ympäri on

$$\gamma M = \left(\frac{s}{t}\right)^2 r = \left(\frac{2\pi r}{t}\right)^2 r = \frac{4\pi^2 r^3}{t^2} \quad (1 \text{ p})$$
$$t = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{\gamma M}}$$

Yhtälöstä nähdään, että etäisyyden  $r$  kasvaessa kiertoaika  $t$  pitenee. (1 p)

e) GEO-satelliitti sijaitsee noin 36 000 km:n etäisyydellä maanpinnasta ja LEO satelliitti 1 700 km:n etäisyydellä maanpinnasta. (1 p) Tiedonsiirtosignaali etenee valonnopeudella. Mitä suurempi on satelliitin etäisyys maanpinnasta, sitä suurempi on signaalin viive. Koska LEO-satelliitit sijaitsevat lähempänä maanpintaa kuin GEO-satelliitit, LEO-satelliittien kautta välitetyssä tiedonsiirrossa viive on pienempi kuin GEO-satelliittien kautta välitetyssä tiedonsiirrossa. (1 p)

# 6. Harmoninen voima

## Tehtävä 6.1.

Oikeat vastaukset:

a) A

b) C

c) B

d) B

e) A

## Tehtävä 6.2.

- a) Jousia käytetään esimerkiksi auton jousituksessa, kuulakärkikynissä, trampoliineissa ja patjoissa.
  
- b) Jousen pituuden muutos ja josta venyttävä voima kasvavat samassa suhteessa eli ne ovat suoraan verrannollisia.

### Tehtävä 6.3.

Voimakuvio molemmissa kohdissa:



$\vec{F}_j$  = jousivoima

$\vec{G}$  = punnuksen paino

- a) jousen venymä  $x = 4,5 \text{ cm} = 0,045 \text{ m}$   
punnuksen massa  $m = 50 \text{ g} = 0,050 \text{ kg}$   
punnuksen paino  $G = mg$

Kun punnus on paikallaan, tasapainotilanteessa Newtonin II lain mukaan  $\sum \vec{F} = \vec{0}$ . Kun suunta alaspäin valitaan positiiviseksi, punnuksen liikeyhtälö on  $G - F_j = 0$  eli  $G = F_j$ . Tästä voidaan edelleen ratkaista jousen jousivakio.

$$mg = kx$$

$$k = \frac{mg}{x} = \frac{0,050 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0,045 \text{ m}} = 10,9 \frac{\text{N}}{\text{m}} \approx 11 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Jousen jousivakio on  $11 \text{ N/m}$ .

b) jousen venymä  $x = 1,0 \text{ cm} = 0,010 \text{ m}$

jousivakio  $k = 200 \text{ N/m}$

Kun punnus on paikallaan, tasapainotilanteessa Newtonin II lain mukaan  $\sum \vec{F} = \vec{0}$ . Kun suunta alaspäin valitaan positiiviseksi, punnuksen liikeyhtälö on  $G - F_j = 0$  eli  $G = F_j$ . Tästä voidaan ratkaista punnuksen massa.

$$mg = kx$$

$$m = \frac{kx}{g} = \frac{200 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0,010 \text{ m}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0,203\,874 \text{ kg} = 203,874 \text{ g} \approx 200 \text{ g}$$

Punnuksen massa on 200 g.

## Tehtävä 6.4.

- a) jousen venymä  $x = 36 \text{ cm} = 0,36 \text{ m}$   
jousivakio  $k = 125 \text{ N/m}$

Jousen potentiaalienergia on

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} \cdot 125 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0,36 \text{ m})^2 = 8,1 \text{ J}.$$

- b) Kun kappaletta nostetaan, siihen vaikuttaa koko noston ajan yhtä suuri paino. Nostamiseen tarvittava voima on näin ollen vakio. Jousen venyttämiseen tarvittava voima on yhtä suuri kuin jousen jousivoima. Venyttämiseen tarvittava voima on  $F = kx$ . Jousen venytyksessä voima on sitä suurempi, mitä pidemmäksi jousi on venytetty.

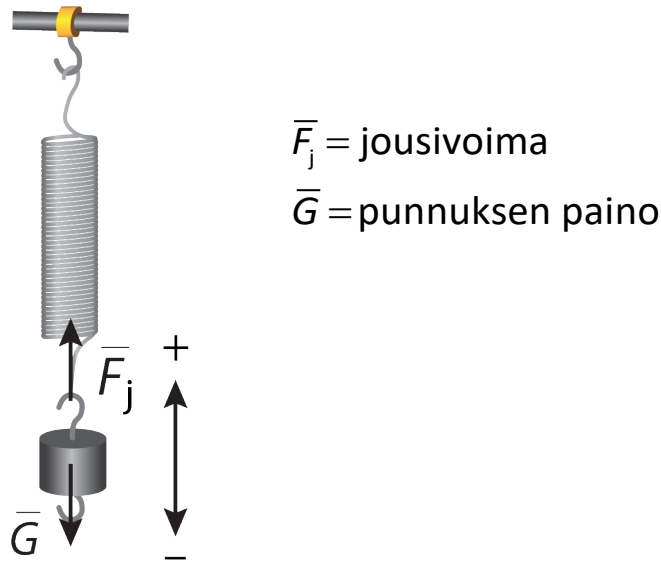
## Tehtävä 6.5.

Harmoninen voima tarkoittaa voimaa, jonka suunta on aina kohti tasapainoasemaa ja jonka suuruus on suoraan verrannollinen tasapainoasemasta mitattuun etäisyyteen.

## Tehtävä 6.6.

ripustettava massa  $m_1 = 0,370 \text{ kg}$

jousen venymä punnuksella  $x_1 = 0,014 \text{ m}$



a) jousen venymä hauen tapauksessa  $x_2 = 0,068 \text{ m}$

Määritetään ensin jousen jousivakio. Kun jouseen ripustetaan punnus, jousi asettuu tasapainotilaan ja Newtonin II lain mukaan  $\sum \bar{F} = \bar{0}$ .

Kun otetaan suuntasopimus huomioon, niin

$$F_j - G_1 = 0$$

$$kx_1 = m_1 g.$$

Jousen jousivakioksi saadaan

$$k = \frac{m_1 g}{x_1} (= \frac{0,370 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{0,014 \text{ m}} = 259,264 \text{ N/m}).$$

Kun jouseen ripustettiin hauki, jousi ja hauki asettuivat tasapainoon. Newtonin II lain mukaan suunnat huomioituna

$$F_j - G_2 = 0$$

$$kx_2 = m_2 g.$$

Hauen massa on

$$m_2 = \frac{kx_2}{g} = \frac{m_1 g x_2}{x_1 g} = \frac{m_1 x_2}{x_1} = \frac{0,370 \text{ kg} \cdot 0,068 \text{ m}}{0,014 \text{ m}} = 1,797 \text{ kg} \approx 1,8 \text{ kg}.$$

b) ahvenen massa  $m = 100 \text{ g}$

Lasketaan jousen venymä tasapainotilanteessa. Newtonin II lain mukaan suunnat huomioituna

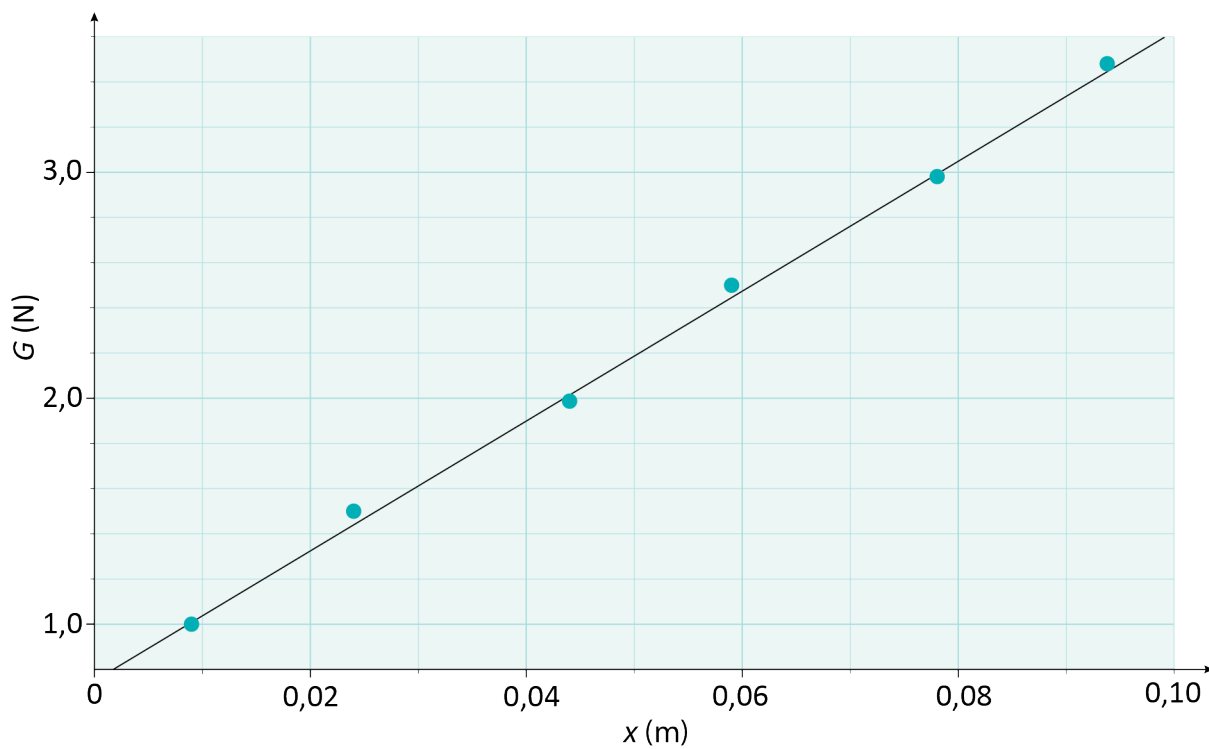
$$F_j - G = 0$$

$$kx = mg$$

$$x = \frac{mg}{k} = \frac{0,100 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{259,264 \text{ N/m}} = 0,00378 \text{ m} \approx 3,8 \text{ mm}.$$

## Tehtävä 6.7.

Esitetään mittaustulokset  $(x, G)$ -koordinaatistossa.



b) Jousivoiman suuruus on  $F_j = kx$ .

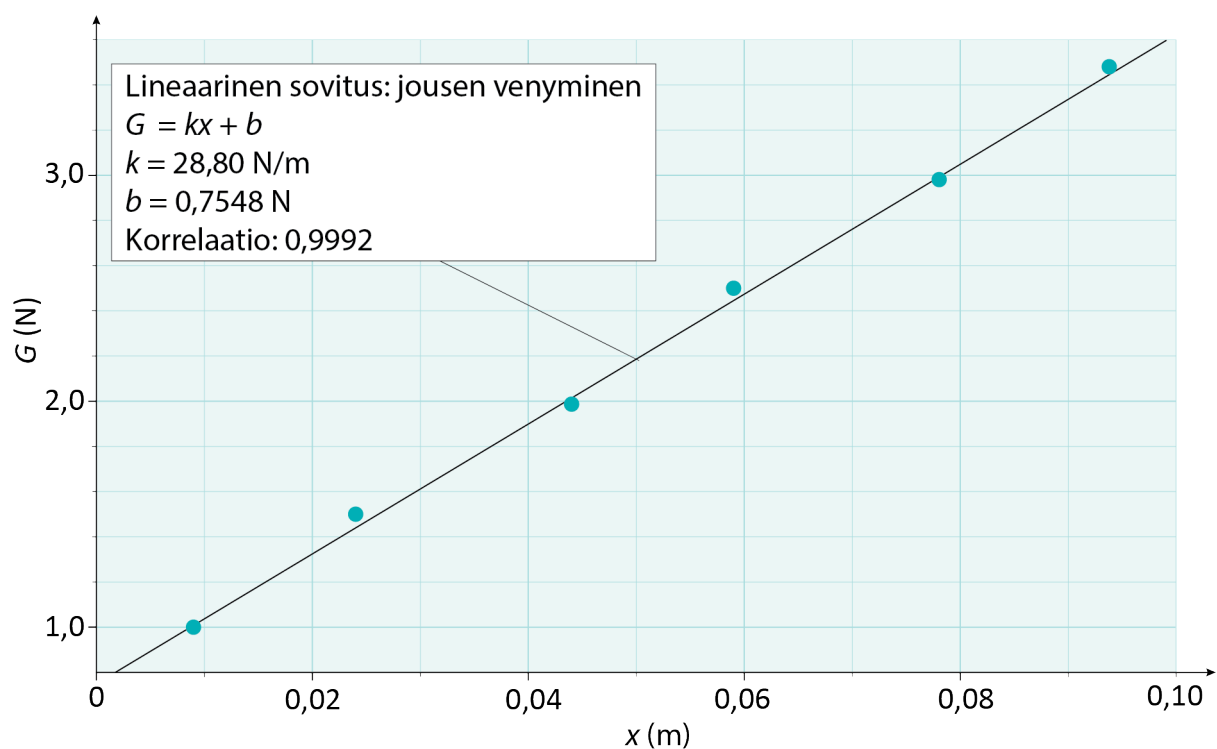
Newtonin II lain mukaan tasapainotilanteessa  $\sum \vec{F} = \vec{0}$ .

Jousivoima  $F_j$  ja punnuksien paino  $G$  ovat vastakkaissuuntaisia, joten

$$F_j - G = 0$$

$$G = kx.$$

Jousivakio  $k$  saadaan  $(x, G)$ -koordinaatiston mittauspisteisiin sovitetun suoran fysikaalisena kulmakertoimena  $k = 28,80 \text{ N/m} \approx 29 \text{ N/m}$ .



c) Mittauksen jousivoima on  $F_j = kx = mg$  eli mittauksen muuttujina on massa ja jousen pituuden muutos. Mittausvirhettä voi aiheutua massan ja pituuden muutoksen mittaamisessa. Massaa voidaan mitata 0,1 gramman tarkkuudella, joten massan mittausten mittausrvirhe on melko pieni, sillä massat ovat vaa'an tarkkuuteen nähden noin tuhatkertaiset. Jousen pituuden muutos mittauksessa oli muutaman senttimetrin luokkaa. Pituuden muutos voidaan määrittää metrimitalla, jonka tarkkuus on 1 mm. Tarkkuutta voidaan lisätä mittaamalla työntömitalla, jolloin pituuden muutos saadaan 0,1 mm:n tarkkuudella ja mittausrvirhe pienenee kymmenesosaan rullamitalla suoritettuun mittaukseen verrattuna.

## Tehtävä 6.8.

jousen pituuden muutos venytyksessä 1  $x_1 = 0,033 \text{ m}$

jousen venyttämiseen tarvittava energia  $E_p = 2,1 \text{ J}$

jousen pituuden muutos venytyksessä 2  $x_2 = 0,027 \text{ m}$

Jouseen liittyvän potentiaalienergian avulla saadaan  
jousen jousivakio

$$E_p = \frac{1}{2} k x_1^2$$
$$k = \frac{2E_p}{x_1^2} (= \frac{2 \cdot 2,1 \text{ J}}{(0,033 \text{ m})^2} = 3856,749 \text{ N/m})$$

Voima, joka tarvitaan venyttämään joustaa 2,7 cm, saadaan  
jousivoiman avulla

$$F_j = k x_2 = \frac{2E_p x_2}{x_1^2} = \frac{2 \cdot 2,1 \text{ J} \cdot 0,027 \text{ m}}{(0,033 \text{ m})^2} = 104,13 \text{ N} \approx 100 \text{ N}.$$

## Tehtävä 6.9.

- a) Jousivoima on yhtä suuri kuin josta venyttävä voima. Jousi B on jäykempi kuin jousi A, koska yhtä suurilla venymillä jousivoima on suurempi.
- b) Jousivoiman suuruus on  $F_j = kx$ . Jousien kytkeminen rinnakkain kaksinkertaistaa jousivakion suuruuden, sillä yhdelle jouselle jousivakio on  $k = \frac{F_j}{x}$  ja kahdelle rinnan kytketylle jouselle  $k = \frac{2F_j}{x}$ . Jousivakio kuvaa jousen jäykkyyttä, joten jyrkempi suora B kuvaa jäykempää systeemiä eli kahta rinnakkain kytkettyä josta.

## Tehtävä 6.10.

jousen pituus alussa  $l_1 = 0,187 \text{ m}$

jousen pituus painettuna  $l_2 = 0,170 \text{ m}$

vaa'an lukema  $m_1 = 31 \text{ kg}$ .

- a) Vaa'an pinnan jouseen kohdistama tukivoima saadaan vaa'an lukeman avulla. Vaa'an jouseen kohdistama tukivoima

$$N = G_1 = m_1 g.$$

Kun jouta painetaan vaakaa vasten, on vaa'an pinnan tukivoima yhtä suuri kuin iskuvaimentimen jousivoima

$$F_j = N$$

$$kx = m_1 g.$$

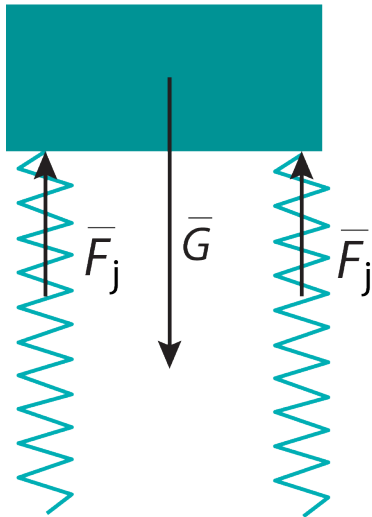
Jousen puristuma on  $x = l_1 - l_2 = 0,187 \text{ m} - 0,17 \text{ m} = 0,017 \text{ m}$ .

Iskuvaimentimen jousivakio on

$$k = \frac{m_1 g}{x} = \frac{m_1 g}{l_1 - l_2} = \frac{31 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{0,187 \text{ m} - 0,170 \text{ m}} = 17\,888,82 \text{ N/m} \approx 18 \text{ kN/m}.$$

b) henkilön massa  $m = 67 \text{ kg}$

Laaditaan jousiin vaikuttavat voimat



$\bar{G}$  = henkilön paino

$\bar{F}_j$  = jousen jousivoima

Kun henkilö istuu paikoillaan mopon jousien päällä, on Newtonin II lain mukaan  $\sum \bar{F} = \bar{0}$ . Kun otetaan huomioon suuntasopimus, niin

$$F_j + F_j - G_2 = 0$$

$$2F_j = m_2g.$$

Koska jouset ovat samanlaisia, jousien puristumat ovat yhtä suuret. Jousien puristumaksi saadaan

$$2kx_2 = m_2g$$

$$x_2 = \frac{mg}{2k} = \frac{67 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{2 \cdot 17\,888,82 \text{ N/m}} = 0,018\,37 \text{ m} \approx 1,8 \text{ cm}.$$

## Tehtävä 6.11.

jousen jousivakio  $k = 28,4 \text{ N/m}$

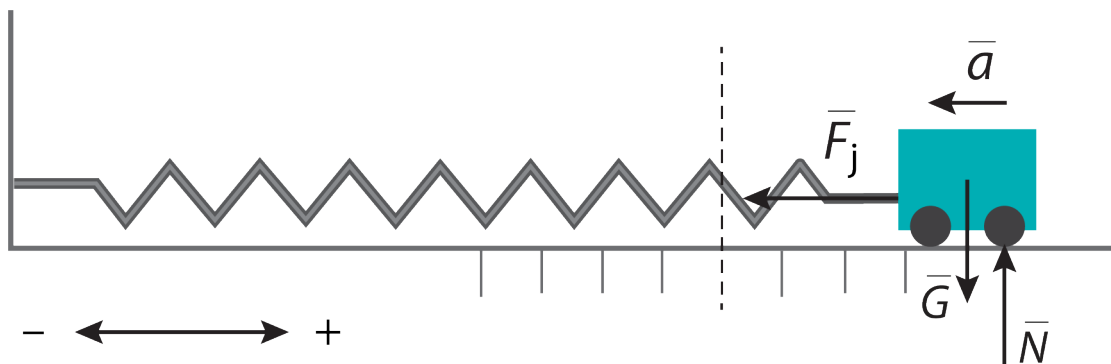
jousen poikkeama tasapainoasemasta  $x = 7,3 \text{ cm} = 0,073 \text{ m}$

vaunun massa  $m = 330 \text{ g} = 0,33 \text{ kg}$

- a) Jousen venyttämisessä tehty työ on yhtä suuri kuin jouseen varastoituva potentiaalienergia.

$$W = E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} \cdot 28,4 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0,073 \text{ m})^2 = 0,0756718 \text{ J} = 75,6718 \text{ mJ} \approx 76 \text{ mJ}$$

- b) Laaditaan tilanteesta voimakuvio.



$\bar{F}_j$  = jousivoima

$\bar{G}$  = vaunun paino

$\bar{N}$  = vaunuradan tukivoima

Jousivoima pyrkii palauttamaan vaunua tasapainoasemaan. Jousivoiman suuruus on  $F_j = kx$ .

Valitaan jousivoiman suunta positiiviseksi suunnaksi, tällöin Newtonin II lain mukainen liikeyhtälö vaunun vaakasuuntaiselle liikkeelle on

$$F_j = ma.$$

Vaunu lähtee liikkeelle kiihtyvyydellä

$$a = \frac{F_j}{m} = \frac{kx}{m} = \frac{28,4 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0,073 \text{ m}}{0,33 \text{ kg}} = 6,282\,424 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 6,3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

## Tehtävä 6.12.

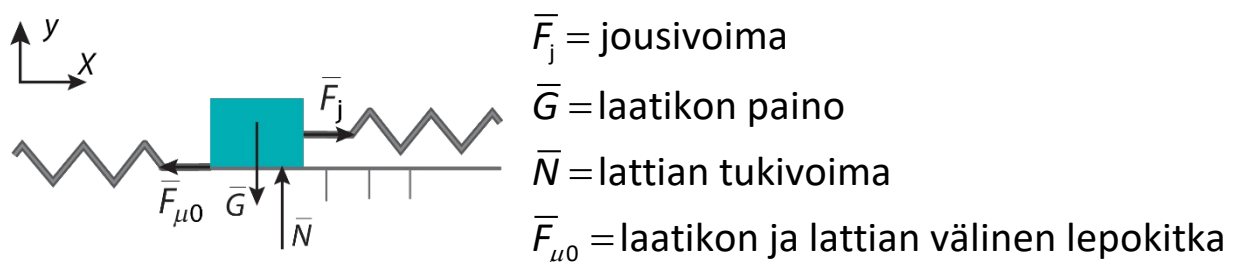
jousen venymä  $x = 17 \text{ cm} = 0,17 \text{ m}$

jousivakio  $k = 810 \text{ N/m}$

laatikon massa  $m = 44 \text{ kg}$

Kun jousesta vedetään, jousessa vaikuttaa jousivoima, jonka suunta on kohti jousen tasapainoasemaa. Jousen molempiin päihin vaikuttaa yhtä suuri voima, joten Newtonin III lain nojalla laatikkoa vetävä jousivoima on yhtä suuri kuin voima, jolla jousesta vedetään.

Piirretään laatikon voimakuvio.



Laatikon ja lattian välinen lepokitka saa suurimman arvonsa juuri ennen kuin laatikko lähtee liikkeelle. Tällöin lepokitkan suuruus on  $F_{\mu 0} = \mu_0 N$  ja Newtonin II lain mukainen liikeyhtälö laatikon vaakasuuntaiselle liikkeelle on

$$\Sigma F_x = 0$$

$$F_j - F_{\mu 0} = 0$$

$$F_{\mu 0} = F_j.$$

Pystysuuntaiselle liikkeelle on voimassa

$$\Sigma F_y = 0$$

$$N - G = 0$$

$$N = G.$$

Jousivoiman suuruus on  $F_j = kx$ , joten lattian ja laatikon välinen lepokitkakerroin on

$$\mu_0 = \frac{F_{\mu 0}}{N} = \frac{F_j}{G} = \frac{kx}{mg} = \frac{810 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0,17 \text{ m}}{44 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0,3190158 \approx 0,32.$$

## Tehtävä 6.13.

- b) Jousivakion voi määrittää esimerkiksi ripustamalla jouseen punnuksia ja kirjaamalla venymän ja painon arvot ylös. Kun mittaustulokset esitetään  $(x, G)$ -koordinaatistossa, syntyneen kuvaajan fysikaalinen kulmakerroin on saman kuin jousen jousivakio.
- c) Mittausvirhettä voi pienentää esimerkiksi ottamalla riittävän monta mittaustulosta ja valitsemalla sopiva mittausalue.

## Tehtävä 6.14.

- a) Jousen pituus mittauksen alussa oli  $l_0 = 12,1$  cm.  
Taulukoidaan massat ja pituudet. Lasketaan pituuden muutos  $x = l - l_0$ .

| $l$ (m) | $m$ (kg) | $x$ (m) |
|---------|----------|---------|
| 0,121   | 0        | 0       |
| 0,143   | 0,05     | 0,022   |
| 0,162   | 0,1      | 0,041   |
| 0,182   | 0,15     | 0,061   |
| 0,203   | 0,2      | 0,082   |
| 0,223   | 0,25     | 0,102   |
| 0,243   | 0,3      | 0,122   |

- b) Punnus on paikallaan, jolloin tasapainossa olevalle jouselle on Newtonin II lain mukaan voimien suunnat huomioituina  $F_j - G = 0$  eli

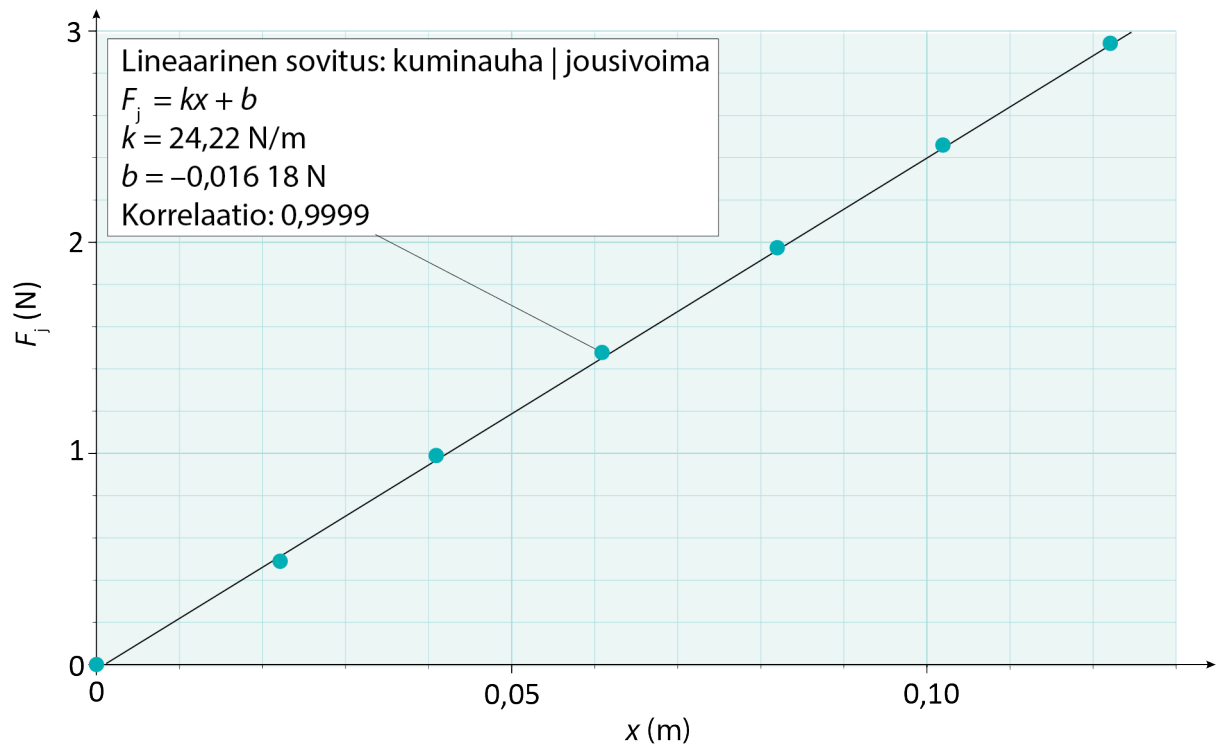
$$F_j = G$$

$$F_j = mg.$$

Lasketaan uudet sarakkeet jousivoimalle.

| $l$ (m) | $m$ (kg) | $x$ (m) | $F$ (N) |
|---------|----------|---------|---------|
| 0,121   | 0        | 0       | 0       |
| 0,143   | 0,05     | 0,022   | 0,491   |
| 0,162   | 0,1      | 0,041   | 0,981   |
| 0,182   | 0,15     | 0,061   | 1,472   |
| 0,203   | 0,2      | 0,082   | 1,962   |
| 0,223   | 0,25     | 0,102   | 2,453   |
| 0,243   | 0,3      | 0,122   | 2,943   |

Jousivoimalle on voimassa  $F_j = kx$ .



Jousivakio saadaan  $(k, F_j)$ -koordinaatiston kuvaajan fysikaalisesta kulmakertoimesta. Määritetään kuvaajan fysikaalinen kulmakerroin.

Jousen jousivakio on  $k = 24,22 \text{ N/m} = 24 \text{ N/m}$ .

- c) Mitä jäykempi jousi on, sitä suurempi on jousen jousivakio. Jousivoimalle pätee  $F_j = kx$ . Koska jousivakio on  $(k, F_j)$ -koordinaatiston kuvaajan fysikaalinen kulmakerroin, voidaan todeta, että mitä suurempi jousivakio on, sitä jyrkemmin suora kulkee koordinaatistossa.

## Tehtävä 6.15.

- a) Kun jousi roikkuu statiivissa ja jouseen ripustetaan punnus, jousi venyy uuteen tasapainoasemaan. Tällöin Newtonin II lain mukaan paikallaan olevaan punnukseen kohdistuva kokonaisvoima on nolla. Punnukseen vaikuttaville voimille suunnat huomioituina on voimassa

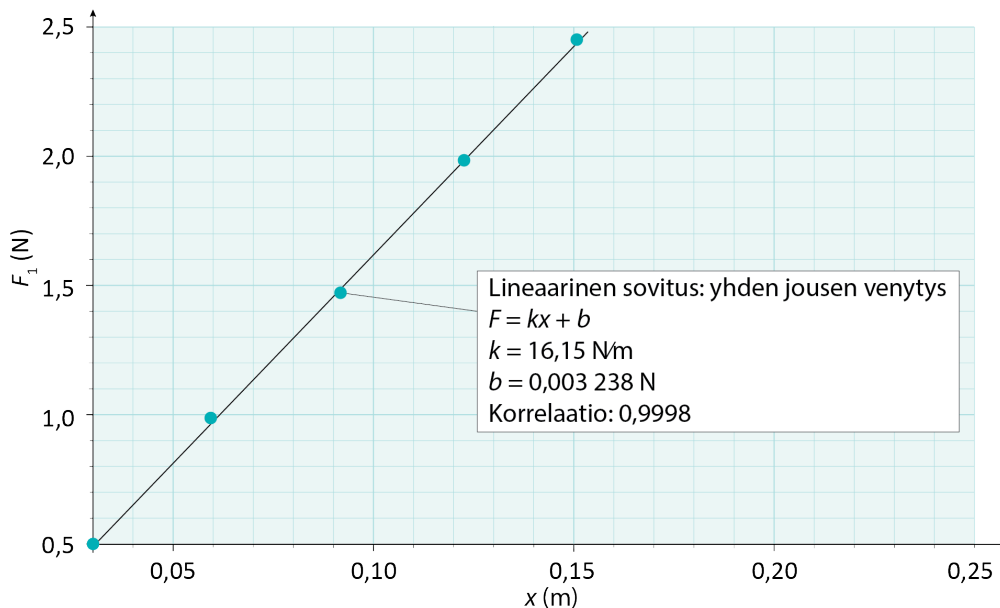
$F_j - G = 0$ . Jousivoima on yhtä suuri kuin josta venyttävä voima eli punnuksen paino,  $F_j = mg$ .

Taulukossa on esitetty jousivoima yhdelle jouselle sarakkeessa  $F_1$  ja kahden peräkkäisen jousen muodostamalle jousisysteemille sarakkeessa  $F_2$ .

| Asetelma 1:<br>yhden jousen venytys |           |           |
|-------------------------------------|-----------|-----------|
| $m$ (kg)                            | $x_1$ (m) | $F_1$ (N) |
| 0,051                               | 0,031     | 0,50031   |
| 0,101                               | 0,060     | 0,99081   |
| 0,150                               | 0,092     | 1,4715    |
| 0,202                               | 0,123     | 1,98162   |
| 0,250                               | 0,151     | 2,4525    |

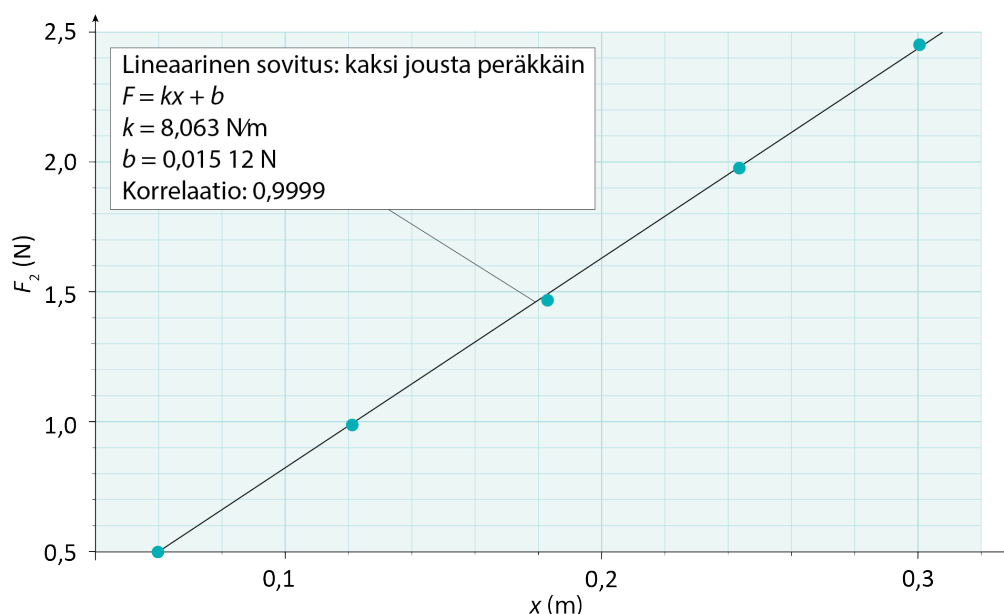
| Asetelma 2:<br>kaksi josta peräkkäin |           |           |
|--------------------------------------|-----------|-----------|
| $m$ (kg)                             | $x_2$ (m) | $F_2$ (N) |
| 0,051                                | 0,059     | 0,50031   |
| 0,101                                | 0,121     | 0,99081   |
| 0,150                                | 0,183     | 1,4715    |
| 0,202                                | 0,244     | 1,98162   |
| 0,250                                | 0,301     | 2,4525    |

b) Esitetään jousivoima pituuden muutoksen suhteen yhdelle jouselle.



Jousivoiman suurus on  $F_j = kx$ , joten jousivakio saadaan suoran fysikaalisena kulmakertoimena. Jousivakio yhdelle jouselle on  $k_1 = 16,15 \text{ N/m} \approx 16 \text{ N/m}$ .

Esitetään jousivoima pituuden muutoksen suhteen kahden peräkkäisen jousen systeemille.

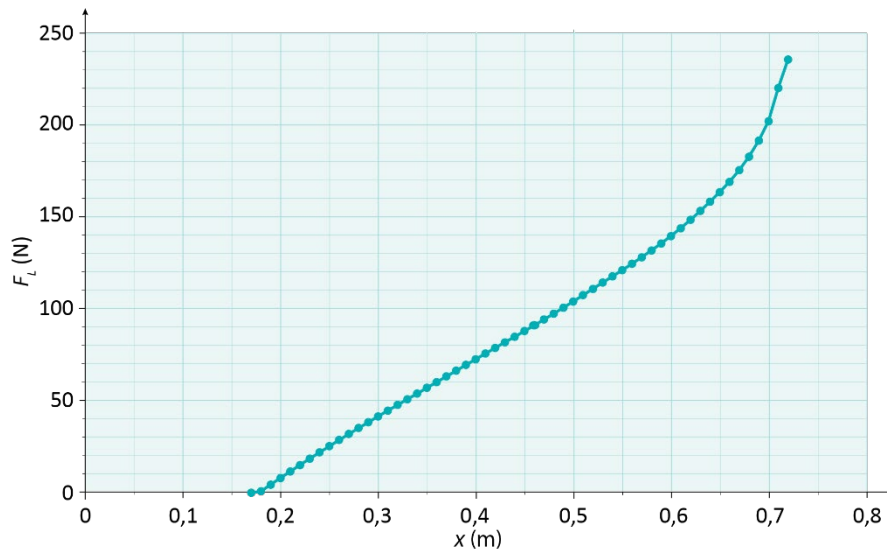


Jousivakion suuruudeksi kahden peräkkäisen jousen jousisysteemille saadaan suoran fysikaalisena kulmakertoimena  $k_2 = 8,063 \text{ N/m} \approx 8,1 \text{ N/m}$ .

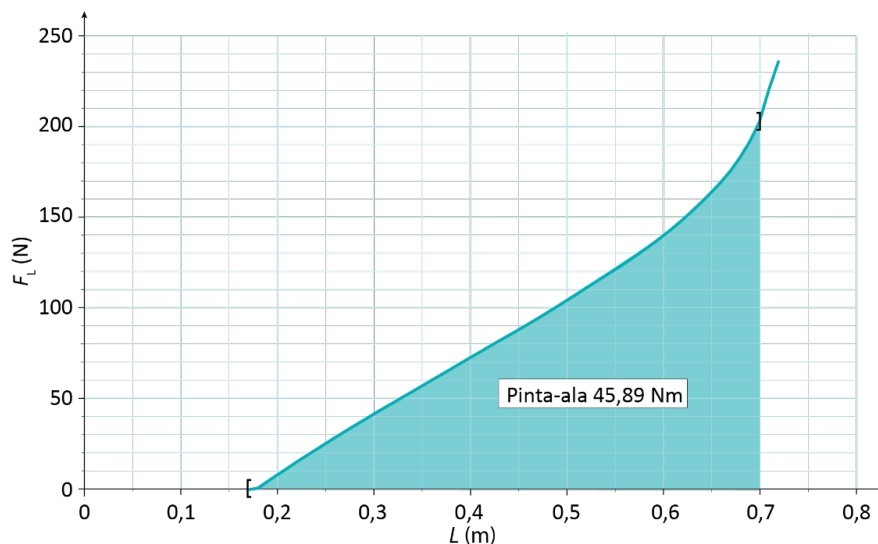
- c) Edellisten kohtien tulosten perusteella kahden peräkkäin kytketyn jousen muodostaman jousisysteemin jousivakio on puolet yhden jousen jousivakiosta.

## Tehtävä 6.16.

a) Esitetään voima vetopituuden funktiona.



Työ määritetään kuvaajan ja vaaka-akselin rajoittamasta fysikaalisesta pinta-alasta.



Kun jousi venytettiin 0,70 m vetopituuteen asti, teki voima työn 45,89 Nm  $\approx$  46 J.

b) voiman tekemä työ jousen jännityksessä  $W = 45,89 \text{ J}$

nuolen massa

$$m = 490 \cdot 64,79891 \cdot 10^{-6} \text{ kg} = 31,75147 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

Nuoli saa suurimman mahdollisen nopeutensa silloin, kun jouseen tehdään työtä ja jousen potentiaalienergia suurenee ja kun varastoitunut potentiaalienergia muuntuu kokonaisuudessaan nuolen liike-energiaksi. Tällöin nuolen liike-energian muutos on yhtä suuri kuin jousen tekemä työ. Työperiaatteen mukaisesti  $\Delta E_k = W$ .

Koska alussa nuolen nopeus on nolla, myös sen liike-energia on nolla. Liike-energian muutos on yhtä suuri kuin nuolen liike-energia lopussa. Ratkaistaan liike-energian yhtälöstä  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$  nuolen nopeus

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 45,89 \text{ J}}{31,75147 \cdot 10^{-3} \text{ kg}}} = 53,764 \text{ 07 } \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 54 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

## Tehtävä 6.17.

- a) Kun peräkkäin kiinnitettyjä jousia venytetään voimalla  $F_v$  ja jouset ovat paikoillaan, tasapainotilanteessa Newtonin II lain mukaan molemmille jousille on voimassa  $\sum \vec{F} = \vec{0}$ . Jousen molempiin päihin vaikuttaa siis yhtä suuri voima. Newtonin III lain mukaan ensimmäinen jousi vetää toista joustta yhtä suurella voimalla kuin toinen jousi vetää ensimmäistä. Jousia venyttää siis yhtä suuri voima.

Jousia venyttävä voima on  $F_v = kx$ , joten molempien jousien pituuden muutos on  $x = \frac{F_v}{k}$ .

Yhteensä jouset venyvät määrän  $2x = \frac{2F_v}{k}$ .

Tällöin yhdistelmän jousivakio on

$$k_{\text{yhdistelmä}} = \frac{F_v}{\frac{2F_v}{k}} = \frac{k}{2}$$

Peräkkäin kytkettyjen jousien yhteinen jousivakio on puolet yksittäisen jousen jousivakiosta.

b) Kun rinnakkain kiinnitettyjä jousia venytetään voimalla  $F_v$  ja jouset ovat paikoillaan, tasapainotilanteessa Newtonin II lain mukaan jousien systeemille on voimassa  $\sum \vec{F} = \vec{0}$ . Kun valitaan venyttävän voiman  $F_v$  suunta positiiviseksi, voidaan yhtälö kirjoittaa muodossa  $F_v - kx - kx = 0$ , josta saadaan jousisysteemin venymän suuruudeksi edelleen  $x = \frac{F_v}{2k}$ .

Nyt yhdistelmän jousivakio on

$$k_{\text{yhdistelmä}} = \frac{F_v}{\frac{F_v}{2k}} = 2k.$$

Rinnakkain kytkettyjen jousien yhteinen jousivakio on kaksinkertainen yhden jousen jousivakioon verrattuna.

## Tehtävä 6.18.

kahvan etäisyys saranasta  $r_1 = 0,78 \text{ m}$

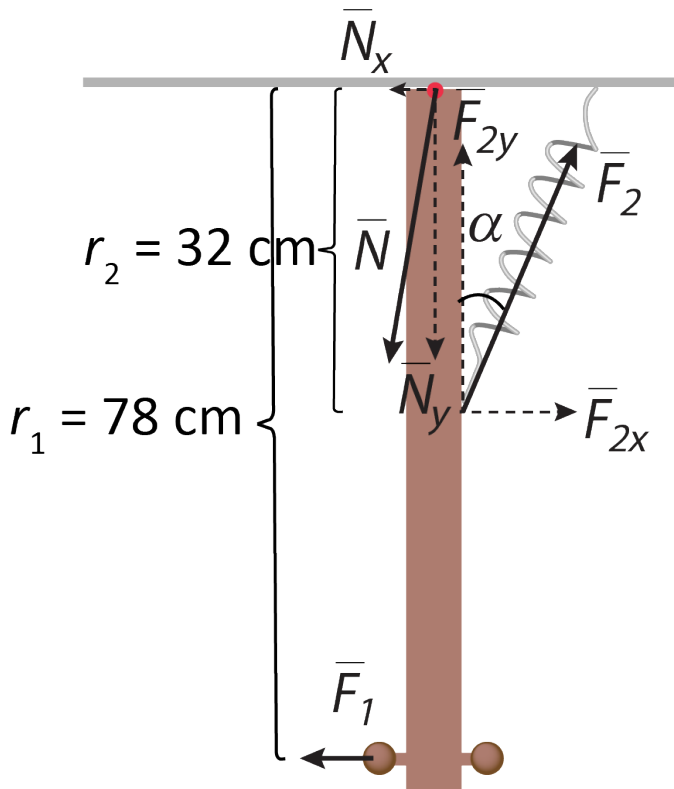
jousen etäisyys saranasta  $r_2 = 0,32 \text{ m}$

jousen ja oven välinen kulma  $\alpha = 26^\circ$

jousen venymä  $x = 0,034 \text{ cm}$

jousen jousivakio  $k = 53 \text{ N/m}$

Laaditaan voimakuvio oveen vaikuttavista voimista.



$\bar{F}_1$  = käden oveen kohdistama voima

$\bar{F}_2$  = jousen oveen kohdistama voima

$\bar{N}$  = saranan tukivoima

Voimat  $\vec{F}_1$  ja  $\vec{F}_2$  aiheuttavat oveen yhtä suuret mutta vastakkaissuuntaiset momentit. Kiertoakselina on oven sarana.

Jousen oveen kohdistama voima on jousivoima,  $F_2 = kx$  ja voiman kohtisuora komponentti oveen nähden on  $F_{2x} = F_2 \sin \alpha = kx \sin \alpha$

Pyörimisen tasapainoehdosta saranan suhteen saadaan

$$\Sigma M = 0$$

$$F_1 r_1 - F_{2x} r_2 = 0$$

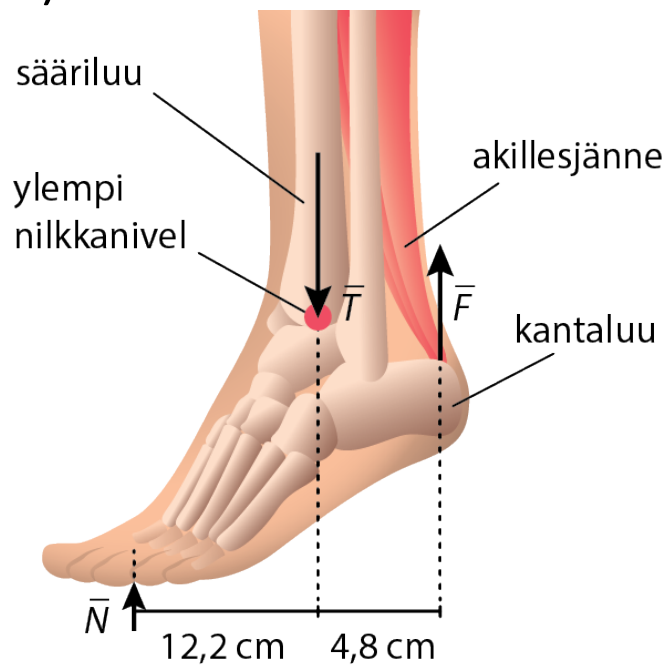
$$F_1 r_1 = kx r_2 \sin \alpha$$

$$F_1 = \frac{kx r_2 \sin \alpha}{r_1} = \frac{53 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0,034 \text{ m} \cdot 0,32 \text{ m} \cdot \sin 26^\circ}{0,78 \text{ m}} = 0,324080 \text{ N} \approx 0,32 \text{ N}$$

Ovenkahvasta on pidettävä kiinni vähintään 0,32 N:n voimalla.

## Tehtävä 6.19.

a)



$\bar{N}$  = lattian tukivoima

$\bar{T}$  = nivelen tukivoima

$\bar{F}$  = akillesjänteen kantaluuhun kohdistama voima

b) henkilön massa  $m = 78 \text{ kg}$

lattian tukivoiman varsi  $r_1 = 12,2 \text{ cm} = 0,122 \text{ m}$

akillesjänteessä vaikuttavan voiman varsi  
 $r_2 = 4,8 \text{ cm} = 0,048 \text{ m}$

Koska päkiälläan seisovan henkilön liikeyhtälö on  $\sum \vec{F} = \vec{0}$ , lattian tukivoiman suuruus on sama kuin henkilön paino,  $N = G$ .

Jalka on tasapainossa pyörimisen suhteen. Tarkastellaan pyörimistä ylemmän nilkkanivelen suhteen. Momenttien tasapainoehdoksi saadaan  $\sum M = 0$  ja

$$Nr_1 = Fr_2$$

$$F = \frac{Nr_1}{r_2} = \frac{Gr_1}{r_2} = \frac{mgr_1}{r_2}$$

$$= \frac{78 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,122 \text{ m}}{0,048 \text{ m}} = 1\,944,83 \text{ N} \approx 1,9 \text{ kN}.$$

Akillesjänteessä vaikuttava voima on 1,9 kN.

Yhtälöstä nähdään myös, että akillesjänteessä

vaikuttava voima on  $F = \frac{r_1}{r_2} \cdot G = \frac{0,122 \text{ m}}{0,048 \text{ m}} \cdot G = 2,542G \approx 2,5G$

eli 2,5-kertainen henkilön painoon verrattuna.

c) akillesjänteen jousivakio  $k = 450 \text{ kN/m} = 450\,000 \text{ N/m}$

akillesjängteessä vaikuttava voima on edellisen kohdan perusteella  $F = 1\,944,83 \text{ N}$

Akillesjänteen venymä saadaan jousivoiman avulla:

$$F = kx$$

$$x = \frac{F}{k} = \frac{1\,944,83 \text{ N}}{450\,000 \frac{\text{N}}{\text{m}}} = 4,3218 \cdot 10^{-3} \text{ m} \approx 4,3 \text{ mm}$$

Jänne venyy 4,3 mm.

## Tehtävä 6.20.

- a) Ruostumaton teräs on hyvä rakennusmateriaali, koska se on kestävä, ja sitä pystytään hitsaamaan hyvin. Ruostumaton teräs ei haurastu kosteissa olosuhteissa.
  
- b) Ruostumattomaan teräkseen on seostettu noin 18 % kromia. Ruostumattoman teräksen pinnalle muodostuu kromioksidikerros, joka estää ruosteen muodostumisen. Kromioksidin muodostuminen on teräkselle energeettisesti edullisempaa kuin rautaoksidin eli ruosteen muodostuminen.
  
- c) Kuvasta 2 nähdään, että duplex-teräksen myötöjännitysraja on noin 450 MPa. Tätä pienemmillä jännityksillä teräskappale venyy elastisesti ja palaa alkuperäiseen muotoonsa, kun jännitys poistetaan. Koska 650 MPa:n jännitys on suurempi kuin myötöjännitysraja, kappaleen atomien välisiä sidoksia rikkoutuu, ja kappaleen muoto muuttuu pysyvästi.

d) Määritetään ensin vaijeriin kohdistuva normaalijännitys

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{10\text{kg} \cdot 9,81\text{m/s}^2}{3 \cdot 10^{-6}\text{m}^2} = 32,7\text{MPa}$$

(Kun verrataan 32,7 MPa jännitystä kuvasta arvioitavaan austeniittisen teräksen myötöjännitysrajaan, noin 200 MPa, voidaan päätellä, että vesiämpärin nosto ei muuta vaijerin rakennetta pysyvästi, vaan vaijerin rakenne palaa alkuperäiseen muotoonsa jännityksen poistuessa.

Vaijerin oma massa on sen verran pieni, että se voidaan jättää tarkastelussa huomiotta. Venymä  $\varepsilon$  voidaan ratkaista kimmokertoimen avulla:

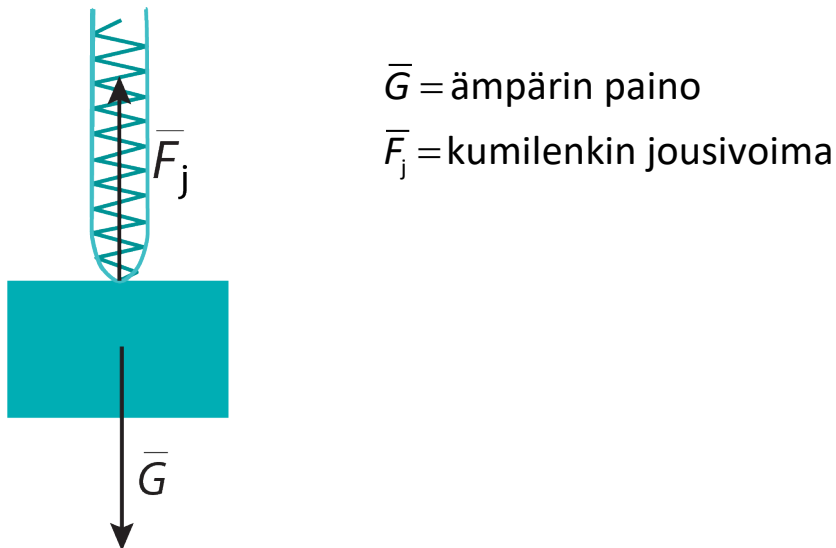
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{32,7\text{MPa}}{200\text{GPa}} = 0,01635\%$$

10 metrin mittaisen vaijerin pituus muuttuu

$$\varepsilon l = \Delta l = 0,0001635 \cdot 10\text{m} \approx 1,6\text{mm}.$$

## Tehtävä 6.21.

a) Tarkastellaan kumilenkkiä yhtenä jousena



Voimakuvion pisteytys:

Kuvaan on merkitty kaikki tilanteessa vaikuttavat voimavektorit oikeisiin suuntiin ja oikeille kohdilleen:  
(2 p)

- Ämpärin painoa kuvaava vektori alkaa kappaleen painopisteestä
- Kumilenkin jousivoimaa kuvaava vektori alkaa kappaleesta
- Voimavektorien pituudet ovat oikein. Pystysuunnassa jousivoimien pituuksien summa on yhtä suuri kuin paino
- Voimat on nimetty listaan kuvion alle.

Huom!

- Jos voimakuviossa on yksikin ylimääräinen voima, ei voimakuviosta voi saada pisteitä.
- Jos kaksi tai useampi voimista puuttuu, ei voimakuviosta voi saada pisteitä.
- Jos voimavektorin vaikutuspiste on väärin, esimerkiksi voima on piirretty irti kappaleesta sen vierelle tai eteen, voimavektorista ei anneta pisteitä. Jos kaksi tai useampi voima on näin piirretty, voimakuviosta ei saa pisteitä.

- b) Kun kumilenkkiin ripustettuun ämpäriin lisätään kiviä, kumilenkki asettuu tasapainoon. Newtonin II lain  $\sum \vec{F} = \vec{0}$  mukaan voimien suunnat huomioituina kumilenkin jousivoimaksi saadaan

$$F_j - G = 0$$

$$F_j = G \quad (2 \text{ p})$$

$$F_j = mg.$$

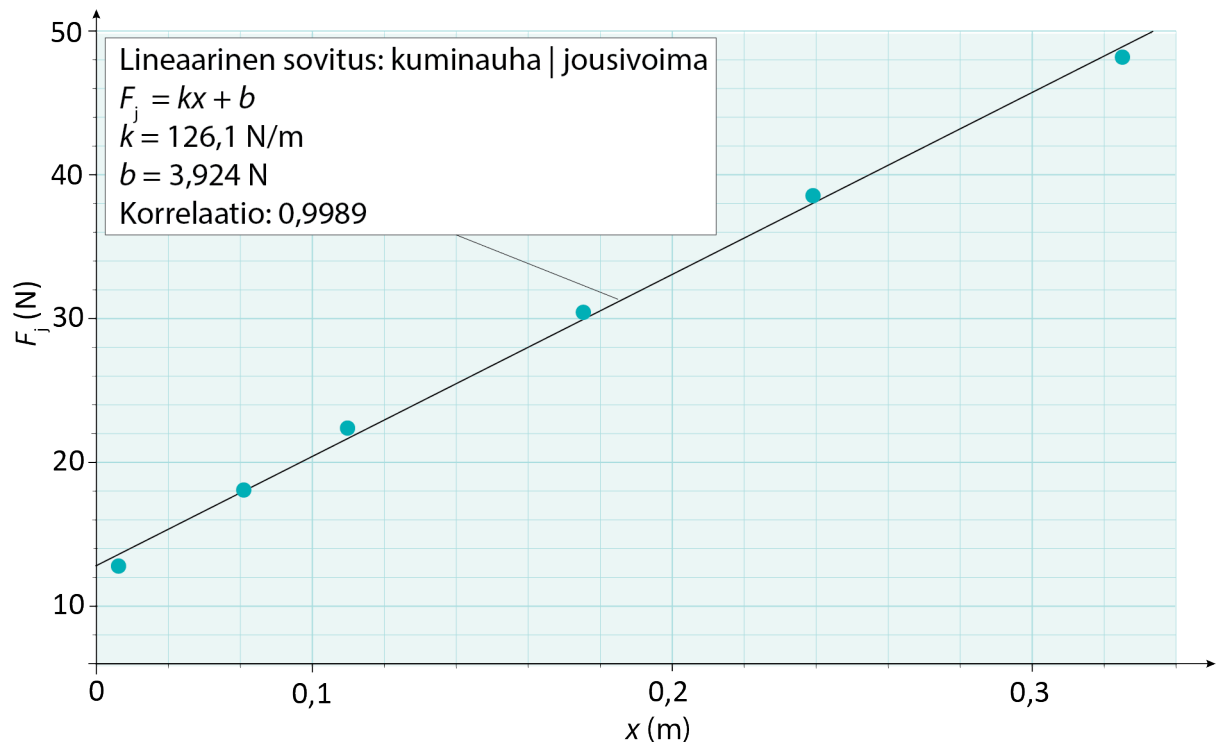
Kumilenkin pituuden muutos  $x$  saadaan, kun vähennetään mitatuista pituuksista kumilenkin vapaa pituus 97,6 cm eli  $x = l - l_0$ .

Eri massoja vastaavat kumilenkin jousivoimat sekä kumilenkin pituuden muutokset:

| ämpärin<br>massa<br>(kg) | kumilenkin<br>jousivoima<br>(N) | kumilenkin<br>pituus (m) | pituuden<br>muutos<br>(m) |
|--------------------------|---------------------------------|--------------------------|---------------------------|
| 1,31                     | 12,8511                         | 102,2                    | 0,046                     |
| 1,83                     | 17,9523                         | 105,7                    | 0,081                     |
| 2,28                     | 22,3668                         | 108,6                    | 0,11                      |
| 3,10                     | 30,4110                         | 115,1                    | 0,175                     |
| 3,92                     | 38,4552                         | 121,5                    | 0,239                     |
| 4,91                     | 48,1671                         | 130,1                    | 0,325                     |

(2 p)

Laaditaan tuloksista kuvaaja.



(akselit nimetty ja yksiköt 1 p, akselit oikein päin 1 p, mittauspisteet näkyvät ja mittauspisteet erottuvat selkeästi 1 p, sovitettu suora 1 p)

- c) Jousivoiman ja jousen pituuden välillä on voimassa  $F_j = kx$ . (1 p)

Jousivakio saadaan  $(x, F_j)$ -koordinaatiston kuvaajan fysikaalisesta kulmakertoimesta. (1 p) b-kohdan lineaarisen sovituksen perusteella kumilenkin jousivakio on

$$k = 126,1 \text{ N/m} \approx 126 \text{ N/m}. (1 \text{ p})$$

d) Kumilenkin pituuden muutos  $x = 0,37 \text{ m}$ .

Jousen potentiaalienergia on  $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ . (1 p)

Käytetään c-kohdan jousivakion tulosta ja lasketaan kumilenkin potentiaalienergia.

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2} \cdot 126,1 \frac{\text{N}}{\text{m}} (0,37 \text{ m})^2 = 8,6315 \text{ J} \approx 8,6 \text{ J} \quad (1 \text{ p})$$

# 7. Harmoninen värähdysliike

## Tehtävä 7.1.

Väitteistä oikein: a), c), d), e)

Väitteistä väärin: b), f)

Korjaukset vääriin väitteisiin:

- b) Värähdysliikkeen taajuus kuvaa, kuinka monta kertaa värähdys tapahtuu aikayksikössä. Värähtelyn amplitudi kuvaa värähdysliikkeen laajuutta.
- f) Punnuksen nopeus ja siten myös liike-energia on suurimmillaan värähtelijän tasapainoaseman kohdalla.

## Tehtävä 7.2.

- a) Kuvaajasta katsottuna yhden jakson aika on  
 $T = 4,0$  sekuntia

- b) Värähtelyn taajuus on  $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{4,0\text{ s}} = 0,25\text{ Hz}$ .

- c) Amplitudi on maksimi poikkeama tasapainoasemasta. Kuvaajasta luettuna värähtelyn amplitudi on  $A = 0,15\text{ m}$ .

## Tehtävä 7.3.

a) Ääniraudan taajuus on  $f = 440 \text{ Hz}$  eli se tekee 440 värähdysliikettä sekunnissa.

b) Seitsemään värähdykseen kuluu aikaa 2,56 sekuntia. Lasketaan värähdysten jaksonaika.

$$T = \frac{2,56 \text{ s}}{7} = 0,3657 \text{ s} \approx 0,37 \text{ s}.$$

$$\text{Värähtelyn taajuus } f = \frac{1}{T} = \frac{7}{2,56 \text{ s}} = 2,7344 \text{ Hz} \approx 2,7 \text{ Hz}.$$

c) Harmonisen värähtelijän jaksonaika saadaan yhtälöstä.

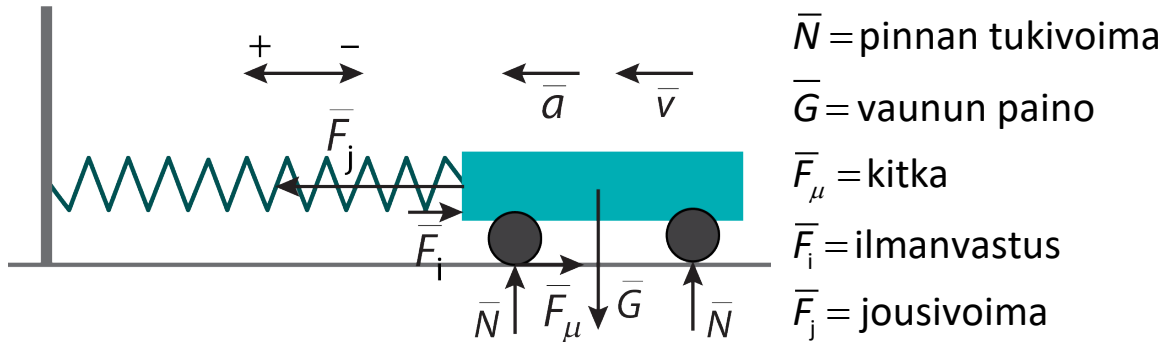
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Värähtelyn taajuus

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{140 \text{ N/m}}{0,42 \text{ kg}}} = 2,905758 \text{ Hz} \approx 2,9 \text{ Hz}.$$

## Tehtävä 7.4.

a)



Vaunuun vaikuttaa vaakasuunnassa jousivoima, kitka ja ilmanvastus.

b) Jousen ääriasemassa vastusvoimat voidaan olettaa mitättömiksi. Newtonin II lain mukaan  $\sum \bar{F} = m\bar{a}$ .

Valitaan jousivoiman suunta positiiviseksi suunnaksi. Kirjoitetaan liikeyhtälö.

$$F_j = ma$$

$$-kx = ma$$

$$a = \frac{-kx}{m}$$

Jousen venymän ja vaunun kiihtyvyyden suunnat ovat vastakkaiset.

- c) Newtonin II lain mukaan vaunun kiihtyvän liikkeen aiheuttaa jousivoima ja suuruuksia tarkasteltuna  $F_j = ma$ . Jousivoima riippuu venymästä  $x$  yhtälön  $F_j = kx$  mukaan. Tällöin kiihtyvyyden suuruudelle saadaan

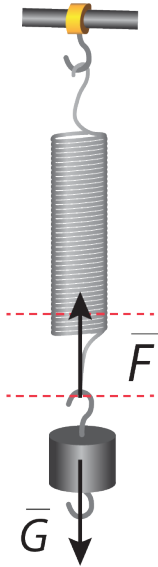
$$a = \frac{kx}{m}.$$

Kiihtyvyys on suoraan verrannollinen venymään tasapainoasemasta. Kiihtyvyys on suurin, kun etäisyys tasapainoasemasta on suurin eli jousen ääriasemassa.

- d) Jouseen varastoitunut potentiaalienergia muuntuu vaunun liike-energiaksi ja edelleen jousen potentiaalienergiaksi. Systeemin kokonaisenergia vuorottelee loputtomasti näiden kahden energialajin välillä eikä muunnu muiksi energialajeiksi, jos vastusvoimia ei ole.

## Tehtävä 7.5.

a)

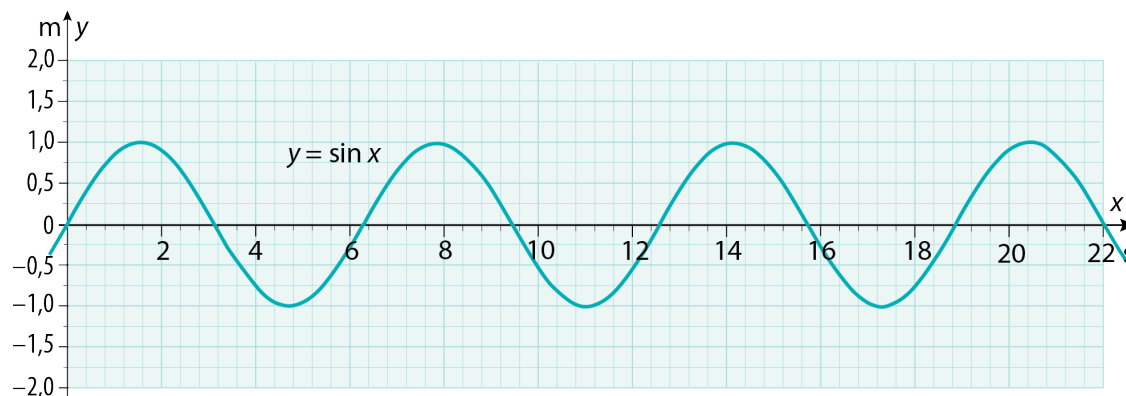


Punnukseen vaikuttaa painovoima  $\vec{G}$  ja jousivoima  $\vec{F}$ .

b) Newtonin II lain mukaisesti  $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ . Punnus on paikallaan, joten siihen vaikuttavien voimien summa on nolla ja kiihtyvyys on nolla. Valitaan jousivoiman suunta positiiviseksi suunnaksi. Liikkeyhtälö on  $F_j - G = 0$ .

## Tehtävä 7.6.

a)



Sinifunktio voi saada arvoja välillä  $[-1, 1]$  eli jos pystyakselin yksikkö on metri, niin arvot ovat välillä  $[-1 \text{ m}, 1 \text{ m}]$ .

b) Kuvaajasta luettuna amplitudin suuruus on  $A = 1,0 \text{ m}$ .

c) Kuvaajasta luettuna aikavälillä 0–22 sekuntia on 3,5 jaksoa. Jaksonaika on siis  $T = \frac{22\text{s}}{3,5} = 6,2857\text{s} \approx 6,3\text{s}$ .

d) Värähtelyn taajuus on  $f = \frac{1}{T} = \frac{3,5}{22\text{s}} = 0,1591\text{Hz} \approx 0,16\text{Hz}$ .

## Tehtävä 7.7.

- a) Resonanssi havaitaan, jos ulkoinen voima vaikuttaa kappaleeseen kappaleen ominaistajuuksilla.
- b) Resonanssissa kappaleen värähtelyn amplitudi kasvaa.
- c) Esimerkiksi kävelysillat saattavat resonoida tuulen tai sillalla kävelevien ihmisten takia. Jos ulkoinen voima vaikuttaa sillan ominaistajuudella, sillan värähtelyn laajuus eli amplitudi kasvaa.

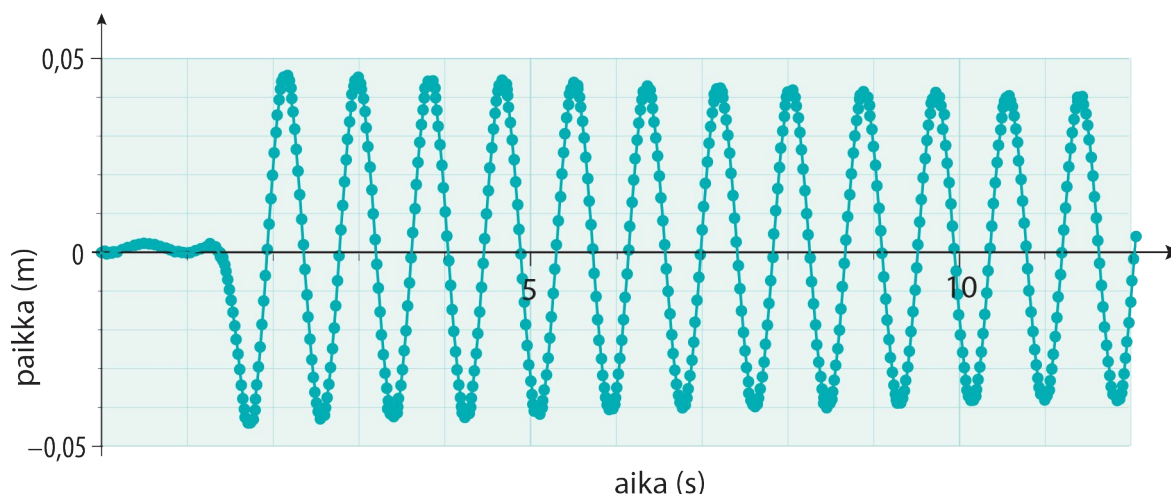
## Tehtävä 7.8.

- a) Punnuksen liike-energia on suurimmillaan silloin, kun punnuksen nopeus on suurin. Punnuksen nopeus on suurin systeemin tasapainoasemassa. Tasapainoasemassa punnuksen kiihtyvyys on nolla, koska vaikuttavien voimien summa on nolla. Nopeus kasvaa siis tasapainoasemaan asti, jonka jälkeen se alkaa pienentyä.
- b) Punnuksen potentiaalienergia on suurimmillaan värähtelyn ääriasemassa, jolloin punnus-jousisysteemin energia on potentiaalienergiaa.
- c) Jos vastusvoimia ei oteta huomioon, punnuksen kokonaisenergia on koko ajan yhtä suuri. Jos taas systeemin vastusvoimat otetaan huomioon, kokonaisenergia on suurimmillaan heti värähdysliikkeen alussa.

## Tehtävä 7.9.

punnuksen massa  $m = 0,250 \text{ kg}$

a)



b) Kuvaajasta luettuna 12,5 jaksoon kuluu aikaa 10,64 s.

$$\text{Jaksonaika on } T = \frac{10,64 \text{ s}}{12,5} = 0,8512 \text{ s} \approx 0,85 \text{ s}.$$

c) Kuvaajasta luettuna värähtelyn amplitudi alussa on  $A = 4,5 \text{ cm}$ .

d) Lasketaan jousen jousivakion arvo harmonisen värähtelijän jaksonajan avulla.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k}$$

$$k = 4\pi^2 \frac{m}{T^2} = 4\pi^2 \cdot \frac{0,250 \text{ kg}}{(0,8512 \text{ s})^2} = 13,621 86 \text{ N/m} \approx 14 \text{ N/m}.$$

## Tehtävä 7.10.

Tasapainoasemastaan poikkeutettu kappale päätyy harmoniseen värähdysliikkeeseen, jos kappaleeseen vaikuttava kokonaisvoima on harmoninen. Kokonaisvoima on harmoninen, jos voiman suunta on aina kohti tasapainoasemaa ja voiman suuruus on suoraan verrannollinen etäisyyteen tasapainoasemasta.

Esimerkiksi trampoliinin päällä seisovaan lapseen kohdistuu harmoninen voima, joten trampoliinin ja lapsen muodostamaa systeemiä voidaan pitää harmonisena värähtelijänä. Myös esimerkiksi kitaran värähtelevä kieli on harmoninen värähtelijä.

## Tehtävä 7.11.

kuminauhan pituus alussa  $l_1 = 17,0 \text{ cm}$

kuminauhan pituus taskulampun kanssa  $l_2 = 31,4 \text{ cm}$

kuminauhan venymä

$$x = l_2 - l_1 = 31,4 \text{ cm} - 17,0 \text{ cm} = 14,4 \text{ cm}$$

taskulampun massa  $m = 0,202 \text{ kg}$

a) Tasapainoasemassa taskulamppuun vaikuttavien voimien summa on nolla eli  $\sum \vec{F} = 0$ .

Valitaan jousivoiman suunta positiiviseksi suunnaksi ja lasketaan kuminauhan jousivakio.

$$F - G = 0$$

$$kx = mg$$

$$k = \frac{mg}{x} = \frac{0,202 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{0,144 \text{ m}} = 13,76125 \text{ N/m}$$

Taskulampun ja kuminauhan systeemiä voidaan pitää harmonisena värähtelijänä. Lasketaan harmonisen värähtelyn taajuus.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mg}{xm}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{x}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{9,81 \text{ m/s}^2}{0,144 \text{ m}}} = 1,3136 \text{ Hz} \approx 1,31 \text{ Hz}.$$

b) Harmonisen värähtelyn taajuus ja jaksonaika ei riipu amplitudista. Taajuuden yhtälön mukaan taajuuteen vaikuttavia suureita ovat jousen jousivakio ja punnuksen massa.

## Tehtävä 7.12.

punnuksen massa  $m = 0,560 \text{ kg}$

kahdeksaan värähdykseen kuluva aika  $t = 11,2 \text{ s}$

a) Värähtelyn jaksonaika  $T = \frac{11,2 \text{ s}}{8} = 1,4 \text{ s}.$

b) Jousen jousivakio voidaan määrittää harmonisen värähtelijän jaksonajan yhtälöstä.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k}$$

$$k = 4\pi^2 \frac{m}{T^2} = 4\pi^2 \frac{0,560 \text{ kg}}{(1,4 \text{ s})^2} = 11,27954 \text{ N/m} \approx 11 \text{ N/m}.$$

c) Jousivoiman suuruus on  $F_j = kx$ . Newtonin II lain mukaisesti  $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ . Punnus on paikallaan, joten siihen vaikuttavien voimien summa on nolla ja kiihtyvyys on nolla. Valitaan jousivoiman suunta positiiviseksi suunnaksi. Kirjoitetaan liikeyhtälö ja ratkaistaan venymä.

$$F_j - G = 0$$

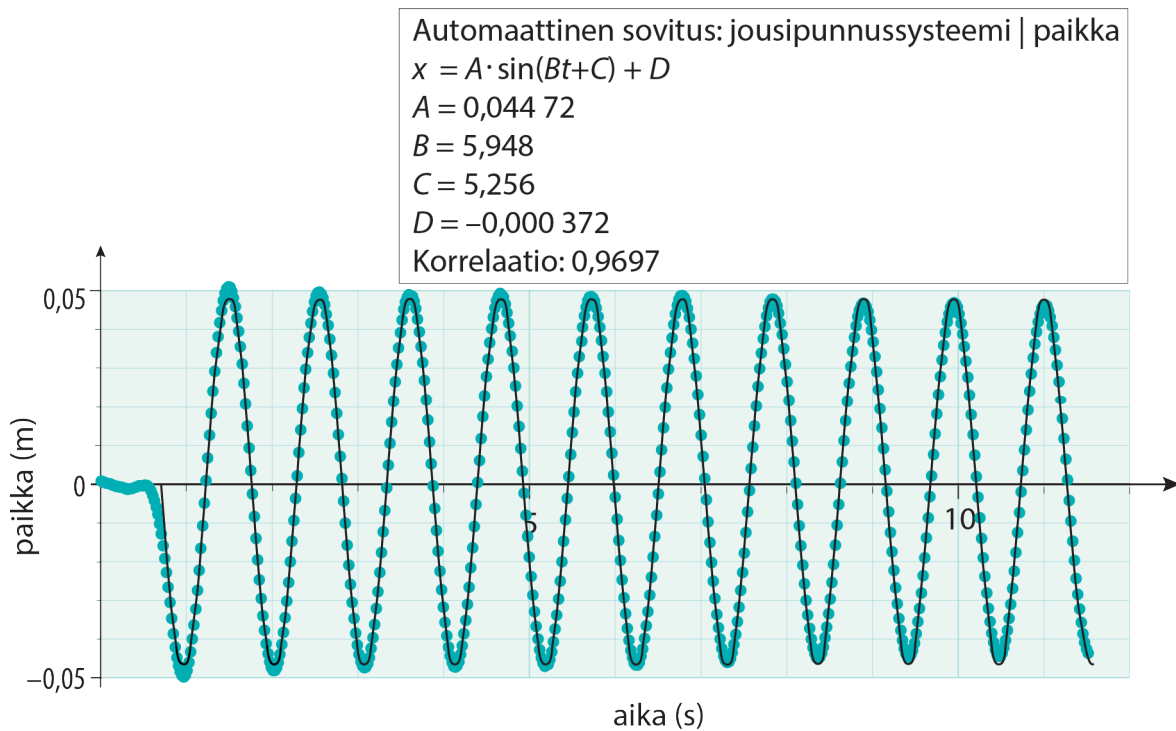
$$kx = mg$$

$$x = \frac{mg}{k} = \frac{0,560 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{11,27954 \frac{\text{N}}{\text{m}}} = 0,48704114 \text{ m} \approx 49 \text{ cm}$$

Jousi lyhenee 49 cm.

## Tehtävä 7.13.

a)



b) sovitefunktio  $x(t) = A \sin(Bt + C) + D$ .

Vakioiden arvot sovitekuvaajan tiedoista

$$A = 0,04472$$

$$B = 5,948$$

$$C = 5,256$$

$$D = -0,0003722$$

c) Sovitefunktion parametreista  $A$  kuvaa amplitudia, joten amplitudin suuruus on  $4,472 \text{ cm} \approx 4,5 \text{ cm}$ .

Taajuutta kuvaa parametri  $B$ . Sinifunktion riippuvuus ajasta on ilmoitettu muodossa  $x(t) = A \sin(2\pi ft)$ .

$$B = 2\pi f$$

$$f = \frac{B}{2\pi} = \frac{5,9481 \text{ s}^{-1}}{2\pi} = 0,94665 \text{ Hz} \approx 0,95 \text{ Hz}.$$

## Tehtävä 7.14.

- a) Punnuksen massa vaikuttaa värähdysaikaan. Mitä suurempi punnuksen massa on, sitä pidempi on jaksonaika. Jaksonaika noudattaa yhtälöä  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ . Mitä suurempi punnuksen massa on, sitä pidempi on jaksonaika.
- b) Värähtelyn amplitudi ei vaikuta taajuuteen, sillä värähtelijän jaksonaikaan vaikuttaa a-kohdan yhtälön mukaan vain punnuksen massa ja jousivakio.

## Tehtävä 7.15.

- a) Kuminauhan varassa värähtelevän punnuksen jaksonaika noudattaa harmonisen värähtelijän yhtälöä.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k}$$

$$k = 4\pi^2 \frac{m}{T^2}.$$

Kun yhtälöön sijoitetaan mittauksissa saadut arvot  $m$  ja  $T$ , jousivakiolle saadaan arvo.

- b) Punnuksen massa ei vaikuta jousivakion arvoon. Tuloksista pitäisi tulla mittaustarkkuuden rajoissa samat.
- c) Jousivakion suuruus riippuu punnuksen massasta sekä värähtelijän jaksonajasta. Punnitus on helppo suorittaa. Tarkkuus on käytännössä vaa'an tarkkuus. Jaksonajan mittaamisessa tulee helposti virhettä. Esimerkiksi mittaajan reaktioaika sekä tulkinta ääriaseman kohdasta vaikuttavat tulokseen. Virhettä voi pienentää mittaamalla esimerkiksi kymmeneen värähdykseen kulunut aika ja jakamalla saatu tulos kymmenellä. Tällä keinolla jaksonajan virhe pienenee kymmenesosaan. Virhettä aiheuttaa myös kuminauhan oma massa sekä se, että kuminauhaa voi mallintaa jousena vain pienillä venymillä.

## Tehtävä 7.17.

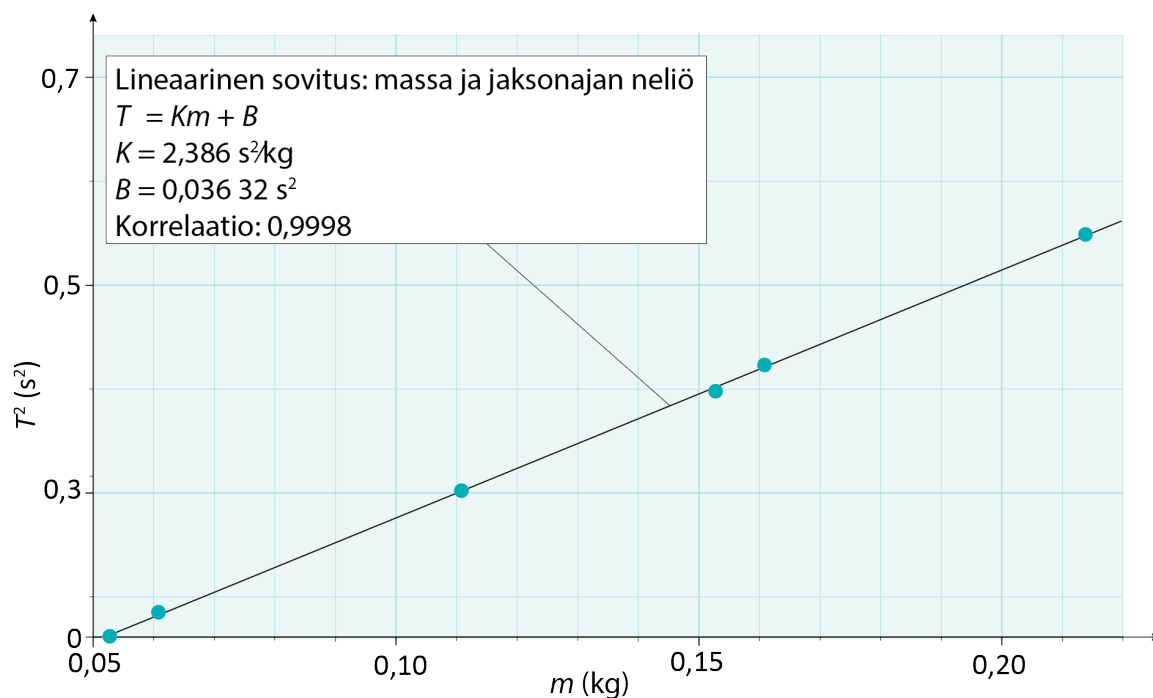
a) Jousen värähtely noudattaa harmonisen värähtelyn yhtälöä.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k} m.$$

Esitetään värähdysajan neliö massan funktiona.



Kuvaajasta nähdään, että jaksonajan neliö ja punnuksien massa ovat suoraan verrannollisia. Suoran fysikaalinen kulmakerroin on  $\frac{4\pi^2}{k} = 2,386 \frac{\text{s}^2}{\text{kg}}$ .

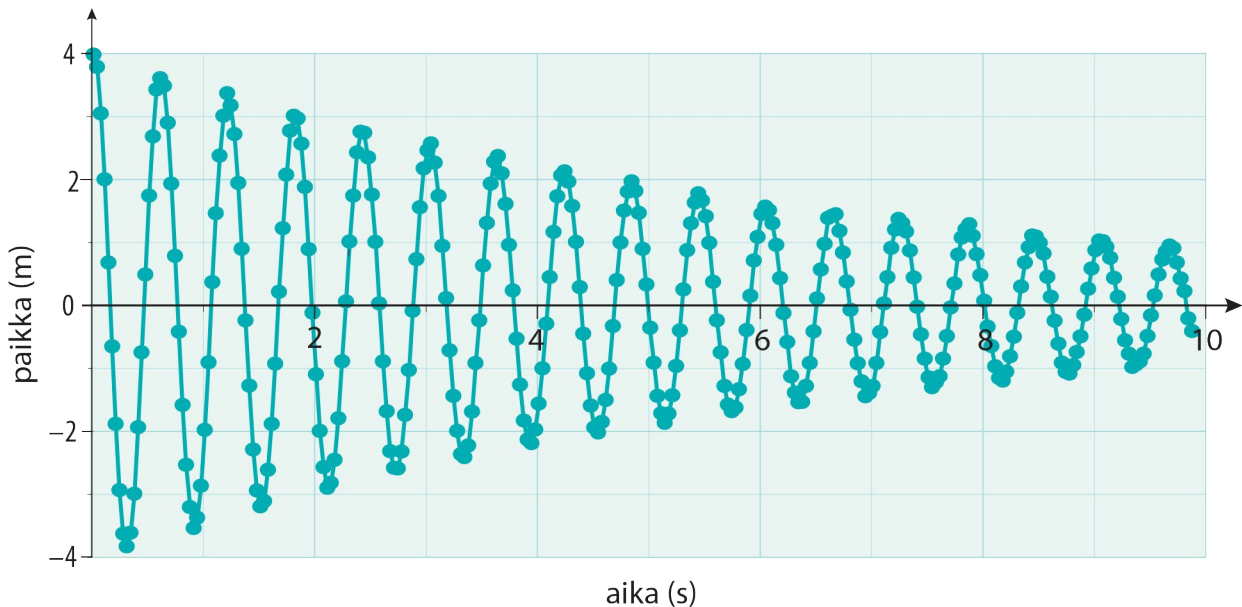
- b) Värähdysajan neliö on suoraan verrannollinen punnuksen massa. Lasketaan suoran fysikaalisen kulmakertoimen avulla jousivakion arvo. a-kohdassa määritetyn tuloksen mukaan jousivakioksi saadaan

$$k = \frac{4\pi^2}{2,386 \frac{\text{s}^2}{\text{kg}}} = 16,5458 \text{ /m} \approx 17 \text{ N/m}.$$

- c) Mittaustarkkuuteen vaikuttaa jousen oma massa sekä värähdysaika. Mittaustarkkuutta parantaa useampi mittaus usealla eri punnuksen massan arvolla. Värähdyksen jaksonaika saadaan tarkemmaksi, kun mitataan esimerkiksi kymmeneen värähdykseen kulunut aika ja jaetaan tulos kymmenellä. Mitä suuremmilla massoilla mitataan, sitä pidempi on jaksonaika ja sitä pienempi virhe tulee ajan mittaukseen. Myös isompien massojen käyttö pienentää massan mittauksen virhettä.

## Tehtävä 7.18.

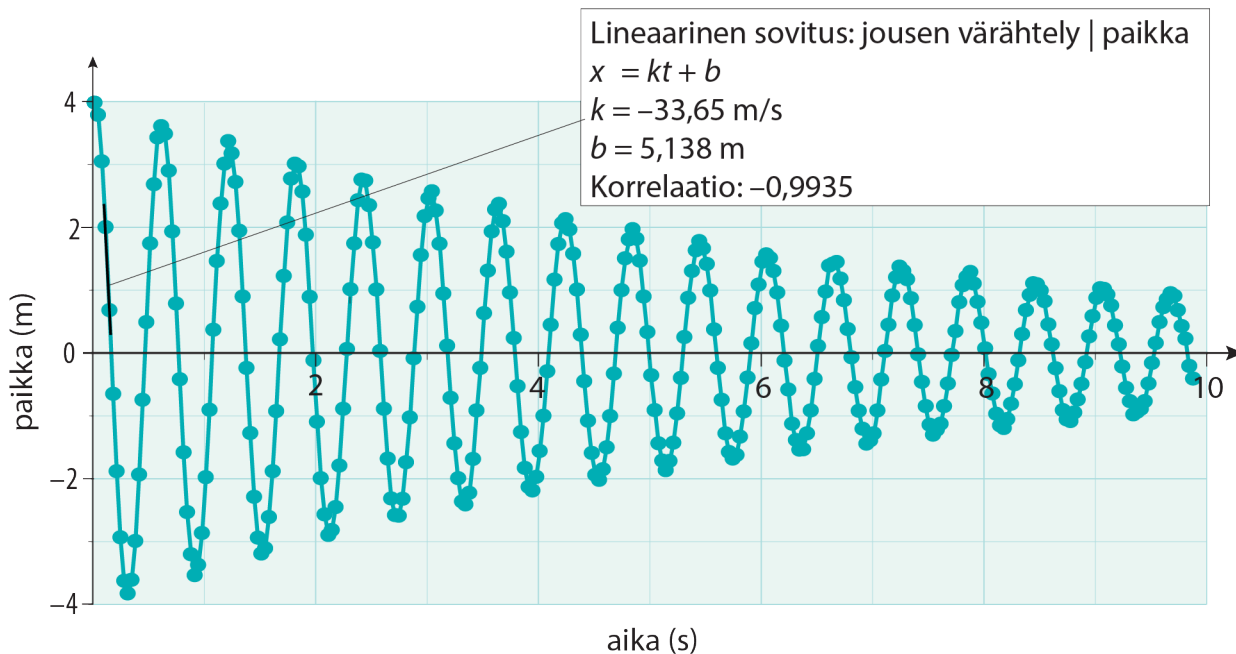
a)



b) Värähtelyyn liittyvistä suureista muuttuu vain amplitudi. Taajuus ja jaksonaika eivät muutu.

c) Pahvinpalalla on suurin kiihtyvyys ääriasemissa, koska jousen jousivoima on silloin suurin. Pahvinpalan kiihtyvyys on suurin heti värähtelyn alussa, koska värähtelyn amplitudi on silloin suurin. Värähtelyn jaksonaika ei muutu värähtelyn aikana. Koska pahvinpalan nopeus värähtelyn alussa on suurempi kuin värähtelyn lopussa, on kiihtyvyys suurin heti värähtelyn alussa.

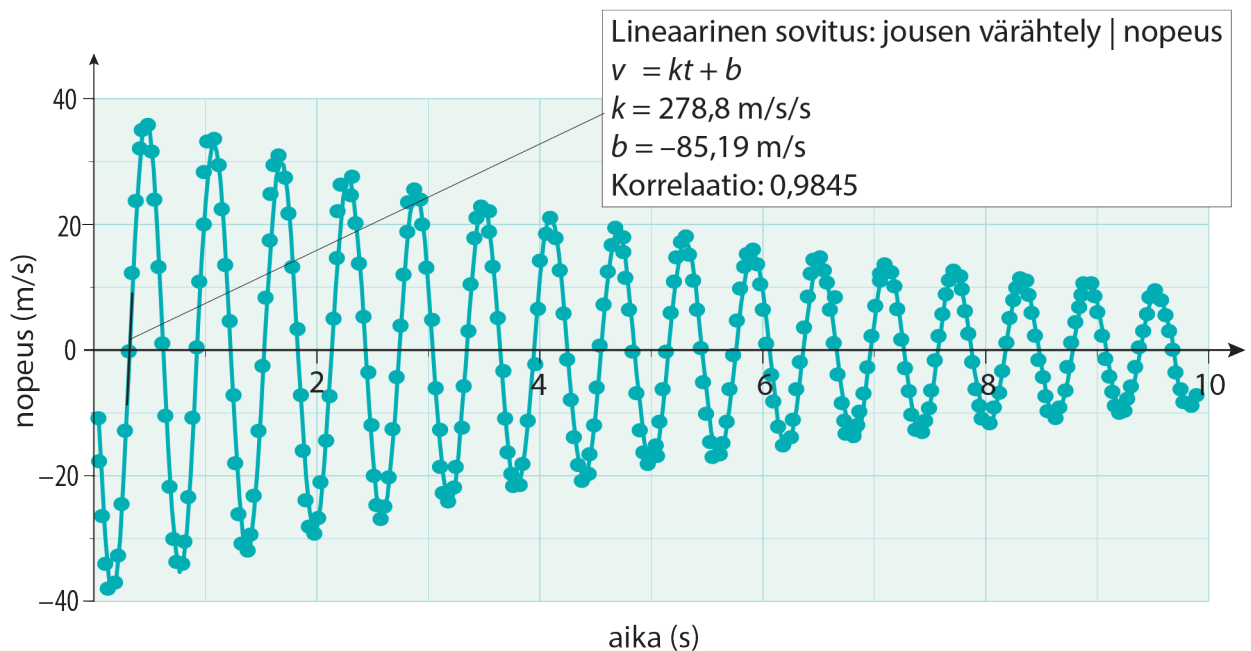
d) Punnuksen suurin nopeus saadaan kuvaajan tangentin kulmakertoimesta. Punnuksen nopeus on suurin tasapainoaseman kohdalla.



Suurin nopeus kuvaajan mukaan on

$$v_{\max} = 33,65 \text{ m/s} \approx 33,7 \text{ m/s}$$

Kiihtyvyyden määrittämiseksi määritetään nopeuden kuvaaja derivoimalla paikan kuvaaja ajan suhteen.



Nopeuden kuvaajan tangentin kulmakerroin kertoo punnuksen kiihtyvyyden. Suurin kiihtyvyys punnuksella on heti värähtelyn alussa. Nopeuden kuvaajasta suurimmaksi kiihtyvyyden arvoksi saadaan  $a_{\max} = 278 \text{ m/s}^2$ .

## Tehtävä 7.19.

kappaleen massa  $m_A = 250 \text{ g} = 0,250 \text{ kg}$

vaunun massa  $m_{\text{vaunu}} = 250 \text{ g} = 0,250 \text{ kg}$

jousen jousivakio  $k = 25 \text{ N/m}$

värähtelyn amplitudi  $A = 2,2 \text{ cm} = 0,022 \text{ m}$ .

- a) Punnuksen, vaunun ja jousen muodostaman systeemin mekaaninen energia säilyy, kun systeemiin ei vaikuta ulkoisia voimia. Tämä edellyttää esimerkiksi sitä, että kitka ja ilmanvastus eivät vaikuta vaunun liikkeeseen ja sitä että jousen muoto palautuu värähdysliikkeessä ilman häviöitä.
- b) Jotta punnus ei liiku vaunun pinnalla, lepokitkan pitää olla riittävän suuri. Jousen kohdistama voima kappaleeseen on suurimmillaan ääriasennoissa eli kun amplitudi on  $2,2 \text{ cm}$ . Tällöin jousi kohdistaa punnukseen voiman, jonka suunta on kohti tasapainoasemaa ja suuruus on

$$F_j = kx = kA = 25 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0,022 \text{ m} = 0,55 \text{ N}.$$

Jotta punnus ei liiku vaunun päällä, lepokitkan olla vähintään jousen kohdistaman voiman suuruinen. Näin ollen lepokitka on  $F_{\mu 0} \geq 0,55 \text{ N}$ .

c) Värähtelevän systeemin mekaaninen kokonaisenergia saadaan alkutilanteessa jouseen varastoituneesta potentiaalienergiasta.

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2} \cdot 25 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0,022 \text{ m})^2 = 6,05 \cdot 10^{-3} \text{ J} \approx 6,1 \text{ mJ}.$$

Oletuksen mukaan mekaaninen energia säilyy. Kun punnus ja vaunu liikkuvat kohti tasapainoasemaa, osa jouseen sitoutuneesta potentiaalienergiasta muuntuu punnuksen ja vaunun yhteiseksi liike-energiaksi.

Tasapainoaseman kohdalla mekaaninen energia on kokonaan liike-energiaa, jolloin liike-energian suuruus on sama kuin alkutilaan potentiaalienergia 6,1 mJ.

## Tehtävä 7.20.

a) Hooken lain mukaan venymä on  $\varepsilon = \sigma/E$ , jossa  $\sigma$  on jännitys ja  $E$  on kimmokerroin. Timanttikiteen kimmokerroin on teräskiteen kimmokerrointa suurempi, joten jos timanttikiteeseen ja teräskiteeseen kohdistetaan yhtä suuri jännitys, teräksen venymä on suurempi kuin timantin venymä.

b) Kun jännitys on pieni, venymä voidaan määrittää Hooken lailla  $\sigma = E\varepsilon$ . Kun jännitys poistetaan,  $\sigma = 0$ , jolloin myös venymä  $\varepsilon = 0$ . Toisin sanoen kiteet palautuvat alkuperäiseen muotoonsa.

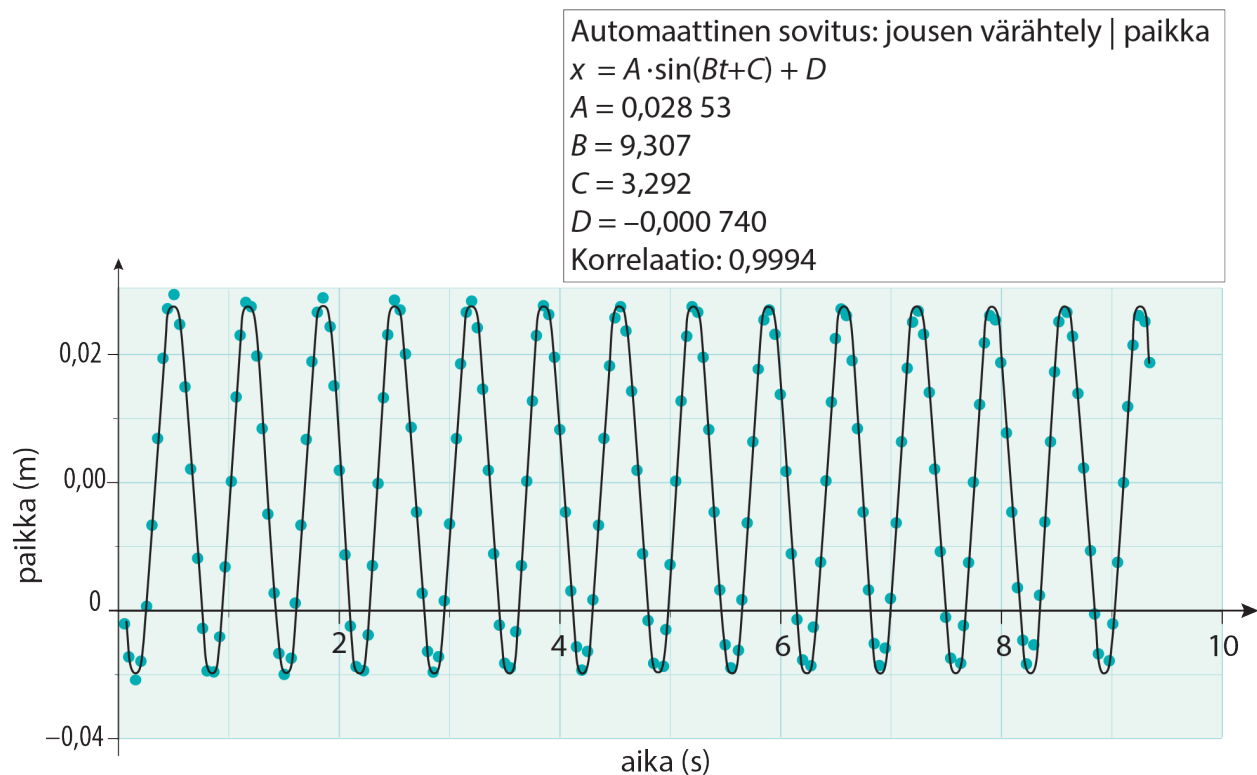
c) Käytetään aineistossa annettua yhtälöä ja määritetään timantin ominaistaajuus.

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Ea}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{950 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 0,3567 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{12 \cdot 1,660\,539\,040 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}} = 20,755 \cdot 10^{12} \text{ Hz} \approx 21 \text{ THz}.$$

d) Edellisen kohdan ratkaisussa käytetään itsenäisen harmonisen värähtelijän mallia, joka ei huomioi atomien välisiä kytkentöjä. Timanttikiteen hiiliatomien välillä on kovalenttiset sidokset, joten mallin antama tulos voi olla erilainen kuin mitattu arvo. Fysikaalista mallia voidaan tarkentaa esimerkiksi tarkastelemalla hiiliatomien jonoa.

## Tehtävä 7.21.

punnuksen massa  $m = 0,312 \text{ kg}$



(akselit oikein päin 1 p, mittauspisteet näkyvät 1 p, sovitekuvaaja 1 p) (3 p)

b) Amplitudi on punnuksen suurin poikkeama tasapainoasemasta. (1 p) Kuvaajan perusteella suurin poikkeama on heti värähtelyn alussa ja se on  $A = 2,9 \text{ cm}$ . (1 p, Huom! Jos amplitudin termiä ei ole selitetty, ei pistettä)

Värähtelyn jaksonaika  $T = \frac{8,79\text{s}}{13} = 0,6762\text{s} \approx 0,68\text{s}$ . (2 p)

- c) Jousen jousivakio voidaan laskea harmonisen värähtelijän jaksonajan yhtälöstä. Määritetään ensin värähdysaika kuvaajasta. Kuvaajasta katsottuna kolmentoista värähdyksen aika  $t = 8,79$  s.

Jousivakion arvo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k} \quad (2 \text{ p})$$

$$k = 4\pi^2 \frac{m}{T^2} = 4\pi^2 \frac{0,312 \text{ kg}}{\left(\frac{8,79 \text{ s}}{13}\right)^2} = 26,9416 \text{ N/m} \approx 26,9 \text{ N/m}.$$

- d) Jousen potentiaalienergia on suurimmillaan värähtelyn ääriasemissa. Lasketaan potentiaalienergian määrä heti värähtelyn alussa.

Kuvaajasta mitattuna amplitudin suuruus on 0,029 m.

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2} \cdot 26,941\,593\,88 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0,029 \text{ m})^2 = 11,3289 \cdot 10^{-3} \text{ J} \approx 11 \text{ mJ}.$$

(2 p)

- e) Jos punnusta vedettäisiin ensin suuremmalla voimalla, olisi jousen venymä suurempi. (1 p) Kun jousi päästettäisiin värähtelemään, olisi värähtelyn amplitudi suurempi. (1 p) Samalla myös punnuksen suurin nopeus, energia ja suurin kiihtyvyys olisivat suurempia.

Värähtelyn taajuuteen voima ei vaikuta. (1 p)

# 8. Mekaaninen aaltoliike

## Tehtävä 8.1.

Oikeat vastaukset:

- a) B
- b) C
- c) A
- d) A
- e) B
- f) B

## Tehtävä 8.2

- a) Aalto etenee häiriönä väliaineessa. Mekaaninen energia siirtyy värähtelijältä toiselle rakenneosasten vuorovaikutuksen ansiosta.
- b) Pitkittäisessä aaltoliikkeessä rakenneosaset värähtelevät aallon kulkusuunnassa. Poikittaisessa aaltoliikkeessä värähdysliike on aallon kulkusuuntaan nähden poikittaista liikettä.

## Tehtävä 8.3.

- a) Poikittainen mekaaninen aaltoliike ei voi edetä nesteeseen tai kaasun sisässä. Rakenneosasten vuorovaikutus ei ole riittävän voimakas palauttamaan esimerkiksi liikkeelle lähtenytä vesimolekyyliä takaisin lähtöpaikalleen. Kiinteissä aineissa rakenneosasten vuorovaikutus on voimakkaampi ja aalto voi edetä poikittaisena aaltoliikkeenä.
- b) Rakenneosasten väliset vuorovaikutukset vaikuttavat aallon etenemisnopeuteen. Mitä nopeammin värähtelyn energia siirtyy rakenneosaselta toiselle, sitä nopeammin mekaaninen aalto kulkee väliaineessa.

## Tehtävä 8.4.

a) Aallonpituuden eli kahden aallonharjan välinen etäisyys on  $\lambda = 3,0 \text{ m}$

b) Amplitudi on värähtelijän suurin poikkeama tasapainoasemasta. Amplitudi eli värähtelyn laajuus  $A = 0,14 \text{ m}$

c) Aallon nopeus eli sen siirtymä yhden sekunnin aikana  $v = 6,0 \text{ m/s}$

d) Aallon taajuus voidaan laskea aaltoliikkeen perusyhtälöstä

$$v = f\lambda$$

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{6,0 \text{ m/s}}{3,0 \text{ m}} = 2,0 \text{ Hz.}$$

## Tehtävä 8.5

- a) aallon taajuus  $f = 34 \text{ Hz}$   
aallonpituus  $\lambda = 1,2 \text{ m}$

Aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan aallon nopeus on  
 $v = f\lambda = 34\text{Hz} \cdot 1,2\text{m} = 40,8\text{m/s} \approx 41\text{m/s}.$

- b) aallon nopeus  $v = 5\,100 \text{ m/s}$   
aallonpituus  $\lambda = 116 \text{ m}$

Ratkaistaan aaltoliikkeen perusyhtälöstä taajuus

$$v = f\lambda$$

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{5\,100 \text{ m/s}}{116 \text{ m}} = 43,9655 \text{ Hz} \approx 44,0 \text{ Hz}.$$

## Tehtävä 8.6.

aallon taajuus  $f = 440 \text{ Hz}$

aallon nopeus ilmassa  $v = 343 \text{ m/s}$

aallon nopeus vedessä  $v = 1\,484 \text{ m/s}$

a) Aallon taajuus riippuu vain värähtelijästä. Aallon taajuus ei muutu rajapinnan ylityksessä, joten taajuus  $f = 440 \text{ Hz}$

b) Ratkaistaan aaltoliikkeen perusyhtälöstä aallonpituus

$$v = f\lambda$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{343 \text{ m/s}}{440 \text{ Hz}} = 0,779\,54 \text{ m} \approx 0,78 \text{ m}.$$

c) Ratkaistaan aaltoliikkeen perusyhtälöstä aallonpituus

$$v = f\lambda$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1\,484 \text{ m/s}}{440 \text{ Hz}} = 3,3727 \text{ m} \approx 3,4 \text{ m}.$$

## Tehtävä 8.7.

- a) Kuvien A ja D interferenssiaalto esittää kuvan C aalto.
- b) Kahden kuvan A aallon interferenssiaalto esittää kuvan B aalto.
- c) Kuvien B ja D interferenssiaalto esittää kuvan A aalto.

## Tehtävä 8.8.

- a) Destruktiivinen interferenssi tarkoittaa vaimentavaa interferenssiä. Jos aallot ovat samanlaiset ja vastakkaisissa vaiheissa, niiden muodostaman summa-aallon amplitudi on nolla.
  
- b) Konstruktiivinen interferenssi tarkoittaa vahvistavaa interferenssiä. Jos kohtaavat aallot ovat samanlaiset ja samassa vaiheessa, on summa-aallon amplitudi kaksikertainen yhden aallon amplitudiin verrattuna.

## Tehtävä 8.9.

- a) Kun aalto etenee vedessä, yksittäiset värähtelijät liikkuvat ympyrän tai ellipsin muotoista rataa. Yksittäinen vesimolekyyli liikkuu siis lähinnä oman paikkansa ympärillä. Vesimolekyylit eivät siirry aallon mukana.
- b) Hyökyaalto on epätavallisen korkea aalto, joka syntyy yllättäen ja ennustamatta. Hyökyaalto voi olla jopa 50 m korkea.

## Tehtävä 8.10.

- a) Jousessa kaksi pulssia kohtaa, jolloin havaitaan aalto, joka on superpositioperiaatteen mukaisesti pulssien summa. Kyseessä on interferenssi.
- b) Aallot jatkavat kohtaamisen jälkeen kulkuaan kuten ennen kohtaamista.
- c) Molemmat aallot kulkevat yhtä suurella nopeudella, sillä samassa jousessa aina tietyllä, samalla nopeudella.

## Tehtävä 8.11.

10 värähdyksen aika  $t = 18 \text{ s}$

laiturin leveys  $l = 2,2 \text{ m}$

Värähtelyn jaksonaika  $T = \frac{18 \text{ s}}{10} = 1,8 \text{ s}$

Ratkaistaan aaltoliikkeen perusyhtälöstä aallon nopeus

$$v = f\lambda = \frac{\lambda}{T} = \frac{2,2 \text{ m}}{1,8 \text{ s}} = 1,2222 \text{ m/s} \approx 1,2 \text{ m/s}.$$

## Tehtävä 8.12.

äänen nopeus  $v = 340 \text{ m/s}$

äänen taajuus  $f = 20 \text{ Hz}$

a) Ratkaistaan aaltoliikkeen perusyhtälöstä aallonpituus

$$v = f\lambda$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340 \text{ m/s}}{20 \text{ Hz}} = 17 \text{ m.}$$

b) Aaltoliikkeen perusyhtälön mukaisesti  $v = f\lambda$ . Koska aallon nopeus riippuu väliaineen ominaisuuksista, aallon nopeus ei muutu, vaikka taajuus muuttuisi. Aallon nopeus pysyy samana eli aallon taajuuden ja aallonpituuden tulo pysyy samana. Jos taajuus kasvaa, aallonpituus pienenee.

### Tehtävä 8.13.

äänen nopeus vedessä  $v_{\text{vesi}} = 1\,480\text{ m/s}$

äänen nopeus jäässä  $v_{\text{jää}} = 3\,280\text{ m/s}$

a) Aaltoliikkeen perusyhtälön  $v = f\lambda$ , jossa  $f$  on äänen taajuus ja  $\lambda$  on aallonpituus, perusteella aallonpituus on  $\lambda = \frac{v}{f}$ . Aallonpituus vedessä ja jäässä on

$$\lambda_{\text{vesi}} = \frac{v_{\text{vesi}}}{f} = \frac{1\,480\frac{\text{m}}{\text{s}}}{4\,000\text{ Hz}} = 0,37\text{ m ja } \lambda_{\text{jää}} = \frac{v_{\text{jää}}}{f} = \frac{3\,280\frac{\text{m}}{\text{s}}}{4\,000\text{ Hz}} = 0,82\text{ m.}$$

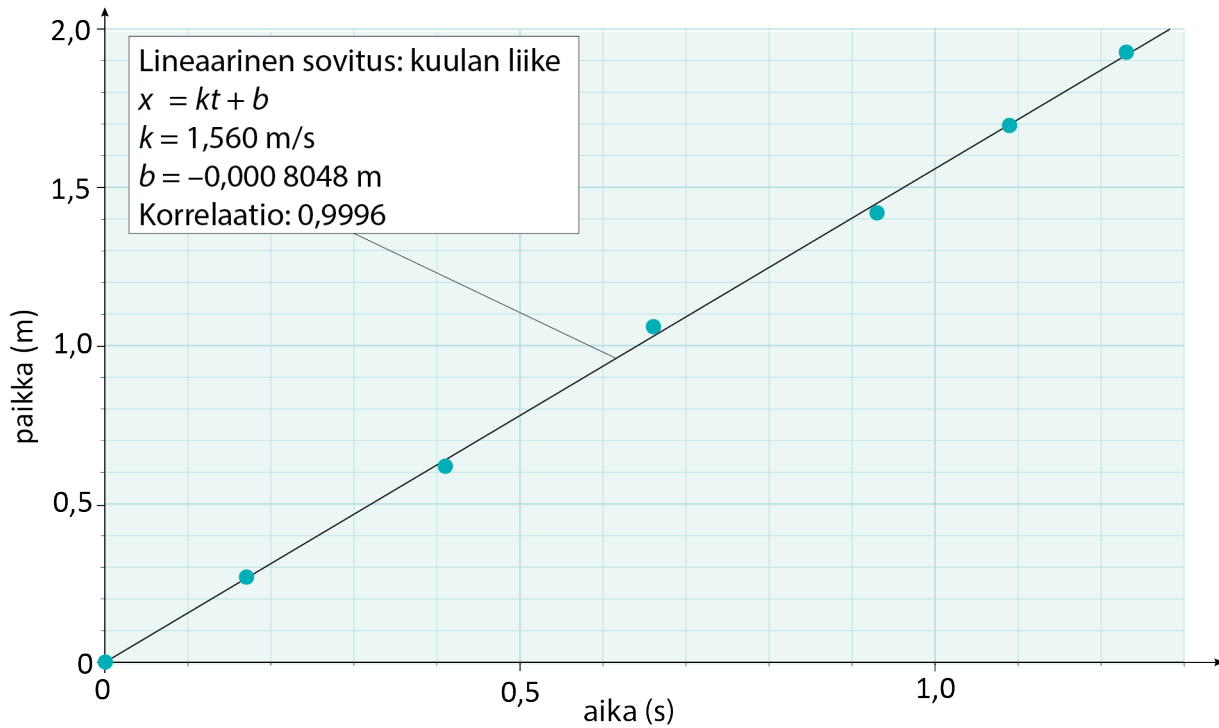
Verrataan aallonpituuksia toisiinsa.  $\frac{\lambda_{\text{jää}}}{\lambda_{\text{vesi}}} = \frac{0,82\text{ m}}{0,37\text{ m}} \approx 2,2$

Äänen aallonpituus on jäässä 2,2-kertainen verrattuna äänen aallonpituuteen vedessä.

b) Ääni on mekaaninen aalto, jonka eteneminen perustuu siihen, että värähtelevä rakenneosanen siirtää energiaa rakenneosaselta toiselle niiden välisen kytkennän ansiosta. Mitä nopeammin energiaa siirtyy rakenneosaselta toiselle, sitä suurempi on aallon nopeus. Kiinteissä aineissa atomien väliset sidokset ovat pysyvämpiä ja siksi atomien väliset kytkennät ovat voimakkaammat kuin nesteissä. Kiinteässä jäässä rakenneosaset värähtelevät paikoillaan ja siten mahdollistavat energian nopean siirtymisen rakenneosaselta toiselle. Saman aineen kiinteässä olomuodossa ääni siis kulkee nopeammin kuin nesteessä.

## Tehtävä 8.14.

a)



b) Nopeus saadaan  $(t, x)$ -koordinaatiston mittauspisteisiin sovitetun suoran fysikaalisesta kulmakertoimesta.  
Aallon nopeus on  $v = 1,56 \text{ m/s}$

c) mitattu matka  $l = 1,86 \text{ m}$

Matkalla on kolme aaltoa. Aallonpituudeksi saadaan  $\lambda = \frac{l}{3}$ . Aallon taajuus saadaan aaltoliikkeen perusyhtälön avulla.

$$v = f\lambda$$

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{\frac{l}{3}} = \frac{3v}{l} = \frac{3 \cdot 1,560 \text{ m/s}}{1,86 \text{ m}} = 2,516 \frac{1}{\text{s}} \approx 2,52 \text{ Hz}$$

## Tehtävä 8.15.

Aaltoliikkeen perusyhtälön mukaisesti  $v = f\lambda$ . Koska aallon nopeus riippuu väliaineen ominaisuuksista, aallon nopeus ei muutu, vaikka taajuus muuttuisi. Aallon nopeus pysyy samana eli aallon taajuuden ja aallonpituuden tulo pysyy samana.

## Tehtävä 8.16.

- a) Kun naapuriatomien siirtymät tasapainoasemasta ovat vastakkaissuuntaiset, aallonpituus on lyhimmillään. Tällöin aallonpituus on kaksi kertaa atomien etäisyys  $a$ ; toisin sanoen  $\lambda_{\min} = 2a$ .
- b) Koska mekaaninen aalto määritellään väliaineen rakenneosien siirtymien avulla, rakenneosien välinen etäisyys määrittelee lyhyimmän mekaanisen aallon pituuden.

## Tehtävä 8.17.

aallon taajuus  $f = 520 \text{ Hz}$

aallon nopeus  $v = 310 \text{ m/s}$ .

amplitudi  $A = 2,0 \text{ mm}$ ?

- a) Aaltoliikkeen perusyhtälön mukaisesti  $v = f\lambda$ .  
Ratkaistaan aallonpituus.

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{310 \text{ m/s}}{520 \text{ Hz}} = 0,596154 \text{ m} \approx 0,60 \text{ m}$$

- b) Värähtelijä liikkuu puolen jaksonajan  $t = \frac{1}{2}T$  aikana  
kahden amplitudin matkan  $s = 2A$ . Ratkaistaan tasaisen  
liikkeen yhtälöstä  $s = vt$  nopeus.

$$s = vt$$

$$v = \frac{s}{t}$$

$$= \frac{2A}{\frac{1}{2}T}$$

$$= \frac{4A}{T} \quad \left\| \frac{1}{T} = f \right.$$

$$= 4Af$$

$$= 4 \cdot 2,0 \text{ mm} \cdot 520 \text{ Hz}$$

$$= 4,160 \text{ m/s} \approx 4,2 \text{ m/s}$$

- c) Jos värähtelijöiden vaihe-ero olisi  $2\pi$ , niin värähtelijät olisivat samassa vaiheessa. Niiden vaakasuuntainen etäisyys olisi tällöin  $\lambda$ .

Kun värähtelijöiden vaihe-ero on  $\frac{\pi}{2}$ , värähtelijöiden vaakasuuntainen välimatka on  $\frac{\lambda}{4}$ . Pystysuunnassa värähtelijöiden välimatka on tällöin  $A$ .

Värähtelijöiden välinen etäisyys saadaan Pythagoraan lauseella.

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{\left(\frac{1}{4}\lambda\right)^2 + A^2} = \sqrt{\left(\frac{v}{4f}\right)^2 + A^2} = \sqrt{\left(\frac{310\text{ m/s}}{4 \cdot 520\text{ Hz}}\right)^2 + (0,002\text{ m})^2} \\&= 14,905\,188\text{ cm} \\&\approx 14,9\text{ cm}\end{aligned}$$

## Tehtävä 8.18.

punnuksen massa  $m = 15 \text{ kg}$

narun pituus  $l = 100 \text{ m}$

punnuksen nopeus  $v = 1,2 \text{ m/s}$

narun massa  $m_n = 3,3 \text{ kg}$

reaktioaika  $t = 1,0 \text{ s}$

Pulssin nopeus narussa voidaan laskea yhtälöstä  $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ ,

jossa  $\mu = \frac{m_n}{l}$ . Punnus laskeutuu kaivoon tasaisella

nopeudella, joten narua jännittävä voima on yhtä suuri kuin punnuksen paino eli  $F = G = mg$ .

Nopeus on

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{G}{\frac{m_n}{l}}} = \sqrt{\frac{mgl}{m_n}} = \sqrt{\frac{15\text{kg} \cdot 9,81\text{m/s}^2 \cdot 100\text{m}}{3,3\text{kg}}} = 66,776\,43\text{m/s} \approx 67\text{m/s}.$$

## Tehtävä 8.19.

- a) Tsunami syntyy paikallisesta vesimassan liikkeestä, jonka voi aiheuttaa esimerkiksi vedenalainen maanjäristys.
- b) Tsunamia on vaikea havaita syvän meren kohdalla, koska tsunamin aallonkorkeus ei ole siellä huomiota herättävän korkea.
- c) Aallon nopeus riippuu meren syvyydestä  $h = 4\,000\text{ m}$  ja putoamiskiihtyvyydestä  $g = 9,81\text{ m/s}^2$  aineistossa olevan yhtälön mukaisesti. Aallon nopeus on

$$v = \sqrt{gh} = \sqrt{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 4\,000\text{ m}} = 198,091 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 710 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

- d) Vesi koostuu molekyyleistä ( $\text{H}_2\text{O}$ ), joiden välisten kytkentöjen vuoksi energia siirtyy molekyyliltä toiselle. Kun molekyyli liikkuu edestakaisin, se saa viereiset molekyylit liikkeelle.

e) Rannikolla meri ei ole niin syvä kuin ulkomerellä. Mallin  $v = \sqrt{gh}$  avulla voidaan ennustaa, että kun rannikon lähellä meren syvyys  $h$  pienenee, myös aallon nopeus  $v$  pienenee. Aaltolähde määrää aallon taajuuden, joten koska aallon taajuus  $f$  pysyy samana, niin aaltoliikkeen perusyhtälön  $v = f\lambda$  mukaisesti myös aallonpituus  $\lambda$  pienenee, kun aalto lähestyy rantaa. Lyhentynyt aallonpituus tarkoittaa, että aallon pitää puristua pienempään alueeseen, jolloin vesipatjan korkeus kasvaa.

## Tehtävä 8.20.

edestakaisten liikkeiden määrä  $n = 19$

edestakaisiin liikkeisiin kulunut aika  $t = 5,93 \text{ s}$

a) Koska jouta liikuteltiin jousen pituussuunnassa edestakaisin (1 p), syntyi jouseen pitkittäinen aaltoliike. (1 p)

b) Mekaanisen aallon taajuus riippuu aaltolähteen taajuudesta. (1 p) Aallon taajuus on

$$f = \frac{n}{t} = \frac{19}{5,93 \text{ s}} = 3,204 \text{ 05 Hz} \approx 3,20 \text{ Hz. (2 p)}$$

c) aallon matka  $s = 1,84 \text{ m}$

aallon etenemisaika  $t = 1,74 \text{ s}$

Aalto etenee väliaineessa tasaisessa liikkeessä. Aallon nopeus on

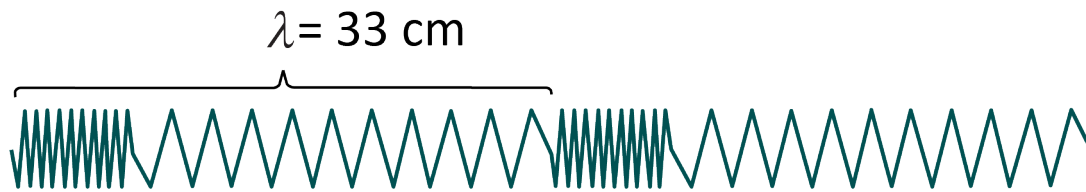
$$v = \frac{s}{t} = \frac{1,84 \text{ m}}{1,74 \text{ s}} = 1,057 \text{ 47 } \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 1,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}. (2 \text{ p})$$

Aallonpituus ratkaistaan aaltoliikkeen perusyhtälöstä.

$$v = f\lambda$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{\frac{s}{t}}{f} = \frac{s}{ft} = \frac{1,84 \text{ m}}{\frac{19}{5,93 \text{ s}} \cdot 1,74 \text{ s}} = 0,330 \text{ 042 m} \approx 33 \text{ cm} (2 \text{ p})$$

d)



(pitkittäinen aaltoliike 1 p, kahden samanvaiheisen värähtelijän välimatka piirretty kuvaan ja merkitty aallonpituus 1 p)

- e) Kun jousen kireys pysyy samana, mekaanisen aallon nopeus ei muutu. (2 p) Aaltoliikkeen perusyhtälön  $v = f\lambda$  mukaan aallon taajuus ja aallonpituus ovat kääntäen verrannollisia. Kun aallon taajuus suurenee, aallonpituus pienenee. (2 p)
- f) Kun jouta kiristetään, mekaanisen aallon etenemisnopeus jousessa kasvaa. (1 p) Kun taajuus ei muutu, aaltoliikkeen perusyhtälön  $v = f\lambda$  mukaan aallon nopeuden kasvaessa myös aallonpituus kasvaa. (2 p)

# 9. Ääni

## Tehtävä 9.1.

Oikeat vastaukset:

- a) B
- b) A
- c) A
- d) B
- e) C
- f) B

## Tehtävä 9.2.

- a) Ääni syntyy, kun värähtelijä aiheuttaa ympäröivään väliaineeseen mekaanisen aallon.
- b) Ääni etenee ilman jaksottaisina tihentyminä ja harventumina. Ilmassa ääni etenee pitkittäisinä aaltolina.

### Tehtävä 9.3.

- a) äänen nopeus ilmassa  $v_1 = 343 \text{ m/s}$   
äänen nopeus betonissa  $v_2 = 4\,300 \text{ m/s}$   
äänen aallonpituus  $\lambda_1 = 0,78 \text{ m}$

Ääni noudattaa aaltoliikkeen perusyhtälöä  $v = f\lambda$ . Äänen taajuus on

$$f = \frac{v_1}{\lambda_1} = \frac{343 \text{ m/s}}{0,78 \text{ m}} = 439,74 \text{ Hz} \approx 440 \text{ Hz}.$$

- b) Äänen taajuus ei muutu, kun ääni siirtyy aineesta

toiseen. a-kohdan mukaan äänen taajuus on  $f = \frac{v_1}{\lambda_1}$ .

Aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan äänen aallonpituus betonissa on

$$\lambda = \frac{v_2}{f} = \frac{v_2}{\frac{v_1}{\lambda_1}} = \frac{v_2 \lambda_1}{v_1} = \frac{4300 \text{ m/s} \cdot 0,78 \text{ m}}{343 \text{ Hz}} = 9,778 \text{ m} \approx 9,8 \text{ m}.$$

## Tehtävä 9.4.

äänen nopeus ilmassa  $v_i = 343 \text{ m/s}$

äänen nopeus alumiinissa  $v_a = 5\,080 \text{ m/s}$

äänen kulkuaika  $\Delta t = 0,13 \text{ s}$

Ääni kulkee väliaineessa vakio nopeudella.

Äänen kulkemalle matkalle on voimassa  $s = vt$

Ääni kulkee nopeammin alumiinissa Kirjoitetaan lauseke äänten aikaerolle.

$$\Delta t = t_i - t_a = \frac{s}{v_i} - \frac{s}{v_a} = s \left( \frac{1}{v_i} - \frac{1}{v_a} \right)$$

Alumiinikiskon pituus on

$$s = \frac{\Delta t}{\left( \frac{1}{v_i} - \frac{1}{v_a} \right)} = \frac{\Delta t}{\left( \frac{1}{v_i} - \frac{1}{v_a} \right)} = \frac{0,13\text{s}}{\left( \frac{1}{343\text{m/s}} - \frac{1}{5080\text{m/s}} \right)} = 47,819\text{m} \approx 48\text{m}.$$

## Tehtävä 9.5.

- a) Äänen spektri on äänen taajuusjakauma, joka kertoo eri äänekseen suhteelliset voimakkuudet.
  
- b) FFT-analyysin tuottamasta kuvaajasta saadaan selville esimerkiksi soittimen äänen muodostamien taajuuksien suhteellisia amplitudeja. Tällaisessa esityksessä vaakakselille merkitään äänessä esiintyvät taajuudet ja pystyakselille taajuuksien suhteelliset amplitudit. FFT-kuvaajassa piikin korkeus kertoo taajuuden suhteellisen amplitudin. Mitä korkeampi piikki on, sitä suurempi on kyseisen taajuuden amplitudi verrattuna muihin taajuuksiin.

## Tehtävä 9.6.

- a) Kun kieltä viritetään ja kahden eri kielen taajuudet lähenevät toisiaan, ilmiön voi havaita huojuntana. Huojunta on ilmiö, jossa kuultavan äänen voimakkuus voimistuu ja heikentyy jaksollisesti interferenssin vaikutuksesta.
- b) oikeassa vireessä soivan kielen taajuus  $f_1 = 110,0 \text{ Hz}$   
epävireisen kielen taajuus  $f_2 = 105,7 \text{ Hz}$

Huojunnan taajuus on

$$f_h = |f_1 - f_2| = |110,0 \text{ Hz} - 105,7 \text{ Hz}| = 4,3 \text{ Hz}.$$

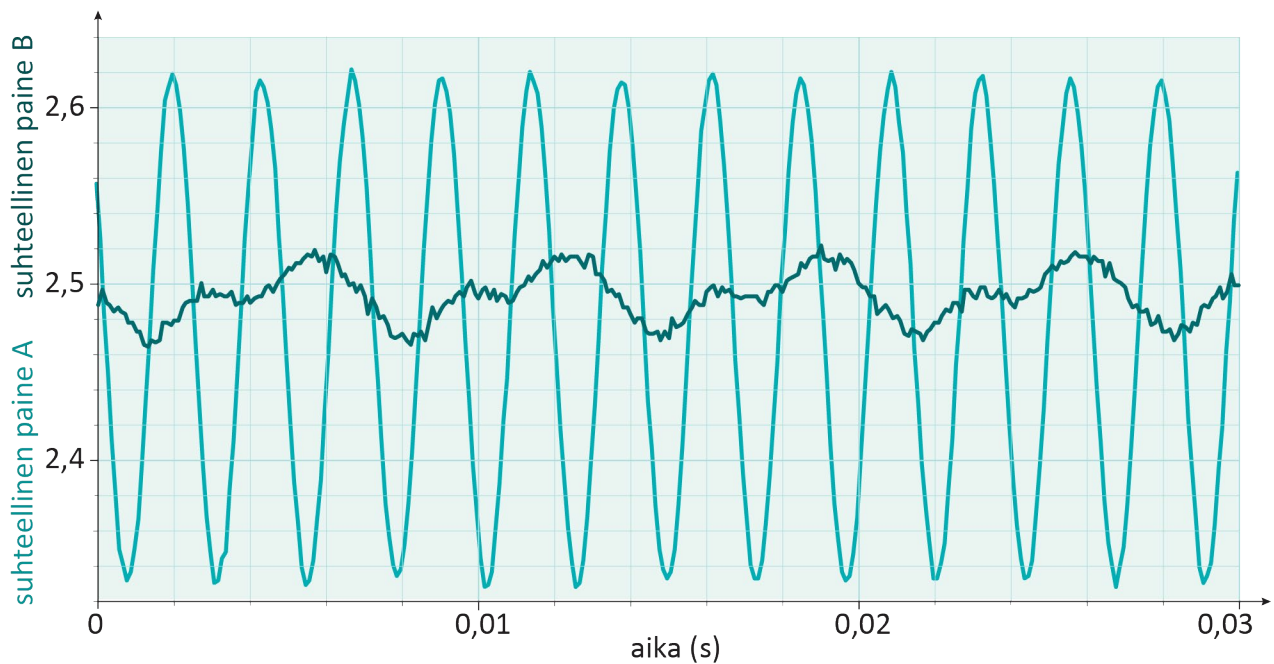
## Tehtävä 9.7.

- a) Kaukana olevan kimalaisen ääni kuuluu heikosti, mutta mitä lähemmäksi kimalainen lentää, sitä voimakkaampana ääni kuuluu. Äänen energia jakautuu pallopinnalle. Pallon säde kuvaa äänilähteen ja havaitsijan välistä etäisyyttä. Mitä suurempi etäisyys on, sitä pienempi on äänen amplitudi.

Kun kimalainen tulee havaitsijaa kohti, havaitsijan kuuleman äänen taajuus kasvaa. Tällöin havaitsija kuulee äänen korkeampana. Loittonevan kimalaisen äänen taajuus kuullaan hieman matalampana. Juuri kun kimalainen on ohittamassa havaitsijaa, kimalaisen ääni kuulostaa yhtä korkealta kuin jos kimalainen olisi ilmassa paikallaan. Äänen taajuuden muutos aiheutuu Dopplerin ilmiöstä.

- b) Mitä korkeampi ääni on, sitä suurempi on äänen taajuus. Hyttysen tai kärpäsen tuottaman äänen taajuus johtuu niiden siipien edestakaisen liikkeen nopeudesta. Siipien edestakainen liike aiheuttaa ilmaan jaksottaisesti muuttuvia paineaaltoja, joka kuullaan äänenä. Mitä nopeammin edestakainen liike tapahtuu, sitä suurempi on siipien tuottaman äänen taajuus. Koska hyttysen liikuttaa siipiään edestakaisin nopeammin, on hyttysen siipien värähtelytaajuus suurempi kuin kärpäsen siipien värähtelytaajuus ja siksi hyttysen tuottaman äänen korkeus on myös suurempi.

## Tehtävä 9.8.



Ääniraudalla tuotetun äänen spektrissä on vain yhtä värähtelytaajuutta. Syntyneen äänksen kuvaaja on puhdas sinikäyrä, joten suhteellisen paineen A kuvaaja on ääniraudan tuottama. Kitaralla soitetun sävelen kuvaajassa esiintyy useita värähtelytaajuuksia. Suhteellisen paineen kuvaaja B on tuotettu kitaralla.

## Tehtävä 9.9.

äänen nopeus ilmassa  $v = 343 \text{ m/s}$

Rummun taajuus on  $f = \frac{58}{60\text{s}} = \frac{58}{60} \text{ Hz}$ .

Ääni kulkee väliaineessa vakionopeudella, jolloin äänen kulkemalle matkalle on voimassa  $s = vt$ .

Rumpua soitetaan taajuudella  $f$ . Rummun iskusta seuraavaan rummun iskuun kuluu aikaa  $T = \frac{1}{f} = \frac{60}{58} \text{ s}$ .

Tässä ajassa otetaan kaksi askelta. Yhden askeleen aika on puolet jaksonajasta eli  $T/2$ . Tässä ajassa ääni kulkee matkan

$$s = vt = v \frac{T}{2} = \frac{v}{2f} = \frac{343 \text{ m/s}}{2 \cdot \frac{58}{60 \text{ s}}} = 177,41 \text{ m} \approx 180 \text{ m}.$$

Partiolaisparaatin pituus on 180 m.

## Tehtävä 9.10.

- a) Huojuntataajuus lasketaan yhtälöstä  $f_h = |f_2 - f_1|$ . Kun flyygelin kieltä kiristetään, taajuuksien ero pienenee. Kun kieltä edelleen kiristetään, flyygelin kielen taajuus on lopulta yhtä suuri kuin ääniraudan taajuus.
- b) Koska kielen kiristäminen nostaa kielen taajuutta, voidaan päätellä, että äänirauta soi aluksi suuremmalla taajuudella kuin flyygelin kieli.

- c) äänen taajuus  $f = 440 \text{ Hz}$

kieleen syntyneen mekaanisen aallon aallonpituus  
 $\lambda = 0,86 \text{ m}$

Aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan  $v = f\lambda$  saadaan äänen nopeus kielessä

$$v = f\lambda = 440\text{Hz} \cdot 0,86 \text{ m} = 378,4 \text{ m/s} \approx 380 \text{ m/s}.$$

## Tehtävä 9.11.

äänen nopeus ilmassa  $v = 340 \text{ m/s}$

havaitseen nopeus  $v_h = 25 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{25 \text{ m}}{3,6 \text{ s}}$

soitettu taajuus  $f_0$

Ennen ohitusta pyöräilijä kuulee taajuuden

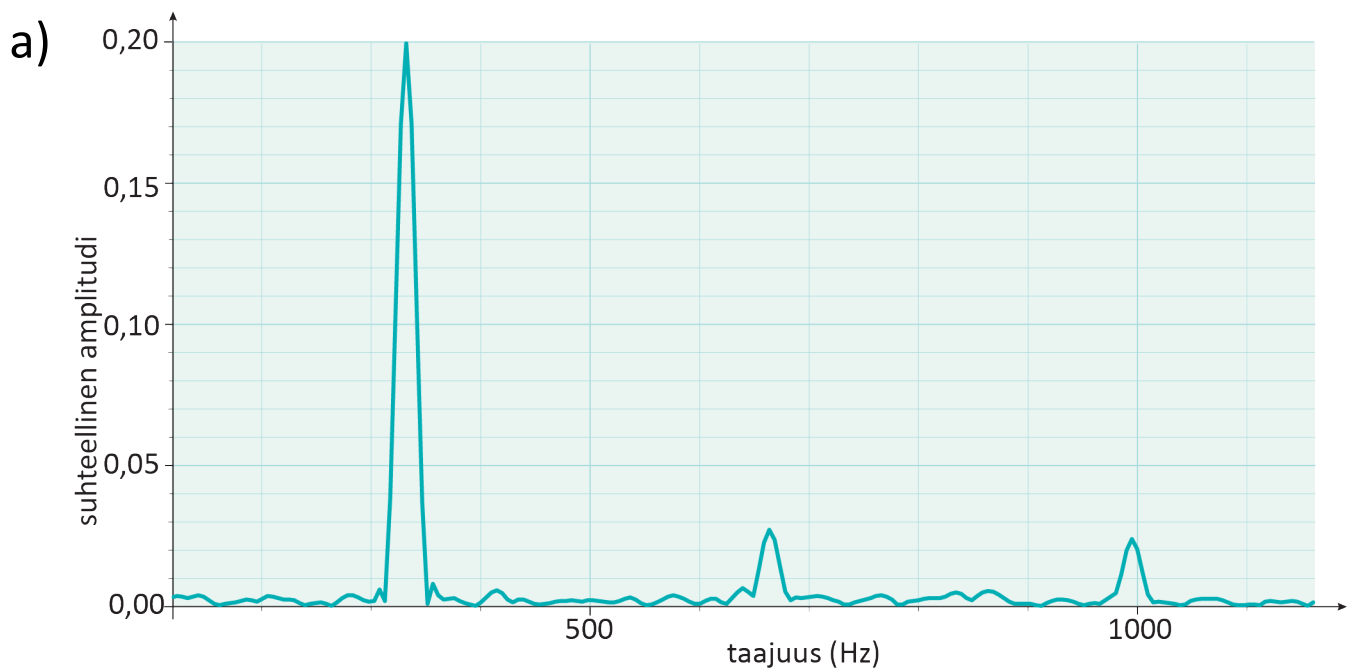
$$f = f_0 \frac{v + v_h}{v} = f_0 \frac{340 \frac{\text{m}}{\text{s}} + \frac{25 \text{ m}}{3,6 \text{ s}}}{340 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 1,020\,424\,84 f_0 \approx 1,020 f_0$$

Ohituksen jälkeen pyöräilijä kuulee taajuuden

$$f = f_0 \frac{v - v_h}{v} = f_0 \frac{340 \frac{\text{m}}{\text{s}} - \frac{25 \text{ m}}{3,6 \text{ s}}}{340 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 0,979\,575\,16 f_0 \approx 0,980 f_0$$

Ennen ohitusta pyöräilijä kuulee 2,0 % korkeamman taajuuden kuin soitettu taajuus ja ohituksen jälkeen 2,0 % matalamman taajuuden kuin soitettu taajuus.

## Tehtävä 9.12.



b) Äänen spektristä määritettynä kitaran kieli tuotti taajuuDET

$f_1 = 332 \text{ Hz}$ ,  $f_2 = 664 \text{ Hz}$  ja  $f_3 = 996 \text{ Hz}$ . Suurin suhteellinen amplitudi oli taajuudella 332 Hz.

c) Kun kitaran kielen tuottamien äänien taajuuksia tarkastellaan, havaitaan, että taajuus  $f_2$  ja  $f_3$  ovat taajuuden  $f_1$  monikertoja.

### Tehtävä 9.13.

potkujen välinen aika  $T = 1,25 \text{ s}$

pinta-aallon nopeus  $v = 0,58 \text{ m/s}$

sorsan nopeus  $v_l = 0,24 \text{ m/s}$

a) Paikallaan oleva sorsa kohtaa uivan sorsan lähettämiä aaltoja tietyllä taajuudella. Kun sorsa lähettää aaltoja ja liikkuu paikallaan olevasta sorsasta poispäin, on kyseessä Dopplerin ilmiö, jossa aaltolähde liikkuu paikallaan olevasta havaitsijasta poispäin. Tällöin paikallaan oleva sorsa kokee aallot harvemmin. Paikallaan olevan sorsan havaitseman aaltoliikkeen taajuus on pienempi kuin uivan sorsan tuottaman aaltoliikkeen taajuus.

b) Kyseessä on Dopplerin ilmiö, jossa äänilähde liikkuu poispäin havaitsijasta. Uivan sorsan lähettämien aaltojen taajuus on

$$f_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{1,25 \text{ s}} = 0,800 \text{ Hz.}$$

Paikallaan olevan sorsan kokemien aaltojen taajuus eli aaltojen määrä sekunnissa

$$f = f_0 \frac{v}{v + v_l}$$

$$f = \frac{1}{T} \cdot \frac{v}{v + v_l}$$

$$= \frac{1}{1,25 \text{ s}} \cdot \frac{0,58 \text{ m/s}}{0,58 \text{ m/s} + 0,24 \text{ m/s}} = 0,56585 \text{ Hz} \approx 0,57 \text{ Hz.}$$

## Tehtävä 9.14.

summa-aallon taajuus  $f = 431 \text{ Hz}$

- a) Koska toisen ääniraudan taajuus oli syntyneen äänen taajuutta suurempi, merkitään tunnetun ääniraudan taajuutta  $f_2 = 437 \text{ Hz}$ .

Summa-aallon taajuus on äänen tuottamien äänirautojen värähtelytaajuuksien keskiarvo. Huojuntaäänen taajuudelle on voimassa

$$f = \frac{f_1 + f_2}{2}.$$

Toisen ääniraudan taajuus on

$$f_1 = 2f - f_2 = 2 \cdot 431 \text{ Hz} - 437 \text{ Hz} = 425 \text{ Hz}.$$

- b) Kuullun äänen huojuntataajuus noudattaa yhtälöä

$$f_h = |f_2 - f_1| = |437 \text{ Hz} - 425 \text{ Hz}| = 12 \text{ Hz}.$$

## Tehtävä 9.15.

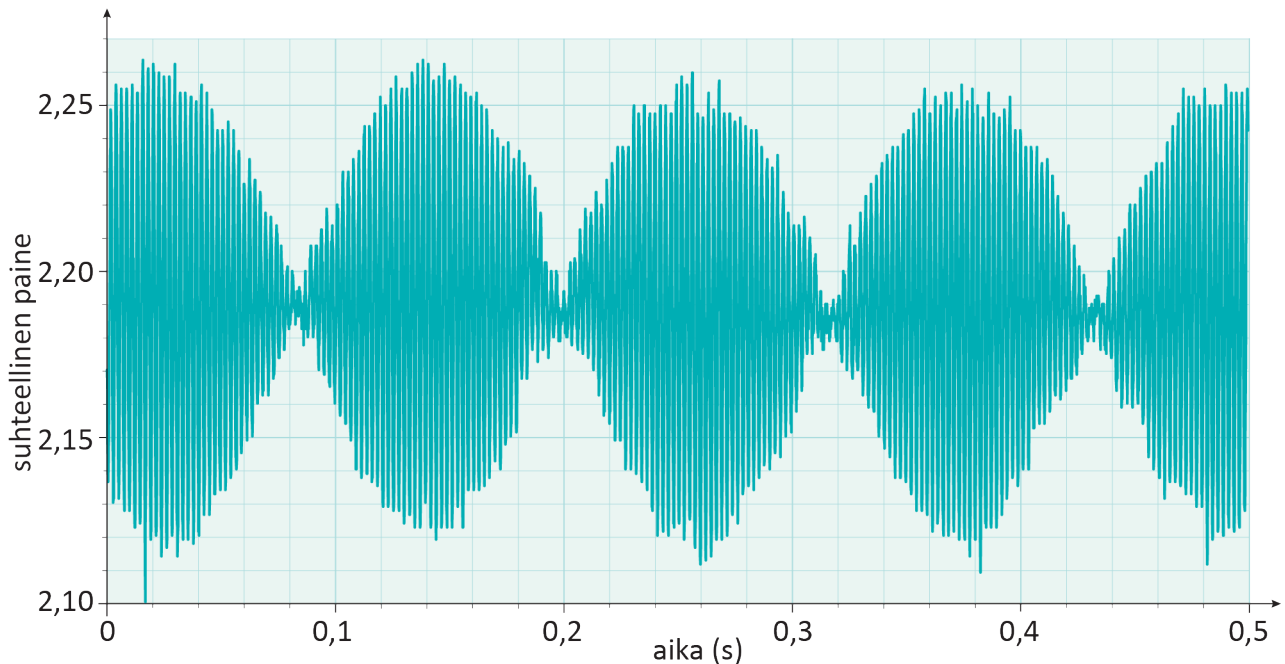
- a) Aallot värähtelevät lähes samalla taajuudella, joten peräkkäisille jaksoille summa-aalto on melkein sama. Taajuuseron vuoksi pientä siirtymää kuitenkin tapahtuu. Hyvin monen jakson toistuessa siirtymä näkyy summa-aallon amplitudissa huojuntana.
  
- b) Simulaation mukaan näyttäisi, että huojunta alkaa erottua summa-aallossa, kun taajuuksien ero on

## Tehtävä 9.17.

- a) Kun viivoitinta liikutetaan pöydän reunan yli, viivoittimen värähtelevän osan pituus kasvaa. Mitä pidempi on värähtelevän osan pituus, sitä matalampi on viivoittimen tuottaman äänen taajuus.
- b) Kun värähtelevä osa on pitkä, viivoitin värähtelee hitaasti. Kun viivoitin värähtelee ilmassa jaksottaisesti edestakaisin, viivoittimen liike tuottaa ympäröivään ilmaan paineen muutoksia. Nämä jaksottaiset paineen muutokset etenevät ilmassa ja ne havaitaan äänenä. Mitä hitaammin viivoitin värähtelee, sitä pienempi viivoittimen tuottaman äänen taajuus on ja sitä matalammalta ääni kuulostaa. Kun viivoittimen värähtelevä osa on lyhyempi, viivoittimen värähtelytaajuus on suurempi, jolloin havaitaan ääni, joka kuulostaa korkeammalta.

## Tehtävä 9.18.

a)



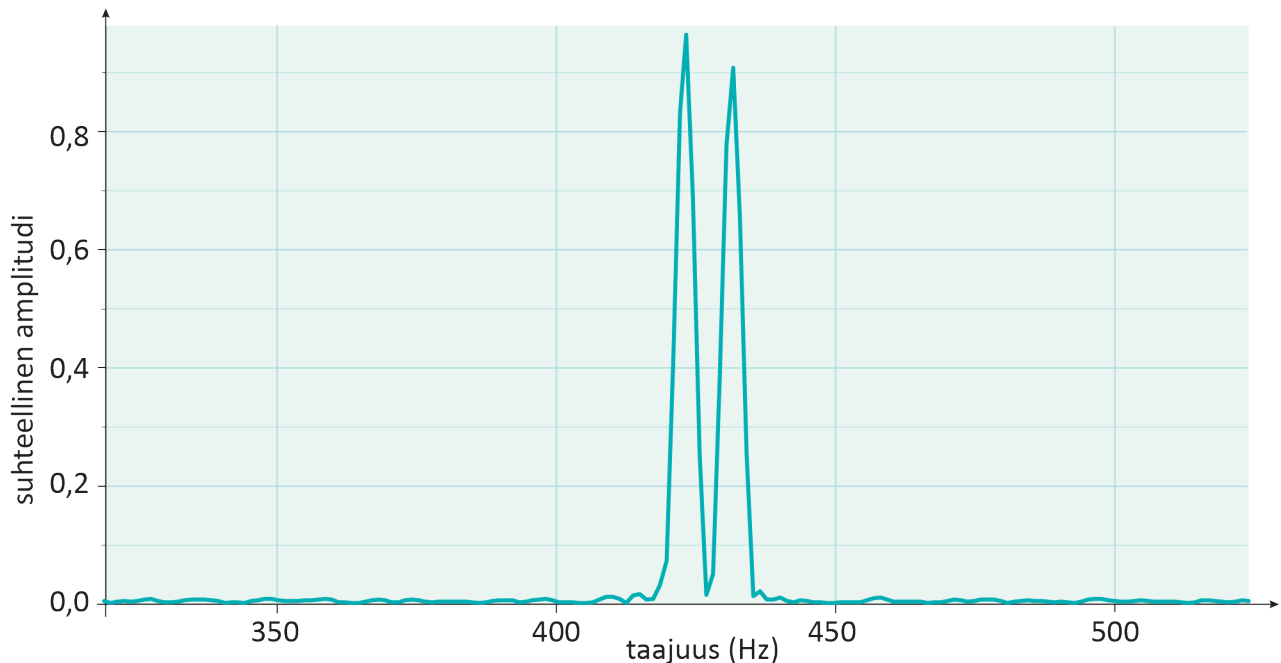
b) Huojuntataajuus saadaan määritettyä kuvaajalta huojuksen jaksonajasta eli peräkkäisten suhteellisen paineen amplitudien minimien välisestä ajasta. Kuvaajan perusteella kolmen peräkkäisen jakson aika on  $t = 0,3487 \text{ s}$ .

Tästä voidaan laskea huojuksen jaksonaika  $T = \frac{t}{3}$ .

Huojuntataajuus on

$$f = \frac{1}{T} = \frac{3}{t} = \frac{3}{0,3487 \text{ s}} = 8,603 \text{ Hz} \approx 8,6 \text{ Hz}.$$

c) Huojuntaäänien muodostavien äänten taajuudet saadaan mittausaineistolle taajuusanalyysille tehdyn FFT-analyysillä.



Huojuntaäänien muodostavien äänten taajuudet ovat

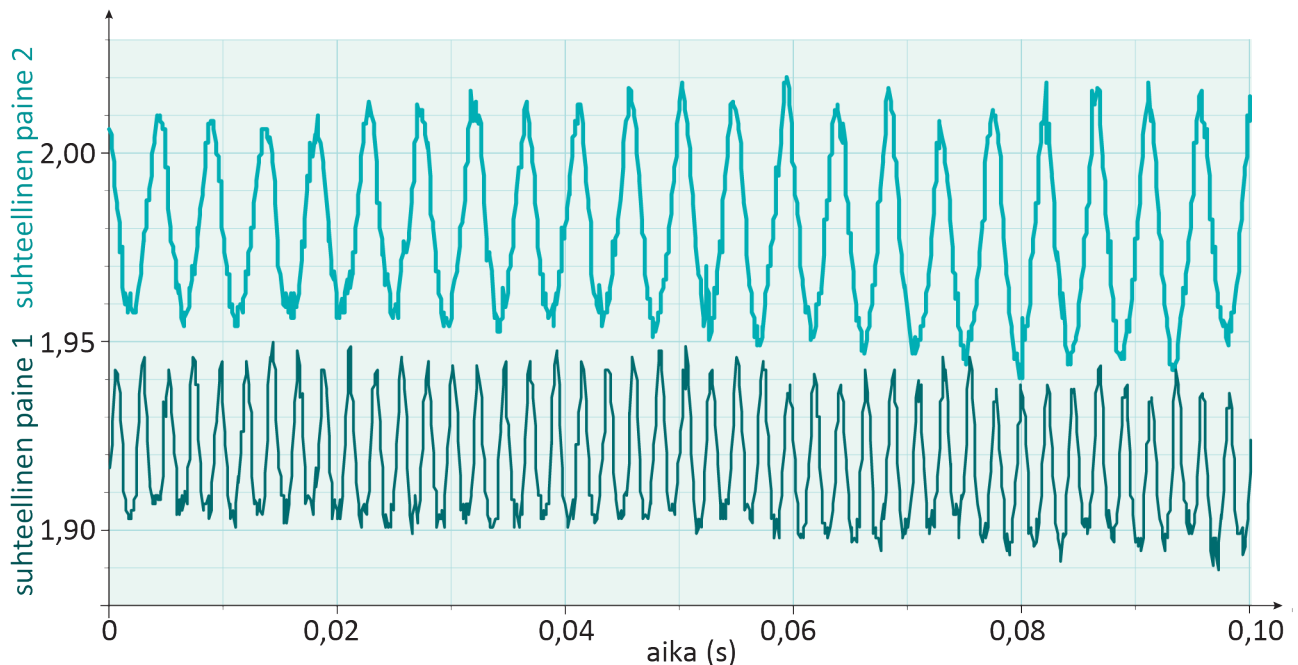
$$f_1 = 423,58 \text{ Hz ja } f_2 = 432,13 \text{ Hz.}$$

Summa-aallon taajuus on

$$f = \frac{f_1 + f_2}{2} = \frac{423,58 \text{ Hz} + 432,13 \text{ Hz}}{2} = 427,855 \text{ Hz} \approx 428 \text{ Hz.}$$

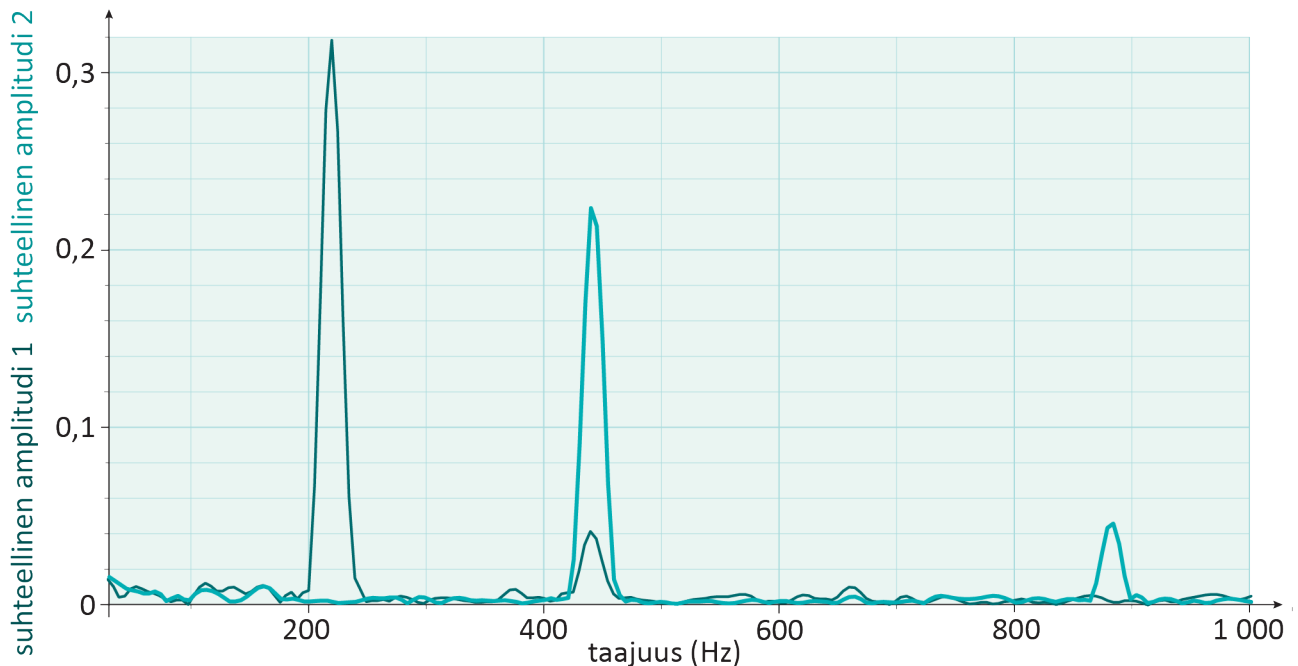
## Tehtävä 9.19.

a)



b) Kuvaajasta nähdään, että kuvaajassa 2 jaksoaika on lyhyempi eli laulun 2 taajuus on selkeästi suurempi kuin laulun 1. Toisaalta laulun 1 amplitudi on suurempi, mikä kertoo, että kyseessä oli voimakkaampi ääni.

c) FFT-taajuusanalyysi kertoo lauluäänten spektrit.



Spektristä nähdään, että laulun 2 perustaajuus on yhtä suuri kuin laulun 1 ensimmäinen ylävärähtelytaajuus. Tämä tarkoittaa, että lauletuilla äänillä on oktaavin ero.

## Tehtävä 9.20.

- a) Koska havaitsijan nopeus on pienempi kuin äänilähteen loittonemisnopeus, havaitsija kohtaa ääniaaltoja harvemmin kuin jos havaitsija ja äänilähde olisivat paikoillaan. Havaitsija kokee äänen taajuuden pienempänä eli havaittu äänen korkeus on matalampi.
- b) äänilähteen tuottaman äänen taajuus  $f_0 = 300 \text{ Hz}$   
äänilähteen nopeus  $v_l = 120 \text{ km/h}$   
havaitsijan nopeus  $v_h = 97 \text{ km/h}$

Koska havaitsija loittonee äänilähteestä, Dopplerin ilmiön mukaan havaitsijan kokeman äänen taajuus pienenee. Tällöin yhtälön osoittajaan tulee miinusmerkki.

Äänilähde liikkuu kohti havaitsijaa, joten havaitsija kokee äänilähteen taajuuden kasvun ja yhtälön nimittäjään tulee miinusmerkki.

Autoilijan kokema äänen taajuus

$$f_h = \frac{v + v_h}{v - v_l} f_0 = \frac{343 \text{ m/s} - \frac{97 \text{ m}}{3,6 \text{ s}}}{343 \text{ m/s} - \frac{120 \text{ m}}{3,6 \text{ s}}} \cdot 300 \text{ Hz} = 306,1895 \text{ Hz} \approx 306 \text{ Hz}.$$

## Tehtävä 9.21.

- a) Oktaavissa äänten taajuuksien suhde on 2:1. Lasketaan taajuus, joka on oktaavin päässä sävelestä  $c^1$ .

$$f = 2f_0 = 2 \cdot 261,6 \text{ Hz} = 523,2 \text{ Hz}$$

C-duuriasteikon korkeampi  $c^1$  muodostaa oktaavin perussävelen kanssa.

- b) Perussävel  $f_0 = 261,6 \text{ Hz}$ . Määritetään suuren terssin ja puhtaan kvintin päässä olevien sävelten taajuudet.

Suuri terssi noudattaa ehtoa  $\frac{f_3}{f_0} = \frac{5}{4}$ .

Lasketaan vastaava taajuus.  $f_3 = \frac{5}{4}f_0 = \frac{5}{4} \cdot 261,6 \text{ Hz} = 327 \text{ Hz}$

Aineiston mukaan suuren terssin päässä perustaajuudesta on sävel  $e^1$ .

Puhdas kvintti noudattaa ehtoa  $\frac{f_5}{f_0} = \frac{3}{2}$ .

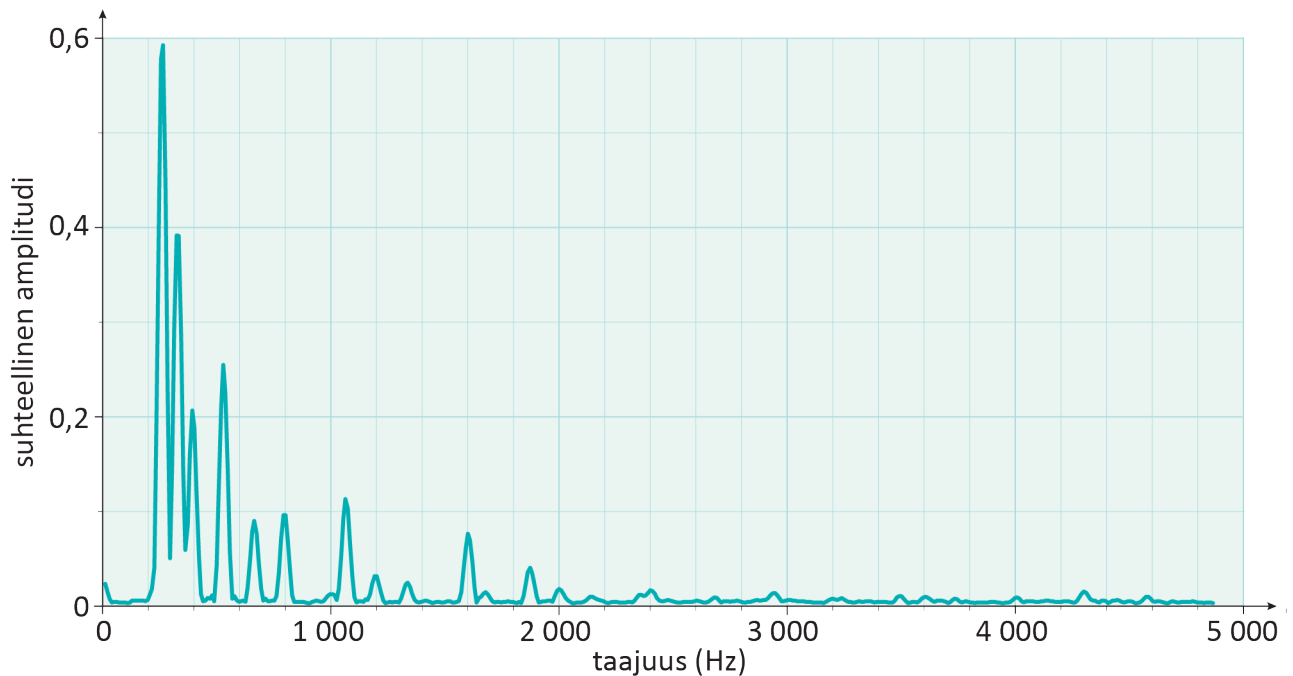
Lasketaan vastaava taajuus.

$$f_3 = \frac{3}{2}f_0 = \frac{3}{2} \cdot 261,6 \text{ Hz} = 392,4 \text{ Hz}$$

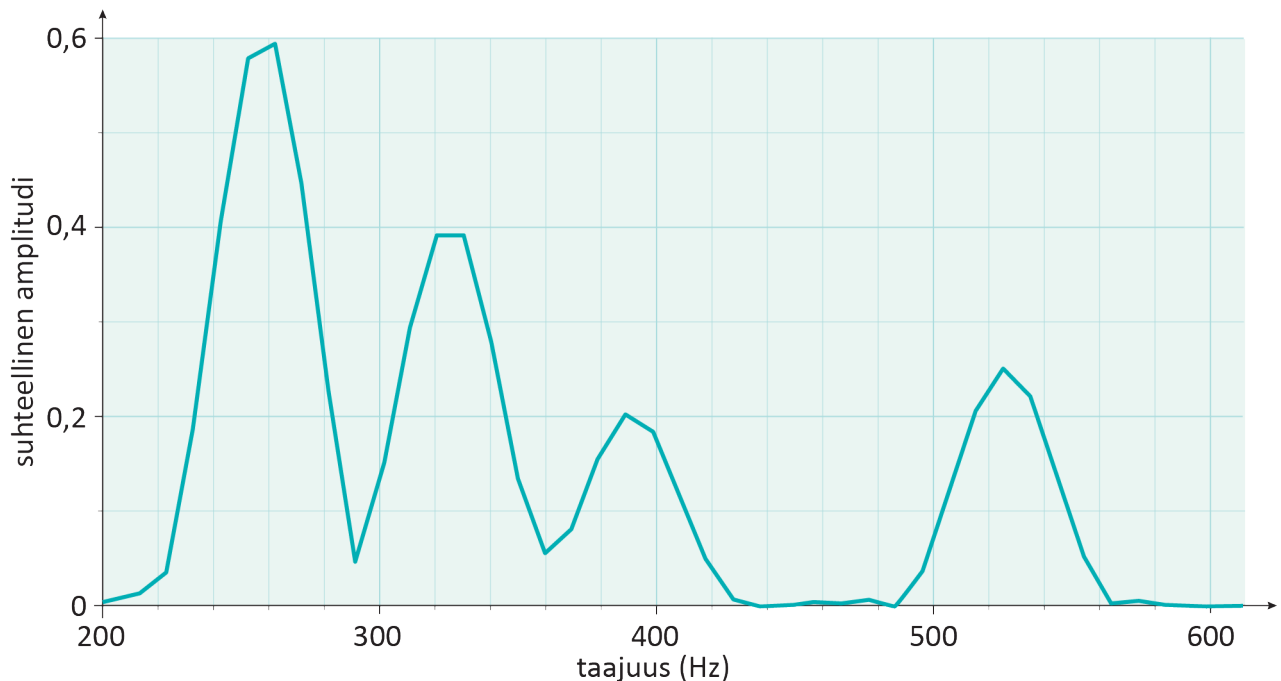
Aineiston mukaan terssin säveltä lähin on  $g^1$ .

C-duurikolmisoinnun muodostavat sävelet  $c^1$ ,  $e^1$  ja  $g^1$ .

c) Esitetään äänen suhteellinen amplitudi taajuuden suhteen



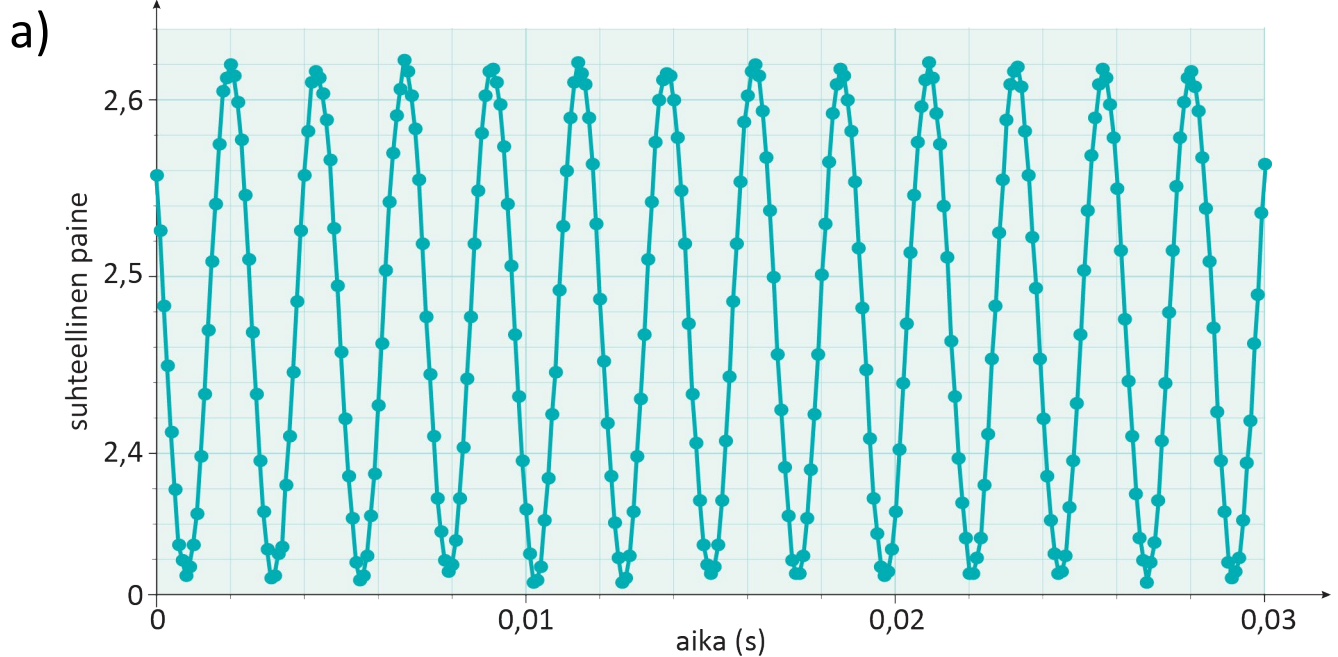
Tarkastellaan aineiston C-duuriasteikon taajuusalueita.



Kuvaajasta interpoloimalla saadaan piikkien huippujen taajuuksiksi 261,4 Hz, 325,5 Hz ja 389,8 Hz. Mitatut arvot ovat hyvin lähellä teoreettisia arvoja. Poikkeama saattaa aiheutua esimerkiksi siitä, että kitaran viritys on ollut hieman epätarkka.

Kielet, jotka tuottavat  $e^1$ - ja  $g^1$ -sävelet värähtelevät teoreettista tilannetta pienemmällä taajuudella

## Tehtävä 9.22.



(akselit oikein päin 1 p, mittapisteet kuvaajassa 1 p

(ei ole pakko olla sovitusta))

Kuvaajan perusteella 11 jakson aika on  $t = 0,026\ 04\ \text{s}$ .

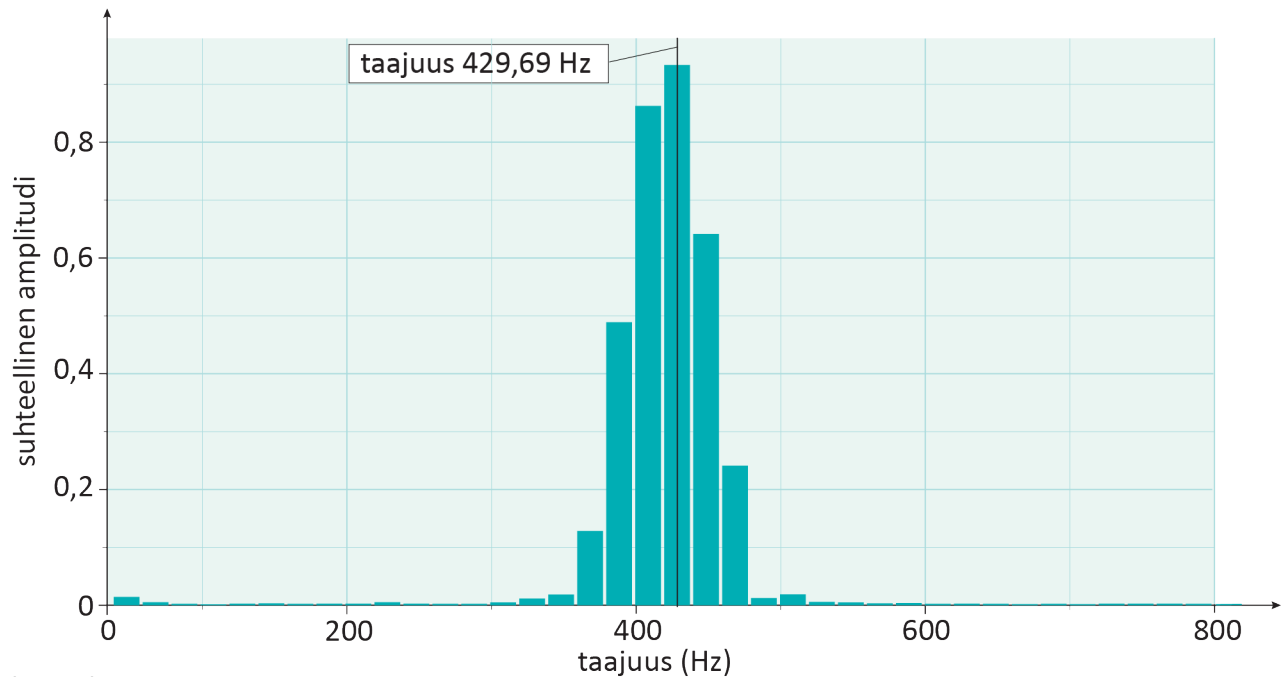
(1 p)

Jaksonaika on  $T = \frac{t}{11} (= \frac{0,026\ 04\ \text{s}}{11} = 0,002\ 367\ \frac{1}{\text{s}})$ .

Äänen taajuus

$$f = \frac{1}{T} = \frac{11}{t} = \frac{11}{0,026\ 04\ \text{s}} = 422,427\ \text{Hz} \approx 422\ \text{Hz}. \quad (2\ \text{p})$$

b)



(2 p)

FFT-analyysillä tehdyn taajuusanalyysin perusteella äänen taajuus  $f = 429,69 \text{ Hz} \approx 430 \text{ Hz}$ . (1 p)

c) aallon nopeus  $v = 344 \text{ m/s}$

Ääniaallon aallonpituus saadaan aaltoliikkeen perusyhtälön avulla b-kohdan tuloksen mukaan (1 p)

$$v = f\lambda$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{344 \text{ m/s}}{429,69 \text{ Hz}} = 0,800 577 \text{ m} \approx 80 \text{ cm}. \quad (2 \text{ p})$$

- d) Kun äänirautaan lisätään punnus, ääniraudan massa suurenee. Mitä suurempi ääniraudan massa on, sitä pienemmällä taajuudella äänirauta värähtelee. (2 p)
- Koska taajuus pienenee, ääni kuullaan matalampana. (2 p)

# 10. Äänen intensiteettitaso

## Tehtävä 10.1.

Oikeat väitteet: c), e), f)

Väärät väitteet: a), b), d)

Korjaukset vääriin väitteisiin:

a) Äänen intensiteetti on äänen teho pinta-alaa kohden.

b) Korkeat äänet absorboituvat väliaineeseen matalia ääniä enemmän ja siksi vaimenevat paremmin.

d) Ultraäänen taajuus on yli 20 000 Hz.

## Tehtävä 10.2.

etäisyys summerista  $r_1 = 1,5 \text{ m}$

intensiteetti  $1,5 \text{ m:n}$  etäisyydellä summerista

$$I_1 = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ W/m}^2$$

pienin intensiteetti, jolla äänen voi kuulla  $1\,000 \text{ Hz}$  taajuudella  $I_2 = 1,0 \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2$

etäisyys, jolta äänen voi vielä kuulla  $r_2$

Pistemäisen äänilähteen intensiteetti on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön, eli

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}.$$

Summerin äänen kuuleminen on vielä teoriassa mahdollista, kun etäisyys on

$$r_2 = \sqrt{\frac{I_1}{I_2}} r_1 = \sqrt{\frac{1,0 \cdot 10^{-3} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}{1,0 \cdot 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}} \cdot 1,5 \text{ m} = 47434,16 \text{ m} = 47,434\,16 \text{ km} \approx 47 \text{ km}.$$

Summerin ääntä ei voi kuulla 47 kilometrin päästä.

Käytännössä matka on paljon lyhyempi, sillä ilma absorboi äänen energiaa matkalla.

### **Tehtävä 10.3.**

- a) Infraääni on ääntä, jonka taajuus on alle 20 Hz.  
Ultraääni on ääntä, jonka taajuus on yli 20 000 Hz  
Ihminen ei voi kuulla infra- eikä ultraääntä.
- b) Koirapilli lähettää ultraääntä, eli ääntä, jonka taajuus on yli 20 kHz. Ihminen ei kuule näin korkeaa ääntä. Koiran kuuloalue on laajempi, minkä vuoksi koira kuulee koirapillin äänen.

## Tehtävä 10.4.

a) äänen intensiteetti  $I = 120 \mu\text{W}/\text{m}^2$

Äänen intensiteettitaso on

$$L = 10 \lg \left( \frac{120 \cdot 10^{-6} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}{10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}} \right) \text{ dB} = 80,79 \text{ dB} \approx 81 \text{ dB}.$$

b) Intensiteettitaso on asteikko on logaritminen. 10 dB kasvu intensiteettitasossa tarkoittaa intensiteetin  $10^1$  eli 10-kertaistumista. Intensiteettitaso kasvu 50 dB:llä tarkoittaa intensiteetin  $10^5$  eli 100 000-kertaistumista. Näin ollen konsertin äänen intensiteetti on 100 000 kertaa suurempi kuin jääkaapin äänen intensiteetti.

## **Tehtävä 10.5.**

- a) Äänekkyystason arvo 0 fon tarkoittaa äänen intensiteettiä, jonka ihminen juuri ja juuri kuulee.
  
- b) Korva on herkin sille taajuudelle, jolla 0 fon -käyrän intensiteetin arvo on pienimmillään. Korva on herkin noin 2 000–5 000 Hz taajuuksille.

## Tehtävä 10.6.

- a) Melu on häiritsevää, epämiellyttävää tai kuulolle haitallista ääntä.
  
- b) Jos työympäristön melun intensiteettitaso ylittää 80 dB, on työnantajan tarjottava työntekijälle kuulosuojaimet. Mitä suurempi intensiteettitaso on, sitä lyhyempiä aikoja melussa voi oleskella.
  
- c) Jatkuva meluallistuminen voi aiheuttaa ihmiselle stressiä, nostaa verenpainetta ja lisätä riskiä sydänsairauksiin. Myös kuulo voi vaurioitua jatkuvasta meluallistuksesta.

## Tehtävä 10.7.

Merkitään koneen tuottaman äänen intensiteettiä ennen muutosta tunnuksella  $I$ . Äänen intensiteetti kolminkertaistuu, jolloin ennen etäisyyden muutosta  $I_1 = 3I$ . Äänen intensiteetti lopussa,  $I_2$ , pitää olla yhtä suuri kuin ennen intensiteetin muutosta. Tällöin  $I_2 = I$ . Etäisyys alussa on  $r_1$ .

Äänen intensiteetti on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$
$$\frac{3I}{I} = \frac{r_2^2}{r_1^2}.$$

Etäisyydeksi saadaan

$$r_2^2 = \frac{3r_1^2}{1}$$
$$r_2 = \sqrt{3r_1^2}$$
$$r_2 = \sqrt{3}r_1.$$

Etäisyyden pitää kasvaa  $\sqrt{3}$ -kertaiseksi eli noin 1,7-kertaiseksi alkuperäiseen etäisyyteen nähden.

## Tehtävä 10.8.

etäisyys alussa  $r_1 = 1,5 \text{ m}$

etäisyys lopussa  $r_2 = 2,5 \text{ m}$

intensiteetti alussa  $I_1 = 2,2 \cdot 10^{-4} \text{ W/m}^2$

Äänen intensiteetti on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön  $I \sim \frac{1}{r^2}$ . Intensiteettien suhteeksi saadaan  $\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$ .

Yhden lehtipuhaltimen tuottaman äänen intensiteetti 1,5 metrin etäisyydellä on

$$I_2 = \frac{r_1^2}{r_2^2} I_1.$$

Kahden lehtipuhaltimen tuottaman äänen intensiteetti 2,5 metrin etäisyydellä on

$$I = 2I_2 = 2I_1 \frac{r_1^2}{r_2^2} = 2 \cdot 2,2 \cdot 10^{-4} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot \frac{(1,5 \text{ m})^2}{(2,5 \text{ m})^2} = 1,584 \cdot 10^{-4} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \approx 1,6 \cdot 10^{-4} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

## Tehtävä 10.9.

a) Kuultavan äänen voimakkuus kuvaa äänen intensiteettiä ja äänen korkeus äänen taajuutta.

b) etäisyys koirasta alussa  $r_1 = 10$  m

intensiteetti etäisyydellä  $r_1$  on  $I_1 = 8 \cdot 10^{-7} \text{ W/m}^2$

intensiteetti etäisyydellä  $r_2$  on  $I_2 = 1 \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2$

Intensiteetti on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön, jolloin intensiteettien ja etäisyyksien neliön välille saadaan yhtälö

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}.$$

Etäisyys, jolla haukku vielä kuuluu, on

$$r_2^2 = \frac{I_1}{I_2} r_1^2$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{I_1}{I_2} r_1^2} = \sqrt{\frac{I_1}{I_2}} r_1 = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^{-7} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}{1 \cdot 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}} \cdot 10 \text{ m} = 8\,944,27 \text{ m} \approx 9 \text{ km}.$$

## Tehtävä 10.10.

äänen intensiteettitaso aluksi  $L_1$

äänen intensiteettitaso lopuksi  $L_2 = L_1 + 1,0 \text{ dB}$

äänen intensiteetti aluksi  $I_1$

äänen intensiteetti lopuksi  $I_2$

Äänen intensiteettitaso esitetään yhtälöllä

$$L = 10 \lg \left( \frac{I}{I_0} \right) \text{ dB, joten äänen intensiteetti on } I = I_0 \cdot 10^{\frac{L}{10 \text{ dB}}}.$$

Äänen intensiteetin suhteellinen muutos on

$$\begin{aligned} \frac{I_2}{I_1} &= \frac{I_0 \cdot 10^{\frac{L_2}{10 \text{ dB}}}}{I_0 \cdot 10^{\frac{L_1}{10 \text{ dB}}}} = 10^{\frac{L_2}{10 \text{ dB}} - \frac{L_1}{10 \text{ dB}}} \\ &= 10^{\frac{L_1 + 1,0 \text{ dB}}{10 \text{ dB}} - \frac{L_1}{10 \text{ dB}}} = 10^{\frac{1,0 \text{ dB}}{10 \text{ dB}}} \\ &= 10^{\frac{1}{10}} = 1,258\,9254 \approx 1,26 \end{aligned}$$

Äänen intensiteetti kasvaa 26 %, kun äänen intensiteettitaso kasvaa 1,0 dB.

## Tehtävä 10.11.

etäisyys alussa  $r_1 = 2,1 \text{ cm}$

intensiteettitaso alussa  $I_1 = 62 \text{ dB}$

vertailuintensiteetti  $I_0 = 1 \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2$

a) Kuulokkeen tärykalvolle aiheuttama intensiteetti saadaan intensiteettitasosta

$$L_1 = 10 \lg \left( \frac{I_1}{I_0} \right) \text{ dB} \quad \parallel : 10 \text{ dB}$$

$$\frac{L_1}{10 \text{ dB}} = \lg \left( \frac{I_1}{I_0} \right) \quad \parallel 10^{(\cdot)}$$

$$10^{\lg \left( \frac{I_1}{I_0} \right)} = 10^{\frac{L_1}{10 \text{ dB}}}$$

$$\frac{I_1}{I_0} = 10^{\frac{L_1}{10 \text{ dB}}} \quad \parallel \cdot I_0$$

$$I_1 = I_0 \cdot 10^{\frac{L_1}{10 \text{ dB}}}$$

$$= 1 \cdot 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 10^{\frac{62 \text{ dB}}{10 \text{ dB}}} = 1 \cdot 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 10^{6,2} = 1 \cdot 10^{-5,8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$= 1,584 89 \cdot 10^{-6} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \approx 1,6 \cdot 10^{-6} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

b) etäisyys lopussa  $r_2 = 3,7$  cm

Äänilähteen tuottaman äänen intensiteetti on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön  $I \sim \frac{1}{r^2}$ . Intensiteettien suhteeksi saadaan  $\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$ .

Kuulokkeen tuottama intensiteetti 3,7 cm etäisyydellä on

$$I_2 = \frac{r_1^2}{r_2^2} I_1 = \frac{(2,1 \text{ cm})^2}{(3,7 \text{ cm})^2} \cdot 1,58489 \cdot 10^{-6} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 5,10546 \cdot 10^{-7} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

Kuulokkeen tuottaman äänen intensiteettitaso 3,7 cm etäisyydellä on

$$L_2 = 10 \lg \left( \frac{I_2}{I_0} \right) \text{ dB} = 10 \lg \left( \frac{\frac{r_1^2}{r_2^2} I_1}{I_0} \right) \text{ dB}$$
$$L_2 = 10 \lg \left( \frac{\frac{(2,1 \text{ cm})^2}{(3,7 \text{ cm})^2} \cdot 1,58489 \cdot 10^{-6} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}{1,0 \cdot 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}} \right) \text{ dB} = 57,080 \text{ dB} \approx 57 \text{ dB}.$$

## Tehtävä 10.12.

- a) Kuvaajasta luettuna 2 000 Hz:n ääni, jonka intensiteetti on  $0,50 \text{ W/m}^2$  tuottaa kipua.
- b) Ihmisen kuulokynnys on 0 fon. Tätä käyrää tutkimalla voidaan todeta, että ihminen kuulee 50 Hz:n äänen, jos äänen intensiteettitaso on noin 44 dB. Ihminen ei siis kuule 50 Hz:n ääntä, jonka intensiteettitaso on 40 dB.
- c) Kaavion perusteella ihminen aistii paremmin suuria kuin pieniä taajuuksia eli ihminen kuulee korkeat äänet matalia paremmin. Jotta bassokaiutinelementin tuottaman äänen kuuloaistimus saadaan yhtä voimakkaaksi kuin keski- ja diskanttielementtien tuottamien äänten kuuloaistimus, bassokaiuttimelle pitää tuoda signaali suurella teholla. Suurempi teho tuottaa suuremman äänen intensiteetin.

## Tehtävä 10.13.

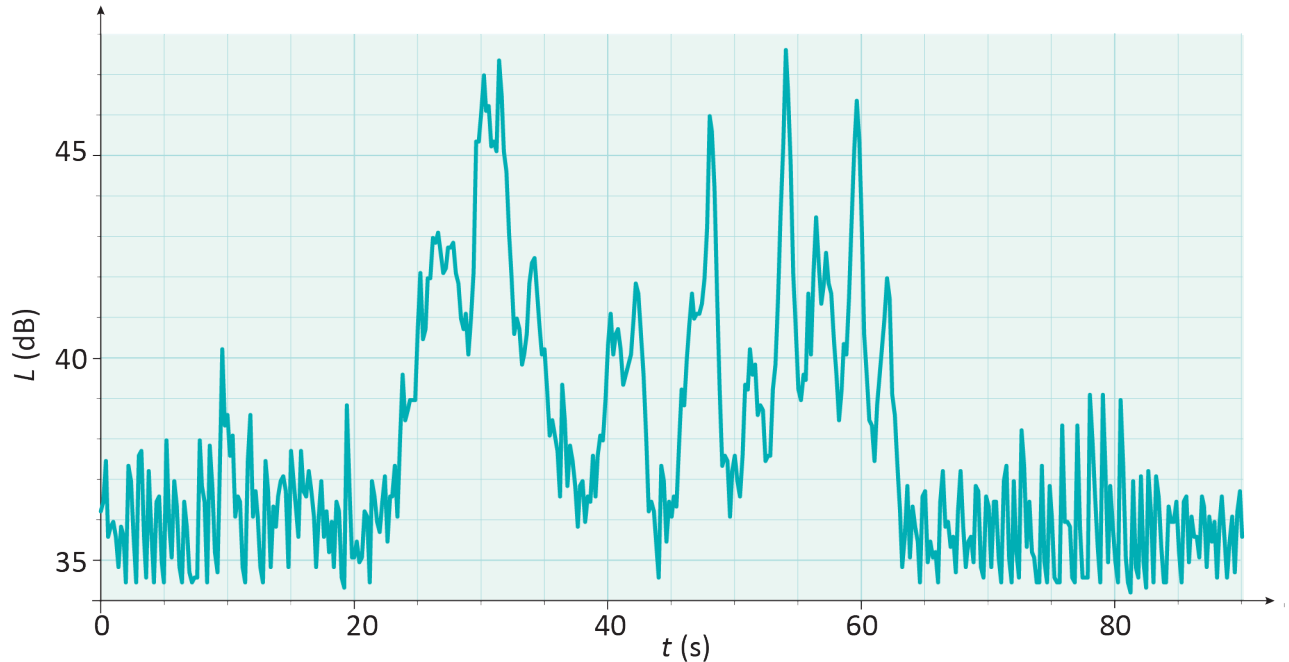
- a) Videon taustamelu saadaan silloin, kun porakone ei ole päällä. Videon mukaan huoneen taustamelu on noin 51 dB
  
- b) Kun etäisyys porakoneesta kasvaa, pienenee äänen intensiteettitaso huomattavasti. Äänilähteen teho jakaantuu sitä suuremmalle pinta-alalle, mitä kauemmaksi kasvaa etäisyys porakoneesta. Äänen intensiteetti on tällöin kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön.

## **Tehtävä 10.14.**

- a) Ihmisen kuuloalueen taajuuden alaraja on 20 Hz ja yläraja 20 000 Hz. Kuuloalue on kuitenkin yksilöllinen. Vanhemmilla ihmisillä kuuloalueen yläraja saattaa olla selvästi alle 20 000 Hz.
  
- b) Ihminen kuulee parhaiten äänet, joiden taajuus on 3 000–4 000 Hz.

## Tehtävä 10.15.

a)

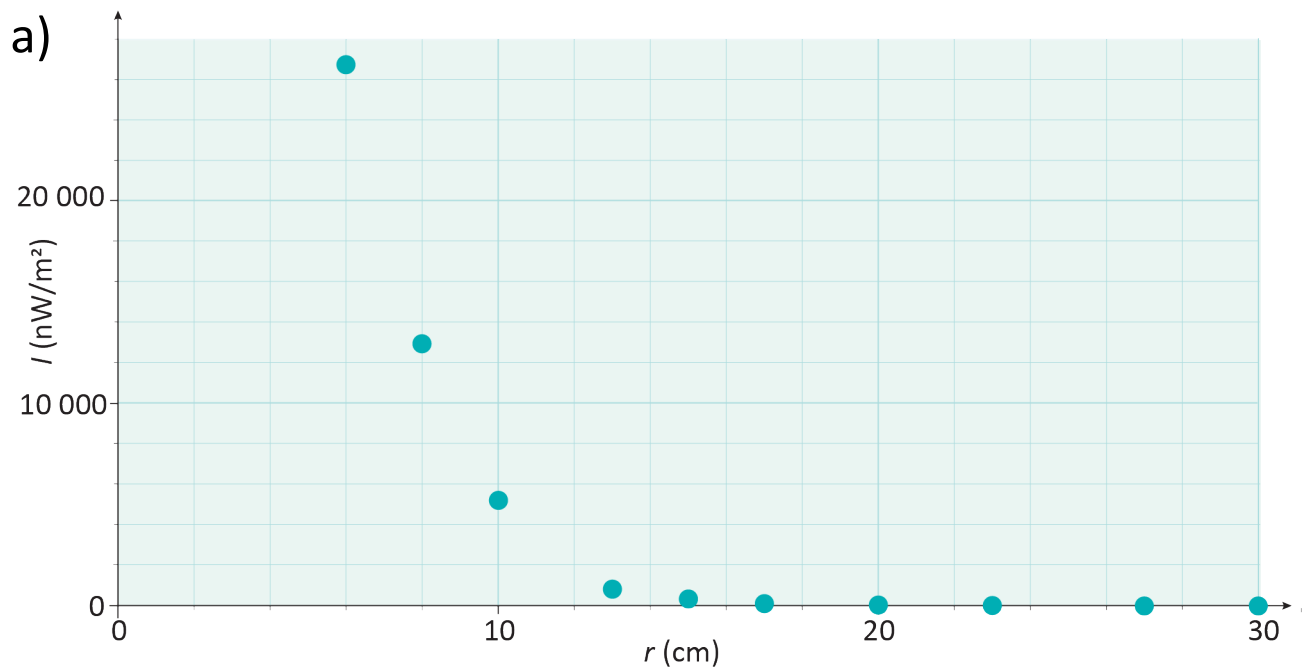


b) Kun autot lähtevät liikennevaloista, äänen intensiteetti ja intensiteettitaso kasvavat. Autot lähtivät liikkeelle ajanhetkellä 30 s, sillä silloin melun intensiteettitaso nousi noin 36 dB:sta 41 dB:iin.

c) Melun intensiteettitaso b-kohdan mukaan oli noin 36 dB, kun autot olivat paikoillaan. Intensiteettitaso nousi noin 41 dB:iin. Intensiteettitason muutos on

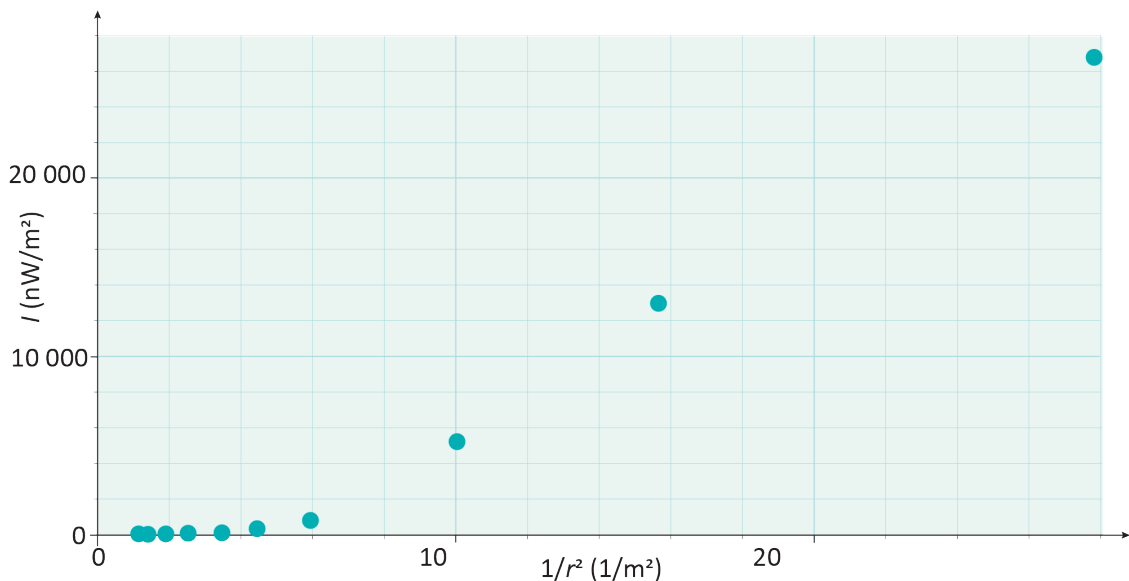
$$\Delta L = 41 \text{ dB} - 36 \text{ dB} = 5 \text{ dB}.$$

## Tehtävä 10.16.



b) Pistemäisen äänilähteen tuottaman äänen intensiteetti on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön  $I \sim \frac{1}{r^2}$ .

Tällöin  $(1/r^2, I)$ -koordinaatiston kuvaajana pitäisi olla nouseva suora. Lasketaan uuteen sarakkeeseen  $1/r^2$  ja esitetään saadut tulokset  $(1/r^2, I)$ -koordinaatistossa.

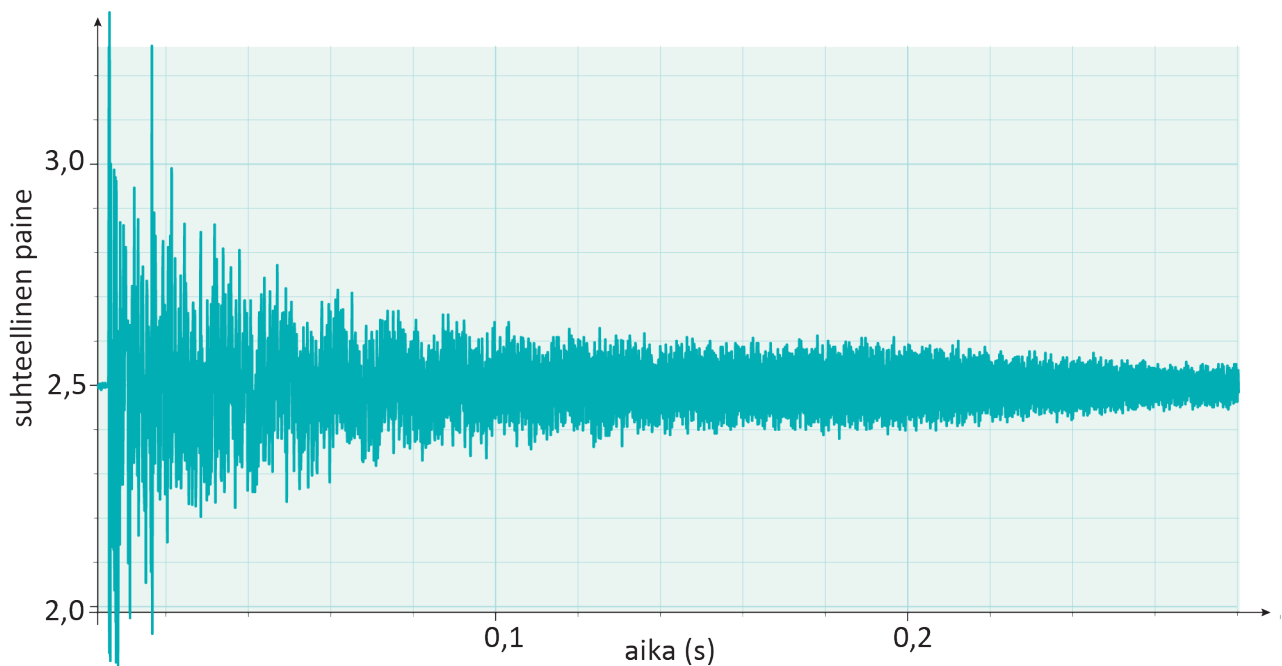


Huomataan, että intensiteetin ollessa  $870 \text{ nW/m}^2$  kuvaaja alkaa nousta lineaarisesti. Tämä tarkoittaa, että ääni noudattaisi pistemäisen äänilähteen teoreettista mallia, kun äänen etäisyys kaiuttimesta on alle 13 cm. Koska kuvaajana ei ole nouseva suora, ei kaiutin noudata pistemäisen äänilähteen teoreettista mallia.

Kun ääni etenee huoneessa, osa äänestä heijastuu huoneessa olevista esineistä ja seinistä. Heijastunut ääni lisää huoneen taustamelua. Mittauksen perusteella yli 13 cm etäisyyden jälkeen intensiteettitaso muutos alkaa pienentyä, joten intensiteettitaso alkaa lähestyä huoneen taustamelun tasoa.

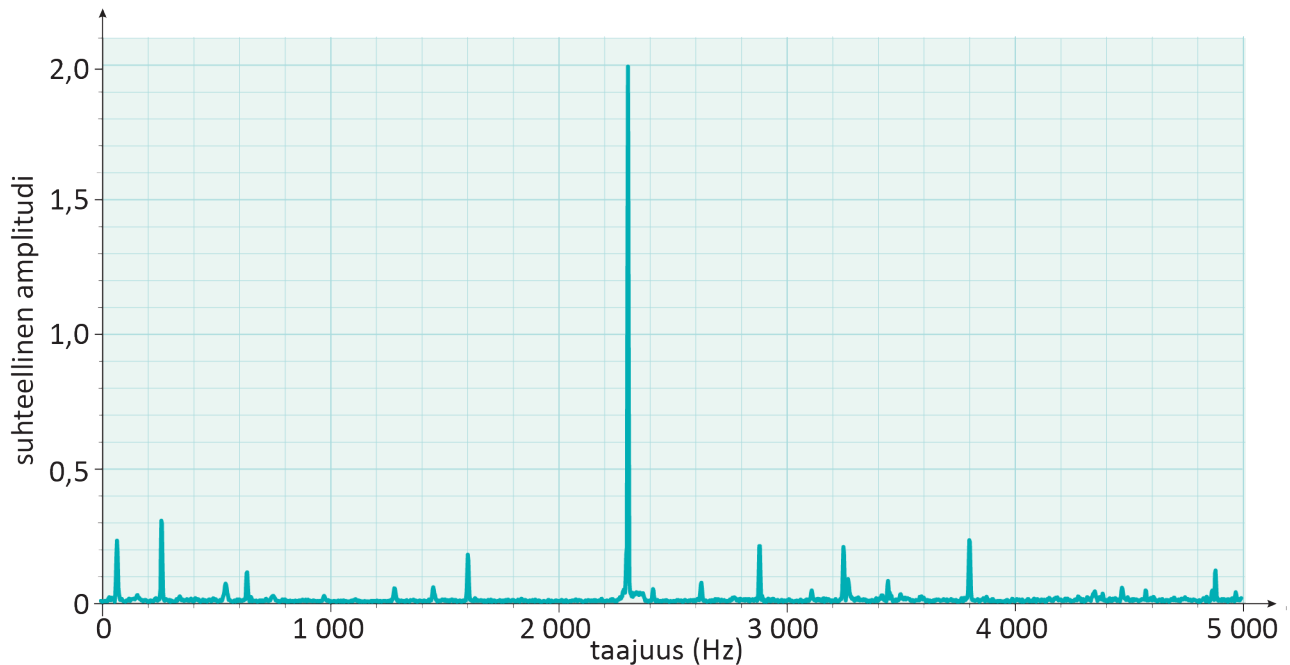
## Tehtävä 10.17.

Esitetään alasimen ilmaan synnyttämän äänen suhteellinen paineen vaihtelu ajan suhteen.



Kuvaajasta nähdään, että äänen suhteellinen paine pienenee hyvin nopeasti. Tämä tarkoittaa sitä, että alasimen tuottaman äänen intensiteetti pienenee.

b) Tehdään mittausaineistosta FFT-muunnoksen avulla taajuusjakauma eli äänen spektri.



Yhden värähtelytaajuuden amplitudi on selvästi muita suurempi. Kuvaajan perusteella äänen taajuus  $f = 2\,309,57\text{ Hz} \approx 2\,300\text{ Hz}$  erottuu parhaiten.

## Tehtävä 10.18.

etäisyys koneesta alussa  $r_1 = 1,2 \text{ m}$

äänen intensiteettitaso etäisyydellä  $r_1$  on  $L_1 = 94 \text{ dB}$

vertailuintensiteetti  $I_0 = 1,0 \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2$

Jos työympäristön melun intensiteettitaso ylittää  $80 \text{ dB}$ , on työnantajan tarjottava työntekijälle kuulosuojaimet.

Lasketaan koneen tuottaman äänen intensiteetti  $1,2 \text{ metrin}$  etäisyydellä koneesta.

$$L_1 = 10 \lg \left( \frac{I_1}{I_0} \right) \text{ dB} \quad \| : 10 \text{ dB}$$

$$\frac{L_1}{10 \text{ dB}} = \lg \left( \frac{I_1}{I_0} \right) \quad \| 10^{(\quad)}$$

$$10^{\lg \left( \frac{I_1}{I_0} \right)} = 10^{\frac{L_1}{10 \text{ dB}}}$$

$$\frac{I_1}{I_0} = 10^{\frac{L_1}{10 \text{ dB}}} \quad \| \cdot I_0$$

$$I_1 = I_0 \cdot 10^{\frac{L_1}{10 \text{ dB}}}$$

$$= 1,0 \cdot 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 10^{\frac{94 \text{ dB}}{10 \text{ dB}}} = 1,0 \cdot 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 10^{9,4} = 1,0 \cdot 10^{-2,6} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$= 2,511886 \cdot 10^{-3} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

Lasketaan koneen tuottaman äänen intensiteetti 80 dB tapauksessa

$$L_2 = 10 \lg \left( \frac{I_2}{I_0} \right) \text{ dB} \quad || : 10 \text{ dB}$$

$$\frac{L_2}{10 \text{ dB}} = \lg \left( \frac{I_2}{I_0} \right) \quad || 10^{(\quad)}$$

$$10^{\lg \left( \frac{I_2}{I_0} \right)} = 10^{\frac{L_2}{10 \text{ dB}}}$$

$$\frac{I_2}{I_0} = 10^{\frac{L_2}{10 \text{ dB}}} \quad || \cdot I_0$$

$$I_2 = I_0 \cdot 10^{\frac{L_2}{10 \text{ dB}}}$$

$$= 1,0 \cdot 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 10^{\frac{80 \text{ dB}}{10 \text{ dB}}} = 1,0 \cdot 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 10^{8,0} = 1,0 \cdot 10^{-4,0} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

Intensiteetti on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön. Tästä saadaan verranto

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}.$$

Etäisyys, jolla työskentely on vielä turvallista ilman kuulosuojaimia, on

$$r_2 = \sqrt{\frac{I_1}{I_2}} \cdot r_1 = \sqrt{\frac{2,511886 \cdot 10^{-3} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}{1,0 \cdot 10^{-4} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}} \cdot (1,2 \text{ m}) = 6,0142463 \text{ m} \approx 6,0 \text{ m}.$$

## Tehtävä 10.19.

- a) Syöpähoidoissa käytettävän ultraäänen intensiteetti on  $10 \text{ W/cm}^2 - 100 \text{ W/cm}^2$ .
- b) Syöpäsolujen tuhoutuminen ultraäänen vaikutuksesta perustuu ensisijaisesti ultraäänen mekaanisen energian absorboitumiseen kudokseen. Tämä nostaa kudoksen lämpötilaa. Kun lämpötila nousee vähintään  $57^\circ\text{C}$ :een, syöpäsolut kuolevat.
- c) Intensiteetti kuvaa, kuinka paljon energiaa siirtyy pinta-  
alan läpi sekunnissa.

$$I = \frac{P}{A} = \frac{4,0 \text{ W}}{0,5 \text{ cm} \cdot 0,5 \text{ cm}} = 16 \text{ W/cm}^2$$

d) Äänen intensiteetti pienenee kääntäen verrannollisesti etäisyyden neliöön eli  $I \sim \frac{1}{r^2}$ . Verrataan ultraäänen intensiteettejä etäisyyksillä 1,0 cm ja 3,0 cm.

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{(1,0 \text{ cm})^2}{(3,0 \text{ cm})^2} = \frac{1}{9} = 0,11$$

Ultraäänen intensiteetti pienenee 89 %, kun ultraääni etenee 1,0 cm:n etäisyydeltä 3,0 cm:n etäisyydelle.

Tämä ei tarkoita sitä, että energia olisi pienentynyt yhtä paljon. Intensiteettilain mukaan äänen energia jakautuu suuremmalle pinta-alalle, mutta äänen energia säilyy.

Ultraäänisignaalin energia pienenee, kun ääni absorboituu väliaineeseen ja muuntuu väliaineen sisäenergiaksi.

## Tehtävä 10.20.

etäisyys alussa  $r_1 = 1,2 \text{ m}$

äänen intensiteettitaso alussa  $L_1 = 62,4 \text{ dB}$

vertailuintensiteetti  $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$

a) Äänen intensiteetti etäisyydellä 1,2 m saadaan intensiteettitasosta

$$L_1 = 10 \lg \left( \frac{I_1}{I_0} \right) \text{ dB} \quad (1 \text{ p}) \quad \parallel : 10 \text{ dB}$$

$$\frac{L_1}{10 \text{ dB}} = \lg \left( \frac{I_1}{I_0} \right) \quad \parallel 10^{(\cdot)}$$

$$10^{\lg \left( \frac{I_1}{I_0} \right)} = 10^{\frac{L_1}{10 \text{ dB}}}$$

$$\frac{I_1}{I_0} = 10^{\frac{L_1}{10 \text{ dB}}} \quad \parallel \cdot I_0$$

$$I_1 = I_0 \cdot 10^{\frac{L_1}{10 \text{ dB}}}$$

$$= 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 10^{\frac{62,4 \text{ dB}}{10 \text{ dB}}} = 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 10^{6,24} = 1,0 \cdot 10^{-5,76} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$= 1,7378 \cdot 10^{-6} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \approx 1,74 \cdot 10^{-6} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

(yhtälöt 2 p, tulos 2 p, voi ratkaista solverilla)

b) etäisyys uudessa tilanteessa  $r_2 = 1,8 \text{ m}$

Äänen intensiteetti on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön (1 p)

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}. \quad (1 \text{ p})$$

Yhden auton intensiteetti  $1,8 \text{ m}$  etäisyydellä a-kohdan mukaan

$$I_2 = \frac{I_1 r_1^2}{r_2^2} = \frac{1,7378 \cdot 10^{-6} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot (1,2 \text{ m})^2}{(1,8 \text{ m})^2} = 7,723\,559 \cdot 10^{-7} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}. \quad (2 \text{ p})$$

Neljän auton intensiteetti  $1,8 \text{ m}$  etäisyydellä mittaaajasta  
 $I_3 = 4I_2$ . (1 p)

Neljän auton intensiteettitaso  $1,8 \text{ m}$  etäisyydellä mittaaajasta

$$L_3 = 10 \lg \left( \frac{I_3}{I_0} \right) \text{ dB} = 10 \lg \left( \frac{4I_2}{I_0} \right) \text{ dB} \quad (1 \text{ p})$$

$$L_3 = 10 \lg \left( \frac{4 \cdot 7,723\,559 \cdot 10^{-7} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}{1,0 \cdot 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}} \right) \text{ dB} = 64,898 \text{ dB} \approx 65 \text{ dB}.$$

(2 p)

c) Kun auton moottorin kierrostaajuutta kasvatetaan, auton lähettämän äänen taajuus suurenee. Korkeat äänet voimistuvat. Kun polttomoottorissa tapahtuu lisäksi enemmän palamisprosesseja sekunnissa, auton lähettämän äänen intensiteetti kasvaa.

(äänen taajuus kasvaa 1 p, äänen intensiteetti kasvaa 1 p ja perustelu ainakin toiseen 1 p)

# 11. Aalto rajapinnassa

## Tehtävä 11.1.

Oikeat vastaukset:

- a) B
- b) C
- c) B
- d) B
- e) A

## Tehtävä 11.2.

- a) Aallon nopeus ja aallonpituus voivat muuttua, mutta aallon taajuus ei muutu.
- b) Koska taajuus pysyy rajapinnan ylityksessä aina samana, aalto-opin perusyhtälön  $v = f\lambda$  mukaisesti aallonpituus kasvaa, jos aallon nopeus kasvaa. Aalto myös taittuu rajapinnassa eli sen kulkusuunta kääntyy pinnan normaalista poispäin.

### Tehtävä 11.3.

a) tulokulma  $\alpha = 33^\circ$

Heijastumislain mukaan tulokulma on yhtä suuri kuin heijastuskulma, joten heijastuskulma on  $\beta = \alpha = 33^\circ$ .

b) nopeus ensimmäisessä väliaineessa  $v_1 = 5\,100\text{ m/s}$

nopeus toisessa väliaineessa  $v_2 = 1\,500\text{ m/s}$

tulokulma  $\alpha_1 = 33^\circ$

Taiteutislain mukaan

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2},$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{v_2}{v_1} \sin \alpha_1.$$

Taitekulma on

$$\alpha_2 = \sin^{-1} \left( \frac{v_2}{v_1} \sin \alpha_1 \right) = \sin^{-1} \left( \frac{1500 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{5100 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \cdot \sin 33^\circ \right) = 9,217805^\circ \approx 9,2^\circ.$$

## Tehtävä 11.4.

Kokonaisheijastumisessa aaltoliike ei läpäise rajapintaa, vaan heijastuu kokonaisuudessaan. Kokonaisheijastuminen voi tapahtua, kun aalto saapuu aalto-opillisesti tiheämmästä aineesta aalto-opillisesti harvempaan aineeseen.

Kun aallon nopeus suurenee taittumisessa, taittumislain  $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}$  mukaan taitekulma  $\alpha_2$  on suurempi kuin

tulokulma  $\alpha_1$ . Tällöin aalto taittuu rajapinnan normaalista poispäin. Kun aallon tulokulma on riittävän suuri, taitekulma on  $90^\circ$  eli aalto taittuu kulkemaan rajapintaa pitkin. Tätä tulokulmaa kutsutaan kokonaisheijastumisen rajakulmaksi. Jos tulokulma on kokonaisheijastumisen rajakulmaa suurempi, tapahtuu kokonaisheijastuminen.

## Tehtävä 11.5.

- a) Koska aaltorintamat ovat lähempänä toisiaan aineessa 1 kuin aineessa 2, mekaanisen aallon aallonpituus on aineessa 2 suurempi kuin aineessa 1.
  
- b) Aallon taajuuden määrää aaltolähde, joten aallon taajuus on sama molemmissa aineissa.
  
- c) Aallon taajuus  $f$  ei riipu väliaineesta. Aaltoliikkeen perusyhtälö on  $v = f\lambda$ , jonka mukaan aallon nopeus  $v$  on suoraan verrannollinen aallonpituuteen  $\lambda$ . Koska aineessa 2 aallonpituus on suurempi, myös aallon nopeus on aineessa 2 suurempi.

## Tehtävä 11.6.

a) Ilmassa äänen nopeus lämpötilassa  $-20\text{ °C}$  on  $319\text{ m/s}$ ,  
lämpötilassa  $0\text{ °C}$  nopeus on  $331,4\text{ m/s}$  ja  
lämpötilassa  $+20\text{ °C}$  äänen nopeus on  $343\text{ m/s}$ .

b) lämpötila  $T_1 = 273,15\text{ K}$   
lämpötila  $T_2 = (273,15 + 20)\text{ K} = 293,15\text{ K}$   
lämpötilassa  $T_1$  äänen nopeus  $v_1 = 331,4\text{ m/s}$   
lämpötilassa  $T_2$  äänen nopeus  $v_2 = 343\text{ m/s}$

Jos nopeuksien suhde on yhtä suuri kuin lämpötilojen neliöjuurien suhde, nopeus on suoraan verrannollinen lämpötilan neliöjuureen eli  $v \sim \sqrt{T}$ .

Nopeuksien suhde on  $\frac{v_1}{v_2} = \frac{331,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{343 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 0,966180758 \approx 0,97$ .

Lämpötilojen neliöjuurien suhde on

$$\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} = \sqrt{\frac{273,15\text{ K}}{293,15\text{ K}}} = 0,9688126689 \approx 0,97.$$

Äänen nopeus on suoraan verrannollinen lämpötilan neliöjuureen.

## Tehtävä 11.7.

- a) Rajapintaan tulevan aallon nopeus ei vaikuta taittuneen aallon aallonpituuteen. Aallonpituuteen vaikuttaa aallon nopeus väliaineessa ja aallon taajuus.
- b) Tulevan aallon nopeus vaikuttaa taittuneen aallon taitekulmaan taittumislain mukaisesti. Taittumislain mukaan aallon nopeuksien suhde väliaineissa on sama kuin tulo- ja taittumiskulmien sinien suhde.

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2} = n_{12},$$

## **Tehtävä 11.8.**

- a) Kun jousen pää pääsee vapaasti liikkumaan, pulssi heijastuu samanlaisena takaisin eli sen muoto ja vaihe säilyvät.
  
- b) Kun jousen pää ei pääse liikkumaan, heijastuneen pulssin muoto ei muutu, mutta pulssin vaihe muuttuu vastakkaiseksi.

## Tehtävä 11.9.

aallon nopeus aineessa 1  $v_1 = 61 \text{ m/s}$

aallon nopeus aineessa 2  $v_2 = 42 \text{ m/s}$

aallon tulokulma  $\alpha_1 = 18^\circ$

a) Aalto noudattaa taittumislakia, kun se kohtaa aineiden rajapinnan eli

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = n_{12}.$$

Koska aallon nopeus pienenee, pitää myös arvon  $\sin \alpha_2$  pienentyä. Kulman sinin arvo pienenee, kun kulman suuruus pienenee, joten aalto taittuu pinnan normaaliin päin.

b) Aalto noudattaa taittumislakia, kun se kohtaa aineiden rajapinnan eli

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = n_{12}.$$

Taittumislaista saadaan ratkaistua taitekulma.

$$\sin \alpha_2 = \frac{v_2 \sin \alpha_1}{v_1}$$
$$\alpha_2 = \sin^{-1} \left( \frac{v_2 \sin \alpha_1}{v_1} \right) = \sin^{-1} \left( \frac{42 \text{ m/s} \cdot \sin 18^\circ}{61 \text{ m/s}} \right) = 12,284^\circ \approx 12^\circ$$

c) Rajapinnan taitesuhde saadaan aaltoliikkeen perusyhtälöstä.

$$n_{12} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{61 \text{ m/s}}{42 \text{ m/s}} = 1,452 \approx 1,4$$

Taitesuhde kuvaa, kuinka suuri on aallonpituuksien suhde ja aallon nopeuksien suhde rajapintojen aineiden välillä eli kuinka moninkertaiseksi aallonpituus tai aallon nopeus muuttuu, kun aalto kulkee rajapinnan yli.

## Tehtävä 11.10.

P-aallon nopeus aineessa 1  $v_1 = 7\,900\text{ m/s}$

P-aallon nopeus aineessa 2  $v_2 = 7\,200\text{ m/s}$

aallon tulokulma  $\alpha_1 = 35^\circ$

a) Tarkastellaan aaltojen taittumista taittumislaililla.

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$$

Kun aalto on ylittänyt rajapinnan, rajapinnan normaalin ja aallon etenemissuunnan välinen kulma on

$$\sin\alpha_2 = \frac{v_2 \sin\alpha_1}{v_1}$$
$$\alpha_2 = \sin^{-1}\left(\frac{v_2 \sin\alpha_1}{v_1}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{7\,200\text{ m/s} \cdot \sin 35^\circ}{7\,900\text{ m/s}}\right) = 31,517^\circ \approx 32^\circ.$$

b) Koska aallon nopeus pienenee, niin aalto taittuu kohti rajapinnan normaalia. Tällöin aallolle ei voi tapahtua kokonaisheijastumista.

## Tehtävä 11.11.

aallon nopeus ilmassa  $v_1 = 343 \text{ m/s}$

aallon tulokulma  $\alpha_1 = 25^\circ$

Äänen nopeus  $20^\circ\text{C}$  vedessä on taulukkokirjan mukaan  $v_2 = 1484 \text{ m/s}$ . Vedessä äänen nopeus on suurempi kuin ilmassa eli ääni voi kokonaisheijastua ilman ja veden rajapinnassa.

Lasketaan, kuinka suuri on kokonaisheijastumisen rajakulma. Kokonaisheijastumisen rajakulma on se tulokulma, jossa taitekulma olisi  $\alpha_2 = 90^\circ$ . Tällä tulokulmalla aalto taittuu kulkemaan rajapintaa pitkin. Taittumislaista saadaan kokonaisheijastumisen rajakulmaksi

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin \alpha_r}{\sin \alpha_2}$$
$$\sin \alpha_r = \frac{v_1 \sin \alpha_2}{v_2}$$
$$\alpha_r = \sin^{-1} \left( \frac{v_1 \sin \alpha_2}{v_2} \right) = \sin^{-1} \left( \frac{343 \text{ m/s} \cdot \sin 90^\circ}{1484 \text{ m/s}} \right) = 13,363^\circ.$$

Koska ääniaalto osuu veden pintaan kokonaisheijastumisen rajakulmaa suuremmassa kulmassa, ääniaalto kokonaisheijastuu ja heijastuneen aallon kulma on sama kuin tulokulma.

## Tehtävä 11.12.

aallonpituus syvänteessä  $\lambda_1 = 1,20 \text{ m}$

aallonpituus matalikolla  $\lambda_2 = 1,08 \text{ m}$

a) taitekulma  $\alpha_2 = 42^\circ$

Kun aalto ylittää rajapinnan, aalto noudattaa taantumislakia

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2} = n_{12}.$$

Rajapinnan ylityksessä aallon taajuus ei muutu mutta aallonpituus muuttuu. Tällöin aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan  $v = f\lambda$  saadaan taantumislaille

$$\begin{aligned}\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} &= \frac{v_1}{v_2} \\ \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} &= \frac{f\lambda_1}{f\lambda_2} \\ \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} &= \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.\end{aligned}$$

Aallon tulokulmaksi saadaan

$$\begin{aligned}\sin \alpha_1 &= \frac{\lambda_1 \sin \alpha_2}{\lambda_2} \\ \alpha_1 &= \sin^{-1} \left( \frac{\lambda_1 \sin \alpha_2}{\lambda_2} \right) = \sin^{-1} \left( \frac{1,20 \text{ m} \cdot \sin 42^\circ}{1,08 \text{ m}} \right) = 48,028\,575^\circ \approx 48^\circ.\end{aligned}$$

b) Syvänteen ja matalikon välinen taitesuhde saadaan taittumislain ja aaltoliikkeen perusyhtälön avulla

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\cancel{f} \lambda_1}{\cancel{f} \lambda_2} = n_{12}$$

$$n_{12} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1,20 \text{ m}}{1,08 \text{ m}} = 1,1111 \approx 1,11.$$

## Tehtävä 11.13.

ääniaallon tulokulma  $\alpha_1 = 8,3^\circ$

Taulukkokirjan mukaan äänen nopeus

betonissa on  $v_1 = 4\,300\text{ m/s}$  ja raudassa  $v_2 = 5\,100\text{ m/s}$ .

Koska äänen nopeus kasvaa, aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan myös äänen aallonpituus pitenee, sillä äänen taajuus ei muutu. Aallon nopeus kasvaa, joten aalto taittuu normaalista poispäin. Osa ääniaallosta heijastuu rajapinnassa ja noudattaa heijastumislakia.

Lasketaan ääniaallon taitekulma taittumislain mukaan

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$$
$$\sin\alpha_2 = \frac{v_2 \sin\alpha_1}{v_1}$$
$$\alpha_2 = \sin^{-1}\left(\frac{v_2 \sin\alpha_1}{v_1}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{5100\text{ m/s} \cdot \sin 8,3^\circ}{4300\text{ m/s}}\right) = 9,858^\circ \approx 9,8^\circ.$$

b) Ääniaallon kulkusuunnan muutos on

$$\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = 9,858^\circ - 8,3^\circ = 1,558^\circ \approx 1,6^\circ.$$

c) Betonin ja raudan rajapinnassa taitesuhde on

$$n_{12} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{\sin 8,4^\circ}{\sin 9,858^\circ} = 0,85325 \approx 0,85.$$

## Tehtävä 11.15.

a) Taulukoidaan tulokulman ja taitekulman arvoja.

Esimerkiksi

| Tulokulma | Taitekulma |
|-----------|------------|
| 2,5°      | 10,3°      |
| 4,1°      | 17,3°      |
| 6,5°      | 28,0°      |
| 9,0°      | 40,8°      |
| 11,8°     | 58,4°      |

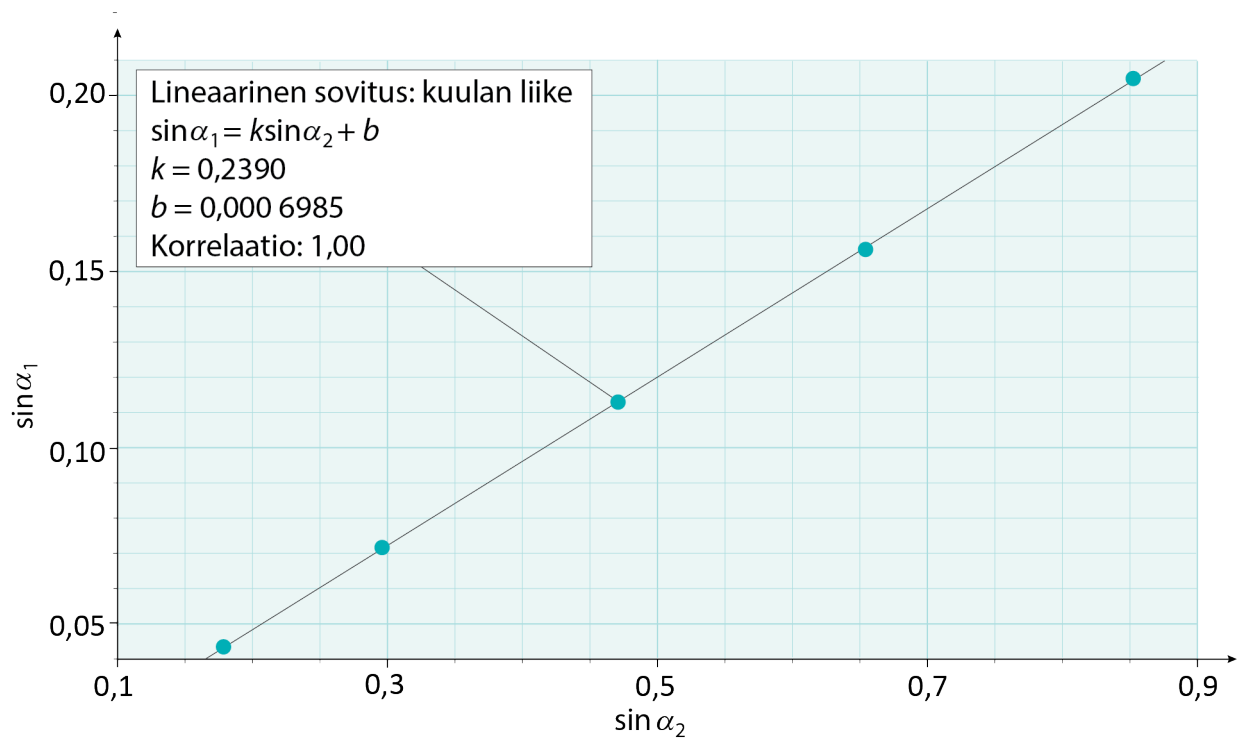
Yli 14 asteen kulmalla tapahtuu kokonaisheijastuminen, jolloin mekaaninen aalto ei etene ilmasta veteen.

b) Taittumislain mukaan

taitesuhde on  $n_{12} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}$ , josta tulo- ja taitekulman välille

saadaan yhtälö  $\sin \alpha_1 = n_{12} \sin \alpha_2$ . Taitesuhde voidaan määrittää  $(\sin \alpha_1, \sin \alpha_2)$ -koordinaatistoon sovitetun suoran fysikaalisena kulmakertoimena.

Lasketaan uudet sarakkeet kulkien sinin arvoille ja esitetään tulokset  $(\sin \alpha_1, \sin \alpha_2)$ -koordinaatistossa.



Taitesuhteeksi saadaan  $n_{12} = 0,2390 \approx 0,24$ .

## Tehtävä 11.16.

- a) Kun kivi pudotettiin veteen, kuultiin ääni. Kun kivi osui veteen, osumakohdan ympärille syntyi ympyräaaltoja. Kun aallot etenivät kohti astian reunoja, ympyräaaltojen säteet kasvoivat. Kun aallot osuvat astian reunoihin, aallot heijastuvat.
- b) Kun kivi osuu veteen, ilmaan syntyy paineaalto. Paineaalto etenee ilmassa ja se kuullaan loiskahduksena. Veden pintaan kivi aiheuttaa häiriön. Huygensin periaatteen mukaan jokainen aaltorintaman piste toimii uuden alkeisaallon lähteenä. Alkeisaaltojen interferenssiaallot muodostavat säteittäin etenevän ympyräaallon ja siksi ympyräaallon säde kasvaa. Kun aalto osuu veden ja astian rajapintaan, aalto heijastuu ja noudattaa heijastuslakia.

## Tehtävä 11.17.

- a) Videon perusteella aallonpituus pieneni, kun taajuus kasvoi.
- b) Määritetään videon perusteella aaltojen aallonpituudet eri taajuuksilla. Aallonpituudet määritellään aaltojen keskiarvoista. Lasketaan aaltoliikkeen perusyhtälön  $v = f\lambda$  mukaan aallon nopeudet

| Aallonpituus<br>(cm) | Taajuus<br>(Hz) | Nopeus<br>(m/s) |
|----------------------|-----------------|-----------------|
| 1,63                 | 11,7            | 19,1            |
| 1,50                 | 12,8            | 19,2            |
| 1,40                 | 13,7            | 19,2            |
| 1,28                 | 14,4            | 18,4            |
| 1,25                 | 15,1            | 18,9            |
| 1,13                 | 16,3            | 18,4            |

- c) Aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan aallon nopeus väliaineessa on  $v = f\lambda$ . b)-kohdan taulukosta nähdään, että pidemmillä aallonpituuksilla nopeudet olivat likimain samat eli pinta-aallon noudattivat aaltoliikkeen perusyhtälöä. Suuremmilla taajuuksilla aallonpituuksien määrittäminen oli videolta vaikeaa ja siinä syntyi helposti mittausvirhettä, mikä näkyy tuloksissa.

## Tehtävä 11.18.

- a) viileän ilmakerroksen lämpötila  $T_1 = 20\text{ °C} = 293,15\text{ K}$   
lämpimän ilmakerroksen lämpötila  $T_2 = 22\text{ °C} = 295,15\text{ K}$

Äänen nopeus taulukkokirjan mukaan  
20 °C lämpötilassa on 343 m/s. Lasketaan äänen nopeus  
22 °C lämpötilassa.

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$
$$v_2 = \frac{v_1}{\sqrt{\frac{T_1}{T_2}}} = \frac{343\text{ m/s}}{\sqrt{\frac{293,15\text{ K}}{295,15\text{ K}}}} = 344,168\text{ m/s.}$$

Äänen nopeus on ylemmässä kerroksessa suurempi kuin alemmassa. Näin ollen äänen on tultava alemmasta kerroksesta ylemmän kerroksen rajapintaan, jotta kokonaisheijastuminen voi tapahtua.

Lasketaan kokonaisheijastumisen rajakulma.

Kokonaisheijastumisen rajakulma on se tulokulma, jossa taitekulma olisi  $\alpha_2 = 90^\circ$ . Tällöin aalto taittuu kulkemaan rajapintaa pitkin.

Taittumislaista saadaan kokonaisheijastumisen rajakulmaksi

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin \alpha_r}{\sin \alpha_2}$$
$$\sin \alpha_r = \frac{v_1 \sin \alpha_2}{v_2}$$
$$\alpha_r = \sin^{-1} \left( \frac{v_1 \sin \alpha_2}{v_2} \right) = \sin^{-1} \left( \frac{343 \text{ m/s} \cdot \sin 90^\circ}{344,168 \text{ m/s}} \right) = 85,278^\circ \approx 85,3^\circ.$$

- b) Äänen kokonaisheijastuminen voi tapahtua sekä kahden ilmakerroksen rajapinnassa että ilman ja veden rajapinnassa. Siksi ääni kuuluu hyvin vastarannalle. Kokonaisheijastumisessa ääni ei läpäise rajapintaa vaan heijastuu täydellisesti.

## Tehtävä 11.19.

aaltojen taajuus  $f = 7,1 \text{ Hz}$

vesiaaltojen aallonpituus ennen estettä  $\lambda_1 = 3,2 \text{ cm}$

vesiaaltojen aallonpituus esteen jälkeen  $\lambda_2 = 2,6 \text{ cm}$

aallon etenemissuunnan ja esteen välinen kulma  $\alpha = 30^\circ$

- a) Aallon nopeus ennen estettä saadaan aaltoliikkeen perusyhtälöstä

$$v_1 = f\lambda_1 = 7,1 \text{ Hz} \cdot 3,2 \text{ cm} = 22,72 \text{ cm/s} \approx 23 \text{ cm/s}.$$

- b) Kun aalto siirtyy aineesta toiseen, aallon taajuus ei muutu, sillä aaltolähde määrää taajuuden. Vesiaallon taajuus esteen päällä on  $7,1 \text{ Hz}$ . Aallon nopeus esteen päällä saadaan aaltoliikkeen perusyhtälöstä

$$v_2 = f\lambda_2 = 7,1 \text{ Hz} \cdot 2,6 \text{ cm} = 18,46 \text{ cm/s} \approx 18 \text{ cm/s}.$$

- c) Aalto taittuu, kun aalto siirtyy esteen päälle. Aalto noudattaa aaltoliikkeen perusyhtälöä sekä taittumislakia.

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}$$
$$\frac{\cancel{f} \lambda_1}{\cancel{f} \lambda_2} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}$$
$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}.$$

Aallon tulokulma saadaan esteen pinnan normaalin ja aallon tulosuunnan välisestä kulmasta, jolloin tulokulma on  $\alpha_1 = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ . Taitekulmaksi saadaan

$$\sin \alpha_2 = \frac{\lambda_2 \sin \alpha_1}{\lambda_1}$$
$$\alpha_2 = \sin^{-1} \left( \frac{\lambda_2 \sin \alpha_1}{\lambda_1} \right) = \sin^{-1} \left( \frac{2,6 \text{ cm} \cdot \sin 60^\circ}{3,2 \text{ cm}} \right) = 44,72^\circ \approx 45^\circ.$$

## Tehtävä 11.20.

P-aaltojen etenemisnopeus  $v_P = 8,0 \text{ km/s}$

P-aaltojen taajuus  $f_P = 2 \text{ Hz}$

S-aaltojen etenemisnopeus  $v_S = 4,8 \text{ km/s}$

S-aaltojen taajuus  $f_S = 10 \text{ Hz}$

havaittu aikaero P- ja S-aaltojen välillä  $\Delta t = t_S - t_P = 30 \text{ s}$

- a) Maanjäristysaaltojen liike on tasaista. P-aalto ja S-aalto etenevät järjestyskeskuksesta havaitsijaan saman matkan

$s = v_P t_P = v_S t_S$ . Jotta matka  $s$  pystytään ratkaisemaan, pitää ensin ratkaista aika  $t_P$  tai  $t_S$

$$v_P t_P = v_S t_S$$

$$v_P t_P = v_S t_S$$

$$t_P = \frac{v_S t_S}{v_P}.$$

Sijoitetaan  $t_p$  havaittuun aikaeroon

$$t_s - t_p = \Delta t$$

$$t_s - \frac{v_s t_s}{v_p} = \Delta t$$

$$t_s \left( 1 - \frac{v_s}{v_p} \right) = \Delta t$$

$$t_s = \frac{\Delta t}{\left( 1 - \frac{v_s}{v_p} \right)}$$

$$t_s = \frac{30 \text{ s}}{\left( 1 - \frac{4,8 \frac{\text{km}}{\text{s}}}{8,0 \frac{\text{km}}{\text{s}}} \right)} = 75 \text{ s.}$$

Etäisyys  $s$  on

$$s = v_s t_s = 4,8 \frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot 75 \text{ s} = 360 \text{ km.}$$

b) Aaltoliikkeen perusyhtälöstä  $v = f\lambda$  saadaan aallonpituudet P- ja S-aallolle

$$\lambda_p = \frac{v_p}{f_p} = \frac{8,0 \frac{\text{km}}{\text{s}}}{2 \text{ Hz}} = \frac{8,0 \frac{\text{km}}{\text{s}}}{2 \frac{1}{\text{s}}} = 4 \text{ km}$$

$$\lambda_s = \frac{v_s}{f_s} = \frac{4,8 \frac{\text{km}}{\text{s}}}{10 \text{ Hz}} = \frac{4,8 \frac{\text{km}}{\text{s}}}{10 \frac{1}{\text{s}}} = 0,48 \text{ km} \approx 0,5 \text{ km.}$$

c) P-aaltoja voidaan kuvata pitkittäisellä aaltoliikkeellä ja S-aaltoja poikittaisella aaltoliikkeellä. Seismiset aallot etenevät eri aineissa ja kerroksissa eri nopeuksilla. Ne taittuvat ja heijastuvat aineiden ja eri tiheyksisten kerrosten rajapinnoista. Eri havaintopisteisiin tulleet järjestysaallot ovat kulkeneet maapallon kerrosten läpi eri reittejä. Yhdistämällä eri havaintopisteiden seismografien mittaustulokset, saadaan tietoa maapallon sisäosien kerrosten rakenteesta ja kerrosten rajapintojen sijainnista.

S-aaltoja ei esiinny nesteessä, joten niiden puuttuminen tietyillä maanpinnan vyöhykkeillä suhteessa havaittuihin järjestyskeskuksiin osoittaa, että maapallon ytimessä on nestemäinen osa. S-aallot eivät esimerkiksi etene maapallon läpi suoraan sen puolelta toiselle.

## Tehtävä 11.21.

a) Aineen akustiseen impedanssiin vaikuttavat väliaineen tiheys ja se, kuinka suurella nopeudella mekaaninen aaltoliike väliaineessa etenee.

b) graniitin akustinen impedanssi  $Z_1 = 11 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}}$

maaperän akustinen impedanssi  $Z_2 = 0,15 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}}$

Heijastuskerroin graniitin ja maaperän rajapinnassa on

$$R = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{0,15 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}} - 11 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}}}{0,15 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}} + 11 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}}} \\ = -0,97309 \approx -0,97.$$

c) a-kohdan tuloksesta voidaan päätellä, että heijastuneen ja alkuperäisen aallon amplitudien suhde on

$$\frac{A_{\text{heijastunut}}}{A_{\text{tuleva}}} \approx 0,97.$$

d) Koska heijastuskerroin on negatiivinen, heijastuneessa aallossa tapahtuu puolen aallonpituuden vaihesiirto.

## Tehtävä 11.22.

aallon nopeus aineessa 1  $v_1 = 8,7 \text{ m/s}$

aallon nopeus aineessa 2  $v_2 = 19,2 \text{ m/s}$

aaltorintaman etenemissuunnan tulokulma pinnan normaaliin nähden  $\alpha = 16^\circ$

- a) Aallon taajuuden määrää aaltolähde, jolloin aallon taajuus ei muutu, kun aalto siirtyy aineesta toiseen rajapinnan yli. (1 p)

Aallon nopeus riippuu väliaineesta. Aallon nopeus muuttuu, kun siirrytään aineesta toiseen. (1 p)

Aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan  $v = f\lambda$  havaitaan, että kun aallon nopeus muuttuu ja taajuus pysyy samana, aallonpituus muuttuu. (1 p)

- b) Kuvan mukainen aaltorintaman ja rajapinnan välinen kulma on yhtä suuri kuin aallon nopeuden ja rajapinnan normaalin välinen kulma eli aallon tulokulma. (1 p)  
Taiteutislain mukaan

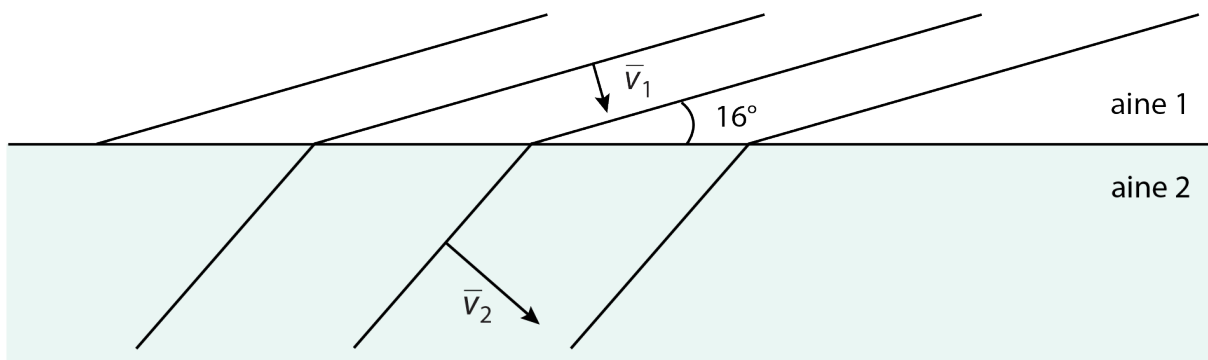
$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}.$$

Aallon taitekulma aineessa 2 on

$$\sin \alpha_2 = \frac{v_2 \sin \alpha_1}{v_1}$$
$$\alpha_2 = \sin^{-1} \left( \frac{v_2 \sin \alpha_1}{v_1} \right) = \sin^{-1} \left( \frac{19,2 \text{ m/s} \cdot \sin 16^\circ}{8,7 \text{ m/s}} \right) = 37,4669^\circ \approx 37^\circ.$$

(2 p)

- c) Aallon nopeus kasvaa, joten myös aallonpituus kasvaa, koska taajuus pysyy samana. b-kohdan mukaan aalto taittuu normaalista poispäin. (2 p)



- d) Kokonaisheijastuminen voi tapahtua, jos aalto tulee aineesta, jossa aallolla on pienempi nopeus. (2 p)

Kokonaisheijastumisen rajakulmalla taittunut aalto etenee rajapintaa pitkin, jolloin taitekulma on  $90^\circ$ . (1 p)

Ratkaistaan taittumislaista kokonaisheijastumisen rajakulma.

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin \alpha_r}{\sin 90^\circ}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin \alpha_r}{1}$$

$$\alpha_r = \sin^{-1} \left( \frac{v_1}{v_2} \right) = \sin^{-1} \left( \frac{8,7 \text{ m/s}}{19,2 \text{ m/s}} \right) = 26,944^\circ \approx 27^\circ$$

(3 p)

# 12. Seisova aaltoliike

## Tehtävä 12.1.

Oikeat vastaukset:

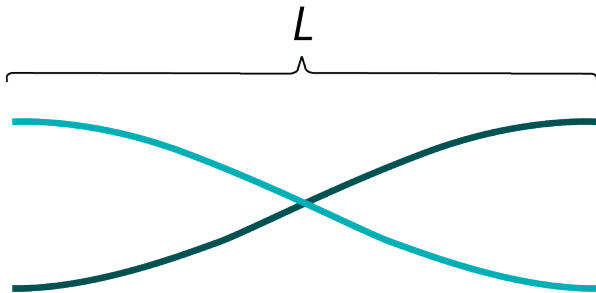
- a) B
- b) C
- c) C
- d) B
- e) A

## Tehtävä 12.2.

- a) Solmut ovat seisovan aallon paikallaan pysyviä kohtia.  
Kuvut ovat aallon kohtia, joissa amplitudi on suurin.
- b) Solmuja on viisi ja kupuja neljä.

## Tehtävä12.3.

a) Tilanteessa syntyvä seisova aalto.

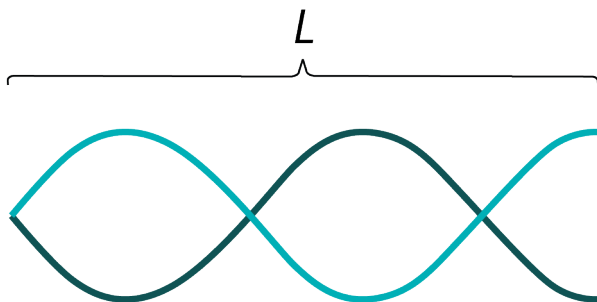


Syntyy kaksi puolikasta kupua ja yksi solmu.

Putken pituudelle  $L$  ja syntyneen seisovan aallon aallonpituudelle  $\lambda$  on voimassa  $L = 1/2 \cdot \lambda$ .

Seisovan aallon aallonpituus on  $\lambda = 2L$ .

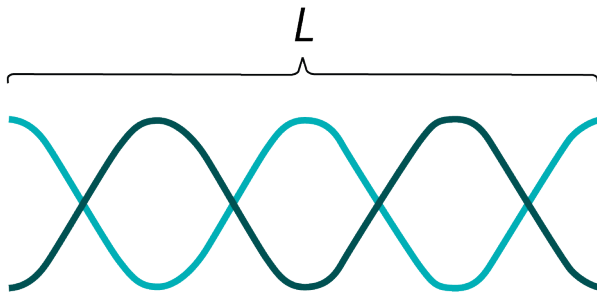
b) Mallinnetaan seisovaa aaltoa kuvuilla ja solmuilla.



Syntyy kaksi kokonaista ja yksi puolikas kupu sekä kolme solmua. Putken pituudelle  $L$  ja syntyneen seisovan aallon aallonpituudelle  $\lambda$  on voimassa  $L = 5/4 \cdot \lambda$ .

Seisovan aallon aallonpituus on  $\lambda = 4/5L$ .

c) Mallinnetaan seisovaa aaltoa kuvuilla ja solmuilla.



Syntyy kolme kokonaista kupua ja kaksi puolikasta kupua ja neljä solmua. Putken pituudelle  $L$  ja syntyneen seisovan aallon aallonpituudelle  $\lambda$  on voimassa  $L = 2\lambda$ .

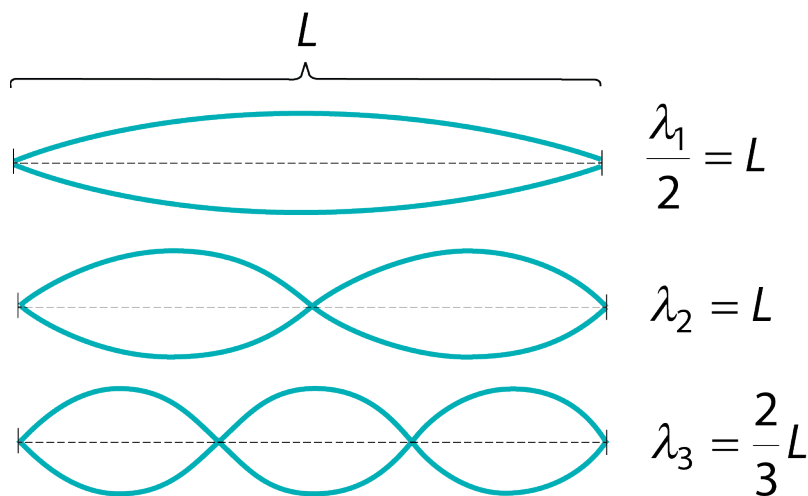
Seisovan aallon aallonpituus on  $\lambda = 1/2L$ .

## Tehtävä 12.4.

värähtelevän kielen pituus  $L = 69 \text{ cm}$

perustaajuus  $f = 65,4 \text{ Hz}$

- a) Kieleen syntyvät seisovat aaltoliikkeet perustaajuudelle ja kahdelle ylätaajuudelle.



Päistään kiinnitettyyn kieleen muodostuvan seisovan aallon aallonpituus on perustaajuudella kaksi kertaa kielen pituus.

Seisovan aallon aallonpituus  $\lambda_1 = 2L = 2 \cdot 0,69 \text{ m} = 1,38 \text{ m} \approx 1,4 \text{ m}$ .

- b) Aallon nopeus kielessä on vakio kaikille seisoville aalloille.

Ensimmäisellä ylätaajuudella aallonpituus  $\lambda_2 = L = 0,69 \text{ m}$ , joten aaltoliikkeen perusyhtälöstä saadaan taajuudeksi

$$v = f_2 \lambda_2$$

$$f_1 \lambda_1 = f_2 \lambda_2$$

$$f_2 = \frac{f_1 \lambda_1}{\lambda_2} = \frac{f_1 2L}{L} = 2f_1 = 2 \cdot 65,4 \text{ Hz} = 130,8 \text{ Hz} \approx 131 \text{ Hz}.$$

Toisella ylätaajuudella aallonpituus

$$\lambda_3 = \frac{2}{3}L = \frac{2}{3} \cdot 0,69 \text{ m} = 0,46 \text{ m}, \text{ joten aaltoliikkeen}$$

perusyhtälöstä saadaan taajuudeksi

$$v = f_3 \lambda_3$$

$$f_1 \lambda_1 = f_3 \lambda_3$$

$$f_3 = \frac{f_1 \lambda_1}{\lambda_3} = \frac{f_1 2L}{\frac{2}{3}L} = 3f_1 = 3 \cdot 65,4 \text{ Hz} = 196,2 \text{ Hz} \approx 196 \text{ Hz}.$$

- c) Aallon etenemisnopeus kielessä saadaan aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan

$$v = f_1 \lambda_1$$

$$= f_1 \lambda_1 = 65,4 \text{ Hz} \cdot 2 \cdot 0,69 \text{ m}$$

$$= 90,252 \text{ m/s} \approx 90 \text{ m/s}.$$

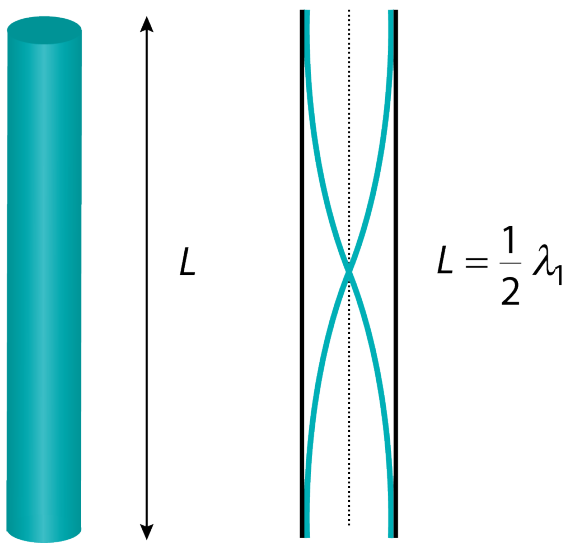
## Tehtävä 12.5.

urkupillin pituus  $L = 8,0 \cdot 0,3048 \text{ m}$

äänen nopeus ilmassa  $v = 343 \text{ m/s}$

Urkupillin ilmapatsaaseen syntyy seisova aalto, jossa on kaksi kupua ja yksi solmu.

Syntyneen äänen aallonpituus on



$$L = \frac{\lambda}{2}$$

$$\lambda = 2L.$$

Aaltoliikkeen perusyhtälöstä saadaan syntyneen äänen taajuus

$$v = f\lambda$$

$$v = f2L$$

$$f = \frac{v}{2L} = \frac{343 \text{ m/s}}{2 \cdot 8,0 \cdot 0,3048 \text{ m}} = 70,333 \text{ Hz} \approx 70 \text{ Hz}.$$

## Tehtävä 12.6.

- a) Värähtelevä kielen pää on kiinteästi kiinnitetty eikä pääse liikkumaan. Siksi kiinteästi kiinnitetyn kielen päihin syntyy seisovan aaltoliikkeen solmu.
  
- b) Seisovan aallon kupu voi syntyä jouseen tai kieleen, missä pää pääsee vapaasti värähtelemään. Myös putkessa värähtelevään ilmapatsaaseen muodostuu kupu, jos putken pää on avoin.

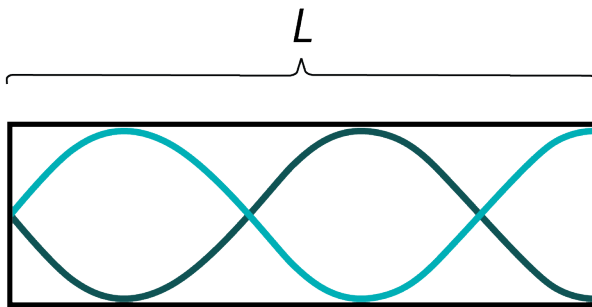
## Tehtävä 12.7.

a) putken pituus  $L = 0,47 \text{ m}$

äänen nopeus  $v = 343 \text{ m/s}$

Toisesta päästä avoimeen putkeen syntyy ääni, jonka seisovan aallon toinen ylätaajuus.

Piirretään tilanteesta kuva.



Putken pituus  $L = \frac{5\lambda}{4}$  ja aallonpituus on  $\lambda = \frac{4L}{5}$ .

Aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan putkeen syntyneen seisovan aallon taajuus on

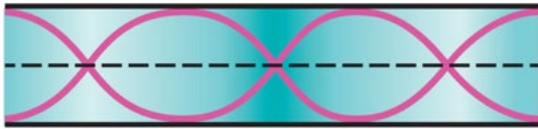
$$v = f\lambda$$

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{\frac{4L}{5}} = \frac{5v}{4L} = \frac{5 \cdot 343 \text{ m/s}}{4 \cdot 0,47 \text{ m}} = 912,23 \text{ Hz} \approx 910 \text{ Hz}.$$

b) putken pituus  $L = 0,47 \text{ m}$

äänen nopeus  $v = 343 \text{ m/s}$

Piirretään tilanteesta kuva.



Putken pituus  $L = \frac{3\lambda}{2}$  ja aallonpituus on  $\lambda = \frac{2L}{3}$ .

Aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan syntyneen aaltoliikkeen taajuus on

$$v = f\lambda$$

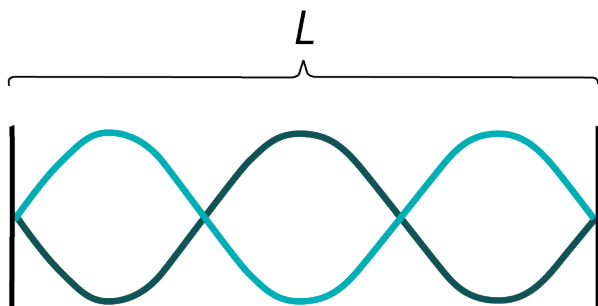
$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{\frac{2L}{3}} = \frac{343 \text{ m/s}}{\frac{2}{3} \cdot 0,47 \text{ m}} = 1\,094,68 \text{ Hz} \approx 1\,100 \text{ Hz}.$$

## Tehtävä 12.8.

kuminauhan pituus  $L = 158 \text{ cm}$

taajuus  $f = 19 \text{ Hz}$

- a) Kuminauhaan syntyvän värähtelyn taajuus on 2. ylätaajuus,  $f_3 = f = 19 \text{ Hz}$ .



- b) Kuminauhaan syntyy kolme kupua, jolloin kuminauhan pituudelle ja syntyneen seisovan aallon aallonpituudelle on voimassa

$$L = \frac{3\lambda_3}{2}.$$

Syntyneen aallon aallonpituus on  $\lambda_3 = \frac{2L}{3}$ .

Aallon nopeus kuminauhassa saadaan aaltoliikkeen perusyhtälöstä

$$v = f_3 \lambda_3$$

$$v = f_3 \frac{2L}{3} = \frac{2}{3} f_3 L = \frac{2}{3} \cdot 19 \text{ Hz} \cdot 1,58 \text{ m} = 20,0133 \text{ m/s} \approx 20 \text{ m/s}.$$

c) Seisovan aallon perustaajuudella kuminauhaan syntyy vain yksi kupu. Aallon nopeus ei muutu tilanteessa, joten nopeus on edellisen kohdan perusteella  $v = \frac{2}{3} f_3 L$ .

Perustaajuuden tilanteessa  $L = \frac{\lambda_1}{2}$  eli  $\lambda_1 = 2L$ .

Aaltoliikkeen perusyhtälöstä saadaan

$$v = f_1 \lambda$$

$$\frac{2}{3} f_3 \lambda = f_1 \lambda$$

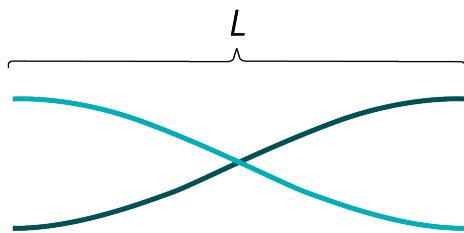
$$f_1 = \frac{f_3}{3} = \frac{19 \text{ Hz}}{3} = 6,333 \text{ Hz} \approx 6,3 \text{ Hz}.$$

## Tehtävä 12.9.

tangon pituus  $L = 164,2 \text{ cm}$

syntyneen äänen taajuus  $f = 1\,533 \text{ Hz}$

- a) Kun alumiinitankoa hangataan paperilla, tanko alkaa värähdellä perustaajuudellaan. Värähtelevä tanko saa ympärillä olevan ilman värähtelemään samalla taajuudella. Ilmassa värähtely etenee ääniaaltoina. Havaitsijan korvassa tärykalvo värähtelee ja korvan kuuloelimien kautta signaalista muodostuu aivoissa kuuloaistimus.
- b) Tarkastellaan tankoon syntyvää perustaajuutta. Tanko on molemmista päistään vapaa värähtelijä. Tankoon syntyy seisova aalto, jossa on kaksi kupua ja yksi solmu.



Aallonpituudeksi saadaan

$$L = \frac{\lambda}{2}$$

$$\lambda = 2L.$$

Aaltoliikkeen perusyhtälöstä saadaan aallon nopeudeksi alumiinitangossa

$$v = f\lambda$$

$$v = f2L$$

$$= 1\,533 \text{ Hz} \cdot 2 \cdot 1,642 \text{ m}$$

$$= 5\,034,372 \text{ m/s} \approx 5\,034 \text{ m/s}.$$

## Tehtävä 12.10.

värähtelijän taajuus  $f = 52 \text{ Hz}$

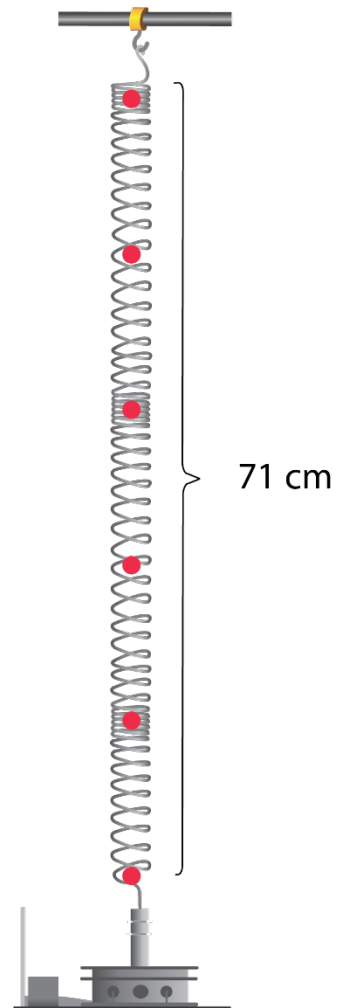
toisistaan kauimpana olevien kohtien etäisyys  $L = 0,71 \text{ cm}$

- a) Värähtelijä synnyttää jouseen pitkittäisen aaltoliikkeen, joka heijastuu statiivin päästä. Tietyillä taajuuksilla jouseen syntyy seisova aalto. Seisovassa aallossa tuleva ja heijastunut aalto interferoivat. Syntyy kohtia, joissa kohtaavat aallot heikentävät toisiaan niin, että värähtelijät pysyvät paikoillaan.

b) Jouseen syntyy kuusi solmua.

Koska jousi on molemmista päistä kiinnitetty, on jousen molemmissa päissä solmut ja näiden välissä viisi kupua.

Kuvaan punaisella merkityt pisteet ovat kohtia, jotka näyttävät olevan paikoillaan. Kahden punaisen pisteen välinen etäisyys on aallonpituuden puolikas.



Jousen pituuden ja syntyneen aallon aallonpituuden välille on voimassa  $L = \frac{5\lambda}{2}$ .

Syntyneen aallon aallonpituudeksi saadaan  $\lambda = \frac{2}{5}L$ .

Aallon nopeus jousessa aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan on

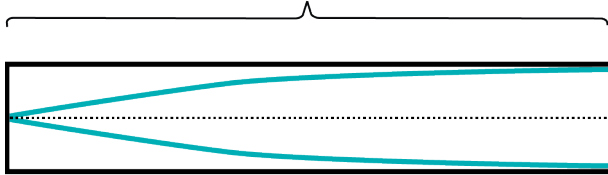
$$v = f\lambda$$

$$v = f \frac{2}{5}L = \frac{2}{5}fL = \frac{2}{5} \cdot 52 \text{ Hz} \cdot 0,71 \text{ m} = 14,768 \text{ m/s} \approx 15 \text{ m/s}.$$

## Tehtävä 12.11.

a)

$$L = \frac{1}{4} \lambda_1$$



värähtelyn taajuus  $f = 440 \text{ Hz}$

äänen nopeus  $v = 343 \text{ m/s}$

Jos kaikukopan toinen pää on suljettu, perustaajuuden aallonpituus on 4 kertaa kaikukopan pituus. Ratkaistaan kaikukopan pituus aaltoliikkeen perusyhtälöstä.

$$v = f\lambda = f4L$$

$$L = \frac{v}{4f} = \frac{343 \text{ m/s}}{4 \cdot 440 \text{ Hz}} = 0,194886 \text{ m} \approx 19,5 \text{ cm}.$$

Jos kaikukoppa on molemmista päistä auki, kaikukopan pituus on puolet aallonpituudesta.

$$v = f\lambda = f2L$$

$$L = \frac{v}{2f} = \frac{343 \text{ m/s}}{2 \cdot 440 \text{ Hz}} = 0,389773 \text{ m} \approx 39,0 \text{ cm}.$$

b) Jotta kaikukopan sisälle ilmaan saadaan synnytettyä ääniraudan taajuudella seisova aalto, on toisesta päästä suljettu kaikukoppa lyhyempi, kuin molemmista päistä suljettu tai molemmista päistä avoin kaikukoppa. Kun toinen pää on suljettu, kaikukopan rakenne on hieman tukevampi. Tällöin äänen energia voidaan suunnata paremmin.

## Tehtävä 12.12.

- a) Havaitaan, että kun ilmaa tai heliumia päästetään pillin läpi, pilli tuottaa ääntä tietyllä taajuudella. Kun pillin läpi virtaa heliumia, äänen taajuus on korkeampi kuin jos pillin läpi virtaa ilmaa.
- b) Kun pillin läpi virtaa kaasua, pilliin syntyy seisova aalto, joka kuullaan äänenä. Syntynyt seisova aalto noudattaa aaltoliikkeen perusyhtälöä  $v = f\lambda$ . Perustaajuudella molemmista päistä avoimessa putkessa syntynyt seisovan aallon aallonpituus on  $\lambda = 2L$ , jossa  $L$  on putken pituus.

$$v = f\lambda = f2L$$

$$f = \frac{v}{2L}.$$

Putken pituus ei muutu. Äänen nopeus on heliumissa taulukon mukaan 970 m/s ja ilmassa 343 m/s. Tämän pillin läpi virtaava helium tuottaa korkeamman äänen (suurempi taajuus) kuin ilma, sillä taajuus on suoraan verrannollinen äänen nopeuteen edellä saadun yhtälön mukaan.

## Tehtävä 12.13.

- b) Kun pulloon lisätään vettä, havaitaan, että kuultavan äänen korkeus kasvaa. Pulloon syntyy seisova aalto, jonka perustaajuudella aallonpituus noudattaa yhtälöä

$$L = \frac{\lambda}{4}.$$

Mitä pidempi ilmatila pullossa on, sitä pidempi on pullon ilmatilaan syntyneen seisovan aallon aallonpituus. Syntynyt ääni noudattaa aaltoliikkeen perusyhtälöä  $v = f\lambda$ . Mitä pidempi syntyneen aallon aallonpituus on, sitä pienempi on äänen taajuus.

Kun pulloon lisätään vettä, syntyneen aallon aallonpituus lyhenee, jolloin kuultavan äänen korkeus kasvaa eli äänen taajuus suurenee.

## Tehtävä 12.14.

kuminauhan värähtelevän osan pituus  $L = 0,86 \text{ m}$

Kun kuminauhaan syntyy seisova aalto, värähtelijän taajuus on  $f = 56 \text{ Hz}$ .

a) Kuminauhaan syntyy seisova aalto, jossa on viisi kupua.

Tällöin aallonpituudelle on voimassa  $L = \frac{5}{2}\lambda$ .

Syntyneen aallon aallonpituus on

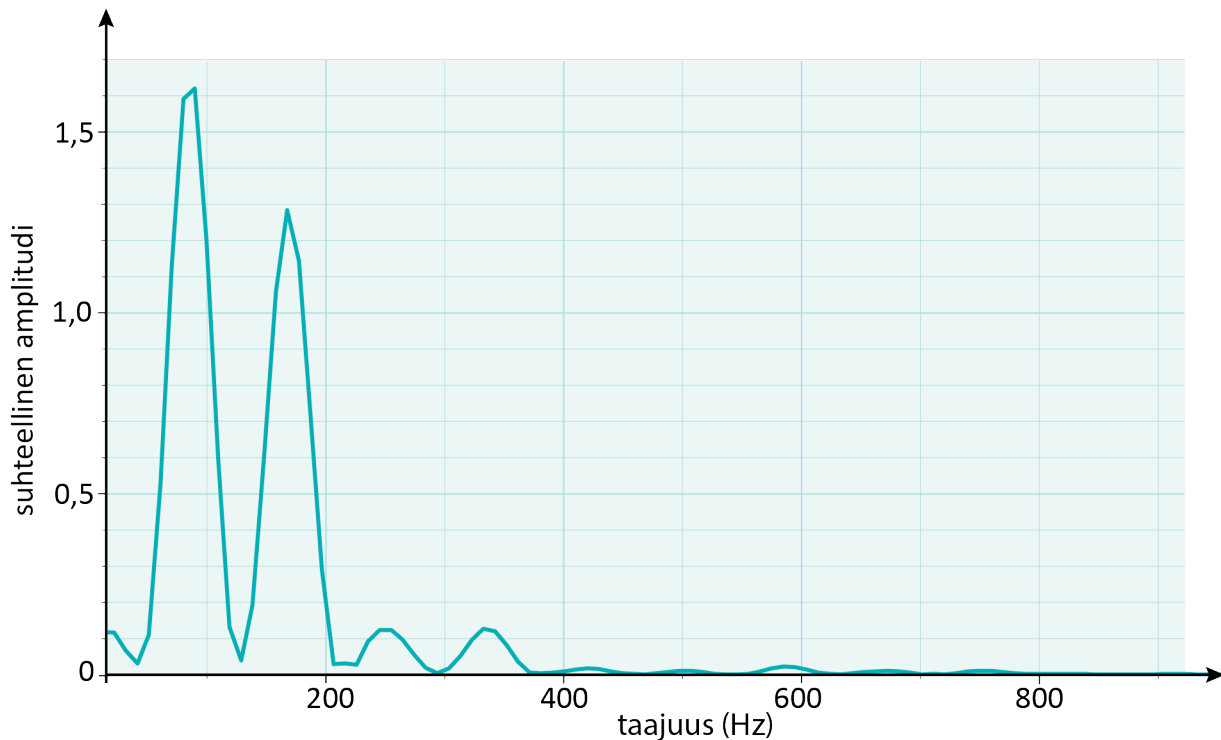
$$\lambda = \frac{2}{5}L = \frac{2}{5} \cdot 0,86 \text{ m} = 0,344 \text{ m} \approx 34 \text{ cm}.$$

b) Kuminauhaan syntyneen aallon nopeus saadaan aaltoliikkeen perusyhtälön avulla. Aallon taajuus on sama kuin värähtelijän taajuus ja aallonpituus saadaan a-kohdan mukaan. Aallon nopeus on

$$\begin{aligned} v &= f\lambda = f \cdot \frac{2}{5}L \\ &= 56 \text{ Hz} \cdot \frac{2}{5} \cdot 0,86 \text{ m} \\ &= 19,264 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 19 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

## Tehtävä 12.15.

a) Tehdään mittausaineistolle FFT-analyysi.



Kieleen syntyneet taajuudet ovat taajuusanalyysin perusteella

$$f_1 = 88 \text{ Hz}, f_2 = 166 \text{ Hz}, f_3 = 251 \text{ Hz ja } f_4 = 337 \text{ Hz.}$$

b) Kun kieli laitetaan värähtelemään, kieleen syntyy seisova aalto, jossa on yksi kupu. Videon hidastuksessa sekä mittausdatassa näkyy, kuinka kieleen syntyy useita erilaisia seisovia aaltoliikkeitä, jossa aallonpituus on perustaajuutta vastaavaa aallonpituutta lyhyempiä. Kun aallonpituus lyhenee, värähtelyn taajuus kasvaa. Perustaajuudesta ja ylätaajuuksista muodostuu syntyneen äänen spektri. Spektristä havaitaan, että syntyneet taajuudet ovat perustaajuuden monikertoja.

Perustaajuus syntyy ehdolla  $\lambda_1 = 2L$ , sillä värähtelijään syntyy yksi kupu.

1. ylävärähtelytaajuus syntyy ehdolla  $\lambda_2 = L$ , sillä värähtelijään syntyy kaksi kupua.

2. ylävärähtelytaajuus syntyy ehdolla  $\lambda_3 = 2L/3$ , sillä värähtelijään syntyy kolme kupua.

Aallon nopeus pysyy kielessä koko ajan samana. Aaltoliikkeen perusyhtälöstä saadaan kieleen syntyneiden seisovien aaltojen taajuudet:

Perustaajuudelle

$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2L}.$$

1. ylävärähtelytaajuudelle

$$f_2 = \frac{v}{\lambda_2} = \frac{v}{L} = 2f_1.$$

## 2. ylävärähtelytaajuudelle

$$f_3 = \frac{v}{\lambda_3} = \frac{v}{\frac{2}{3}L} = \frac{3v}{2L} = 3f_1.$$

Yleisesti voidaan todeta, että syntyneiden seisovien aaltoliikkeiden taajuuksille on voimassa

$$f_n = nf_1, \text{ missä } n = 2, 3, 4, \dots$$

Mittaustulos siis noudattaa värähtelevän kielen teoreettista mallia.

## Tehtävä 12.16.

kuminauhan pituus  $L = 1,79 \text{ m}$

a) Kuminauhaan muodostuu seisova aalto.

Perustaajuudella kuminauhaan syntyy yksi kupu, jolloin syntyneen aallon aallonpituus on

$$L = \frac{\lambda}{2}$$

$$\lambda = 2L = 2 \cdot 1,79 \text{ m} = 3,58 \text{ m}.$$

Vastaavasti muille taajuuksille

2 kupua:  $L = \lambda = 1,79 \text{ m}.$

3 kupua:

$$L = \frac{3\lambda}{2}$$

$$\lambda = \frac{2L}{3} = \frac{2 \cdot 1,79 \text{ m}}{3} = 1,1933 \text{ m}.$$

4 kupua:

$$L = 2\lambda$$

$$\lambda = \frac{L}{2} = \frac{1,79 \text{ m}}{2} = 0,895 \text{ m}.$$

5 kupua:

$$L = \frac{5\lambda}{2}$$

$$\lambda = \frac{2L}{5} = \frac{2 \cdot 1,79 \text{ m}}{5} = 0,716 \text{ m}.$$

6 kupua:

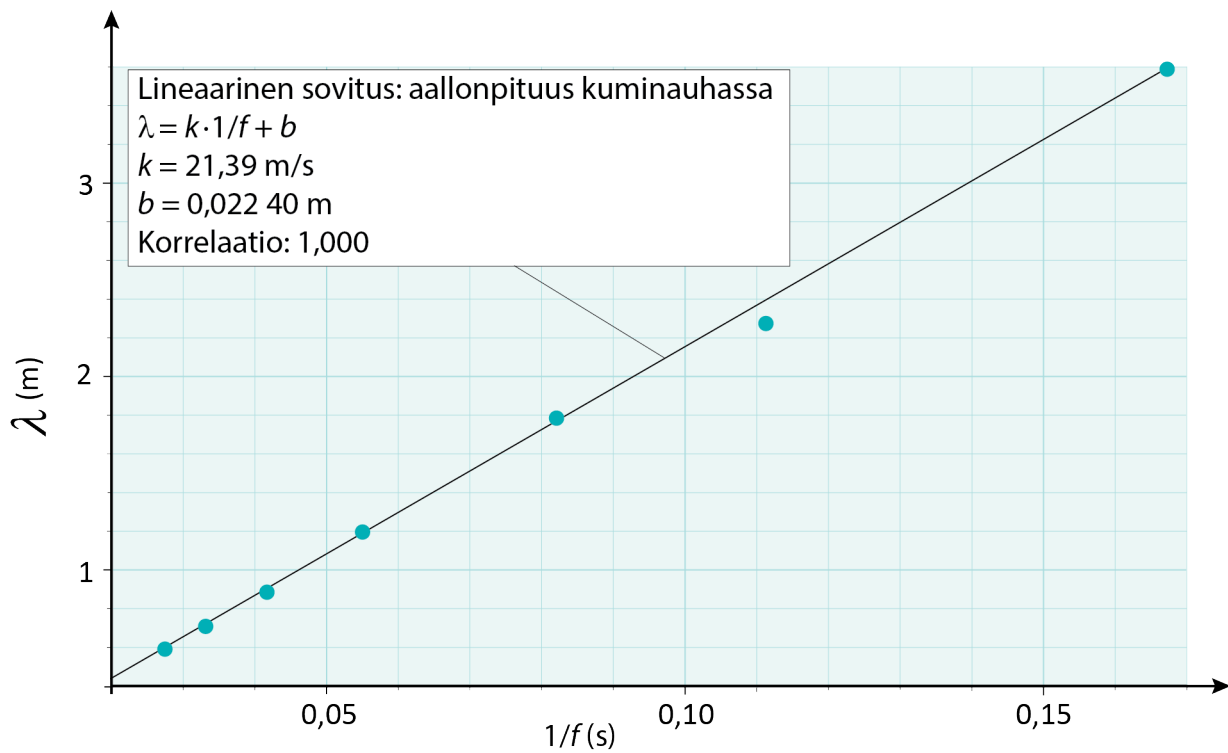
$$L = 3\lambda$$

$$\lambda = \frac{L}{3} = \frac{1,79 \text{ m}}{3} = 0,5967 \text{ m}.$$

- b) Kuminauhaan syntynyt aalto noudattaa aaltoliikkeen perusyhtälöä  $v = f\lambda$ . Aallon nopeus ei muutu mittauksen aikana, joten taajuus ja aallonpituus ovat kääntäen verrannollisia. Tällöin aaltoliikkeen perusyhtälö voidaan esittää muodossa  $\lambda = v \frac{1}{f}$ .

Aallon nopeus  $v$  saadaan  $(\frac{1}{f}, \lambda)$  -koordinaatistoon sovitettun suoran fysikaalisesta kulmakertoimesta.

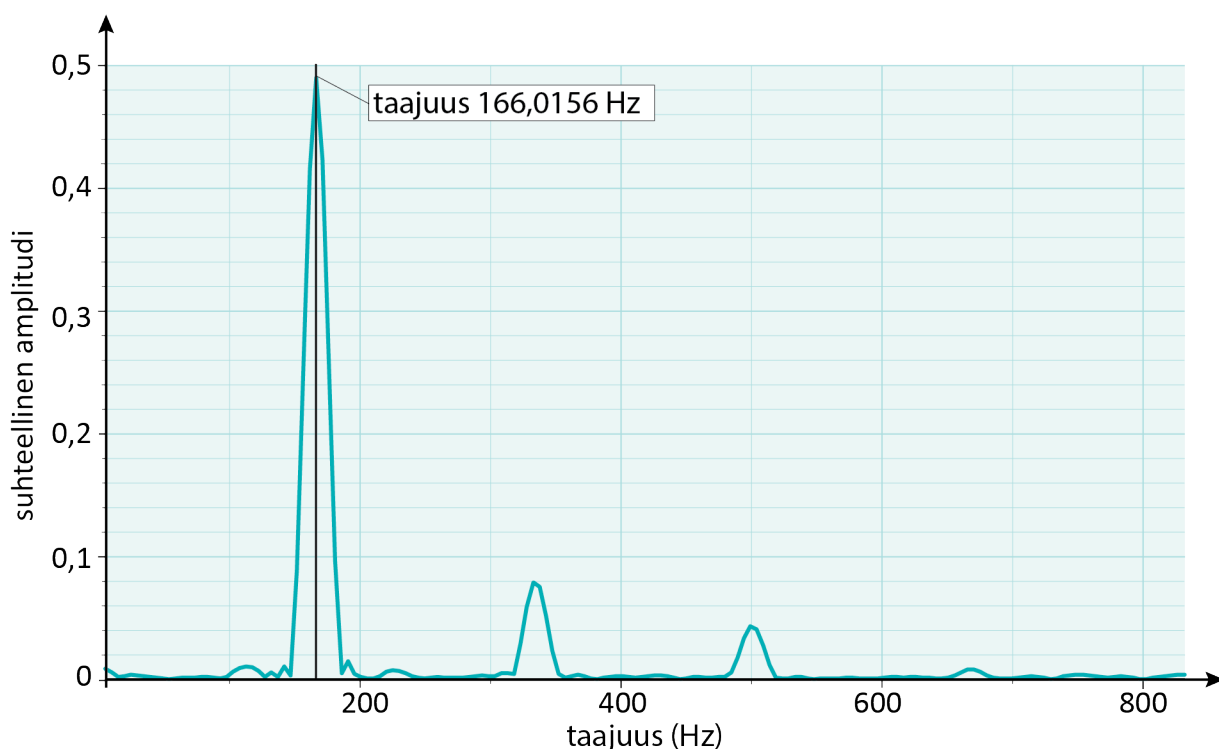
Lasketaan uusi sarake  $\frac{1}{f}$ , sovitetaan pistejoukkoon suora ja määritetään suoran fysikaalinen kulmakerroin.



Aallon nopeus kuminauhassa on  $v = 21,39 \text{ m/s} \approx 21,4 \text{ m/s}$ .

## Tehtävä 12.17.

- a) Kitaran kielen tuottaman äänen perustaajuus kuullaan voimakkaimpana. Tehdään mittaustuloksista FFT-analyysi ja määritetään korkeimman piikin taajuus.



kielen synnyttämän äänen perustaajuus  $f_1 = 166$  Hz.

- b) Kieleen syntyneet muut taajuudet ovat kuvaajasta luettuna  $f_2 = 332 \text{ Hz}$  ja  $f_3 = 498 \text{ Hz}$ . Verrataan muita taajuuksia perustaajuuteen

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{332 \text{ Hz}}{166 \text{ Hz}} = 2$$

$$\frac{f_3}{f_1} = \frac{498 \text{ Hz}}{166 \text{ Hz}} = 3.$$

Nämä taajuudet ovat perustaajuuden monikertoja.

- c) värähtelevän kitaran kielen pituus  $L = 0,577 \text{ m}$

Koska kieli on molemmista päistään kiinnitetty, perustaajuudella kitaran kieleen syntyy seisova aalto, jonka molemmissa päissä on solmut ja keskellä on kupu. Tällöin  $L = \lambda/2$ . Kitaran kielen taajuus on sama kuin äänen perustaajuus, jolloin aaltoliikkeen perusyhtälöstä saadaan aallon nopeus kitaran kielessä

$$\begin{aligned} v &= f\lambda \\ &= f2L \\ &= 166 \text{ Hz} \cdot 2 \cdot 0,577 \text{ m} \\ &= 191,564 \text{ m/s} \approx 192 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

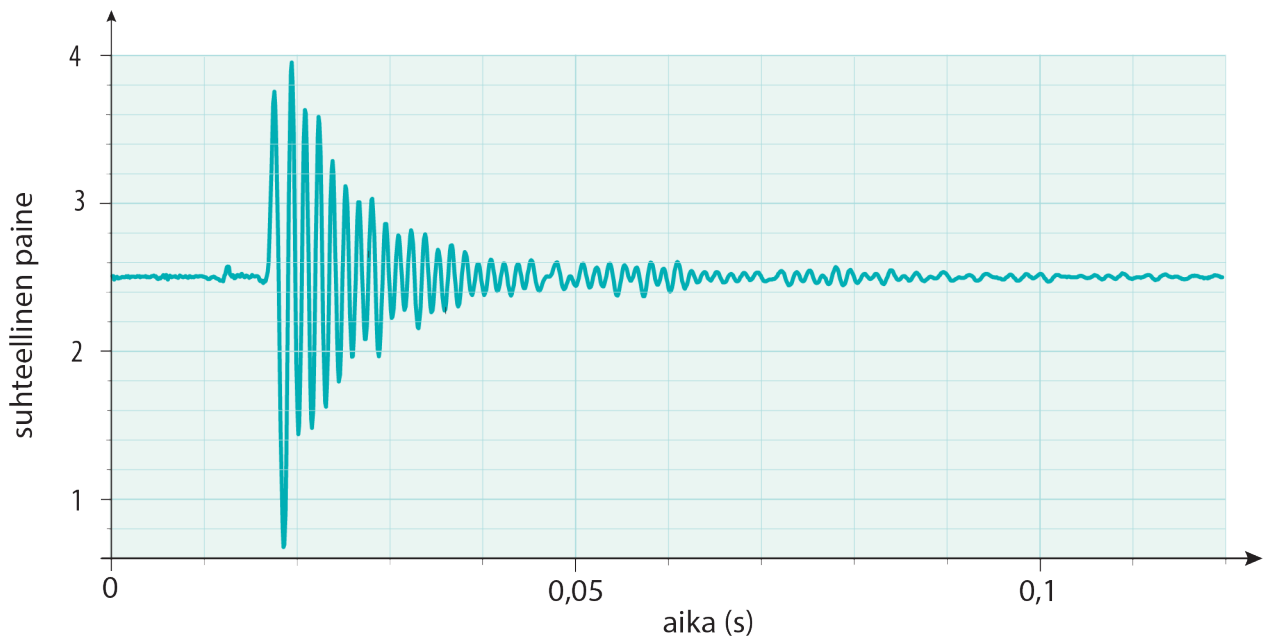
d) Aallon nopeus ei muutu, jos sormea liikutetaan otelaudalla. Kun kielen värähtelevän osan pituus pienenee, kieleen syntyneen seisovan aallon aallonpituus lyhenee. Kun aallonpituus lyhenee ja aallon nopeus kielessä pysyy vakiona, aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan kielen värähtelytaajuus suurenee. Tällöin myös kuullun äänen taajuus kasvaa.

## Tehtävä 12.18.

putken pituus  $L = 0,120$  m

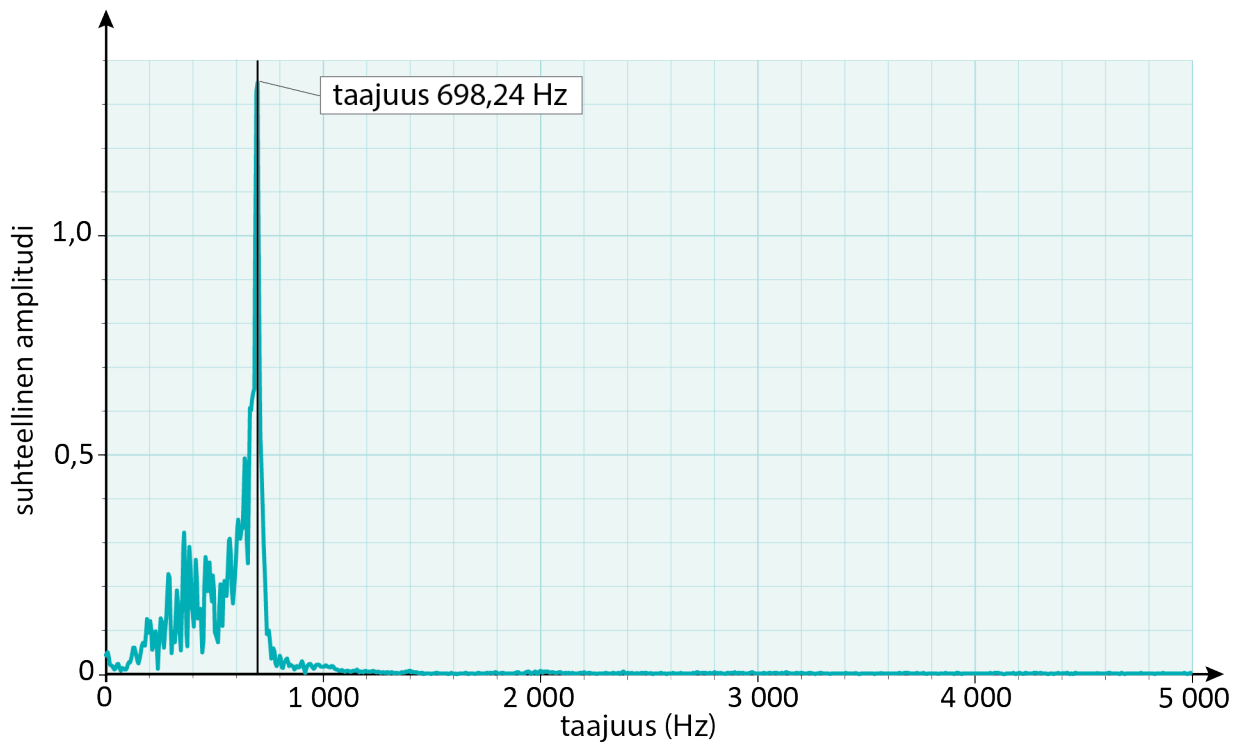
a) Kun mäntä vedettiin ulos putkesta, putkeen syntyi paineaalto. Paineaalto synnytti mäntään seisovan aallon, joka kuultiin äänenä.

b) Esitetään suhteellinen paine ajan suhteen.



Äänen vaimeni erittäin nopeasti, mikä nähdään suhteellisen paineen muutoksen nopeasta pienenemisestä. Kuvaajasta voidaan myös havaita, että putkessa syntyi pääosin vain yhtä taajuutta, sillä kuvaajasta on luettavissa selvästi yksi jaksonaika.

c) Tehdään FFT-analyysi, jotta saadaan selville, mitä taajuuksia äänessä on.



Syntyneen äänen taajuus on  $f = 698,24 \text{ Hz} \approx 698 \text{ Hz}$ .

d) Putkeen syntyy seisova aalto. Aallon taajuus on perustaajuus, jolloin aallonpituudelle on voimassa

$$L = \frac{\lambda}{4}$$
$$\lambda = 4L.$$

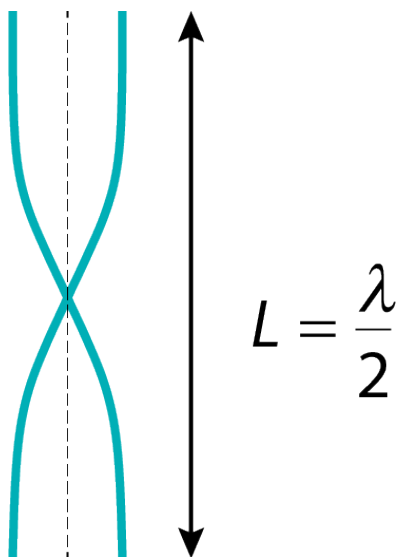
Äänen nopeus ilmassa saadaan aaltoliikkeen perusyhtälöllä

$$\begin{aligned} v &= f\lambda \\ &= f4L \\ &= 698,24 \text{ Hz} \cdot 4 \cdot 0,120 \text{ m} \\ &= 335,155 \text{ m/s} \approx 335 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

## Tehtävä 12.19.

- a) Seisovassa ääniaallossa on solmuja ja kupuja eli paikallaan pysyviä amplitudiminimejä ja -maksimeja. Seisova ääniaalto syntyy, kun rajapintaa kohti tuleva ääni ja rajapinnasta heijastunut ääni interferoivat. Koska rajapintaan tulevalla ja siitä heijastuvalla äänellä on sama taajuus ja sama aallonpituus, aaltojen vaihe-ero on vakio. Näin rajapinnan edessä tietyissä kohdissa aallot aina vahvistavat toisiaan ja toisissa kohdissa aallot aina heikentävät toisiaan. Maksimikohdat ovat toisistaan puolen aallonpituuden etäisyydellä. Sama pätee myös minimikohdille.
- b) Putkessa ääni syntyy, kun ilmapatsas värähtelee putken sisällä. Putkessa olevaan ilmapatsaaseen muodostuu pitkittäinen seisova aalto. Putken päädyt ovat aina rajapintoja, joista osa putken sisältä tulevasta äänestä heijastuu takaisin putken sisään. Putken avoimesta päästä aalto heijastuu ilman vaihesiirtoa, eli putken avoimeen päähän muodostuu seisovan aallon kupu. Putkessa värähtelevään ilmapatsaaseen muodostuu paine-eroja ja pitkittäinen seisova aalto. Seisovan aallon solmukohdissa ilman molekyylit pysyvät likipitään paikoillaan ja kupukohdissa molekyylit liikkuvat eniten. Solmukohdat muodostuvat kohtiin, joissa paine on suurin ja kohtiin, joissa paine on pienin.

Putki resonoi värähtelevän ääniraudan kanssa, jos ääniraudan taajuus on sama kuin putken perustaajuus tai sen monikerta. Putkeen voi tällöin syntyä seisova aalto. Kun putken pituutta merkitään tunnuksella  $L$ , voidaan todeta, että putkeen syntyvän seisovan aallon aallonpituus  $\lambda = 2L$ . Resonanssi tapahtuu ja äänen voimistuminen havaitaan, kun putkessa on seisova aalto. Näin tapahtuu esimerkiksi silloin, kun putken pituus on  $2L, L, 2L/3, L/2, 2L/5$ .



- c) Kun putken toinen pää tukitaan, tukittuun päähän syntyy aina solmu eli painemaksimi ja liikeminimi. Tällöin resonanssitaajuuksia vastaavat aallonpituudet ovat  $\lambda_1 = 4L$ ,  $\lambda_2 = 4L/3$ ,  $\lambda_3 = 4L/5$  jne. Aallonpituutta  $2L$  vastaava taajuus ei ole resonanssitaajuuksien joukossa, joten ääniraudan ääni ei vahvistu.

## Tehtävä 12.20.

- a) Lämpöakustisia muuntimia kehitetään erityisesti teollisuuden tai kotitalouksien hukkalämmön hyödyntämiseen. Tarkoituksena on usein kytkeä muunnin teollisuuden tai kotitalouksien laitteisiin, jotka lämpenevät merkittävästi.
  
- b) Hukkalämpö ohjataan lämmönvaihtimeen, joka lämmittää ilmaa paikallisesti. Ilman lämpötilan nousu aiheuttaa paineaallon, josta kehittyy seisova aalto resonanssiputkeen. Putken toisessa päässä on mikrofoni tai pietsosähköinen kide, joka muuntaa mekaanisen aallon jännitteeksi.

- c) äänen nopeus ilmassa  $v = 343 \text{ m/s}$   
resonanssiputken pituus  $L = 3,0 \text{ cm} = 0,030 \text{ m}$

Koska resonanssiputken päässä oleva mikrofonin kalvo voi värähdellä, siihen kohtaan muodostuu seisovan aallon kupu.

Perustaajuuden aallonpituus on tällöin  $\lambda = 4L$ .  
Aaltoliikkeen perusyhtälöstä ratkaistaan taajuus.

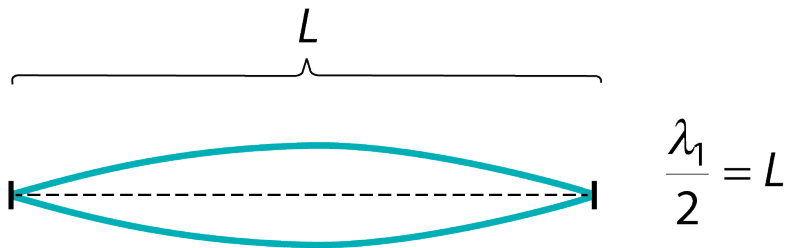
$$\begin{aligned} f &= \frac{v}{\lambda} \\ &= \frac{v}{4L} \\ &= \frac{343 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{4 \cdot 0,030 \text{ m}} \\ &= 2858,333 \frac{1}{\text{s}} \approx 2900 \text{ Hz} \end{aligned}$$

## Tehtävä 12.21.

putken pituus  $L = 1,077 \text{ m}$

- a) Kaiutin tuottaa heliumiin ääniaaltoja, jotka osittain heijastuvat putken toisesta päästä. (1 p) Kaiuttimesta tulevat ja putken toisesta päästä heijastuvat aallot interferoivat. (1 p) Tietyillä taajuuksilla interferenssissä syntyy seisova aalto. Tämä havaitaan äänen intensiteettitason voimistumisena. (2 p) Pienin taajuus, jolla voimistuminen voidaan havaita, on perustaajuus ja tätä suuremmat taajuudet ylätaajuuksia.

- b) Koska putki on molemmista päistään suljettu, perustaajuudella heliumiin syntyy seisova aalto, jonka päissä on solmukohdat ja niiden välissä yksi kupu.



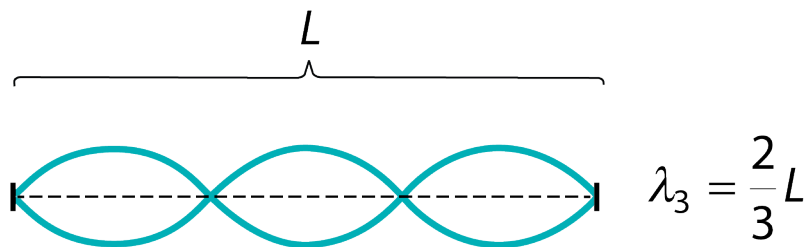
Tällöin taajuutta 412 Hz vastaava aallonpituus on

$$L = \frac{\lambda_1}{2}$$

$$\lambda_1 = 2L = 2 \cdot 1,077 \text{ m} = 2,154 \text{ m}.$$

(1 p)

Kun ääni voimistuu 1 239 Hz:n taajuudella, kyseessä on toinen ylätaajuus. Tällöin putkessa on kolme kupua.



Näin ollen

$$L = \frac{3\lambda_3}{2}$$

(1 p)

$$\lambda_3 = \frac{2L}{3} = \frac{2 \cdot 1,077 \text{ m}}{3} = 0,718 \text{ m}.$$

- c) Aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan äänen nopeudelle heliumissa on voimassa  $v = f\lambda$ . (1 p)

Aallon nopeus ei muutu mittauksen aikana, joten taajuuden ja aallonpituuden tulo on vakio, eli taajuus ja aallonpituus ovat kääntäen verrannollisia,  $f \sim \frac{1}{\lambda}$ . (1 p)

- d) Aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan äänen nopeudelle heliumissa on voimassa  $v = f\lambda$ . Määritetään äänen nopeus tilanteessa, jossa havaitaan ensimmäinen voimistuminen (perustaajuus)

$$v_1 = f_1 \lambda_1 = 412 \text{ Hz} \cdot 2,154 \text{ m} = 887,448 \text{ m/s} \quad (1 \text{ p})$$

Määritetään äänen nopeus tilanteessa, jossa havaitaan kolmas voimistuminen (toinen ylätaajuus).

$$v_3 = f_3 \lambda_3 = 1239 \text{ Hz} \cdot 0,718 \text{ m} = 889,602 \text{ m/s} \quad (1 \text{ p})$$

Määritetään äänen nopeus heliumissa tulosten keskiarvona.

$$v = \frac{v_1 + v_3}{2} = \frac{887,448 \text{ m/s} + 889,602 \text{ m/s}}{2} = 888,525 \text{ m/s} \approx 889 \text{ m/s}$$

(1 p)

e) Taulukon mukaan äänen nopeus on 965 m/s, kun ääniaalto etenee heliumissa, jonka lämpötila on 20 °C. Mittauksessa saatu tulos on huomattavasti kirjallisuusarvoa pienempi. Kaasuissa lämpötila vaikuttaa merkittävästi äänen nopeuteen. Kun kaasun lämpötila nousee, myös äänen nopeus kaasussa suurenee. Kokeellisesti voidaan osoittaa, että äänen nopeus kaasussa on verrannollinen kaasun lämpötilan neliöjuureen,  $v \sim \sqrt{T}$ . Mittaustuloksen siis pitäisi olla kirjallisuusarvoa suurempi, mutta saatu arvo on kirjallisuusarvoa pienempi. (2 p)

Ääni noudattaa aaltoliikkeen perusyhtälöä  $v = f\lambda$ . Mittausvirhettä voi siis syntyä taajuuden tai aallonpituuden määrittämisessä. Putken pituuden mittaamisen tarkkuus on riittävä ja millimetrin poikkeama putken pituuden määrittämisessä aiheuttaa aallonpituuden määrittämiseen noin promillen virheen, mikä ei selitä virhettä. Saadut tulokset perusvärähtelylle ja toiselle ylävärähtelylle ovat hyvin lähellä toisiaan, joten mittaus on siltä osin onnistunut. (1 p)

Selvästi pienemmän äänen nopeuden selittää putkeen jäänyt ilma. Tyhjiöpumpulla ei pystytä imemään putkea täysin tyhjäksi. Kun putkeen lisätään heliumia, putkeen syntyy ilman ja heliumin kaasuseos. Ääni etenee ilmassa huomattavasti hitaammin kuin heliumissa, joten voidaan olettaa, että ilman ja heliumin seoksessa äänen nopeus on pienempi kuin puhtaassa heliumissa. Mitä

enemmän seoksessa on ilmaa, sitä pienempi on äänen nopeus kaasuseoksessa. (1 p)

Pisteytys lyhyesti:

- kirjallisuusarvon löytäminen ja saadun arvon vertaaminen kirjallisuusarvoon (1 p)
- havainto, jonka mukaan lämpötila on taulukon arvoa suurempi ja päätelmä, että mittaustuloksen pitäisi olla suurempi (1 p)
- muuttujien ja eri taajuuksien tulosten vertailu (1 p)
- ymmärrys, että heliumin seassa pitää olla jotain kaasua (ilmaa), jossa ääni kulkee hitaammin, koska tulos poikkeaa niin paljon kirjallisuusarvosta (1 p)

# 13. Aaltojen diffraktio ja interferenssi

## Tehtävä 13.1.

Oikeat vastaukset:

- a) B
- b) A
- c) A
- d) C
- e) B

## Tehtävä 13.2.

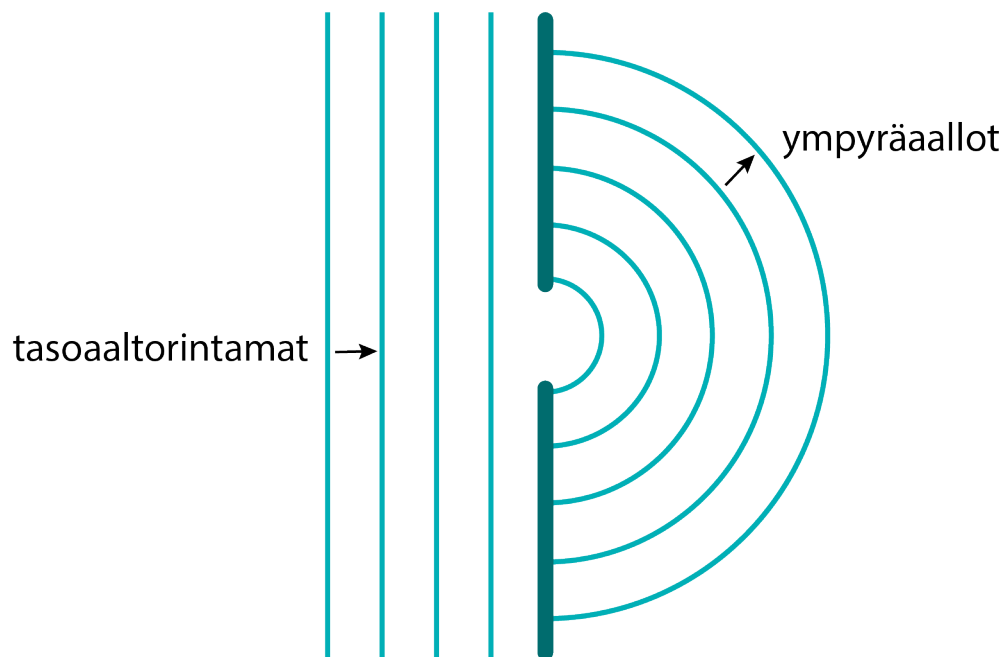
- a) Diffraktio eli taipuminen tarkoittaa aallon kulkusuunnan muuttumista, joka aiheutuu esteestä tai raosta.
- b) Diffraktio on sitä voimakkaampi, mitä pidempi aallonpituus on raon leveyteen verrattuna. Matalien äänien aallonpituus on pidempi kuin korkeiden, joten kuvan henkilö kuulee matalat äänet paremmin. Matalat äänet eivät absorboidu ilmaan yhtä voimakkaasti kuin korkeat äänet ja myös siksi matalat äänet kuuluvat paremmin.

### Tehtävä 13.3.

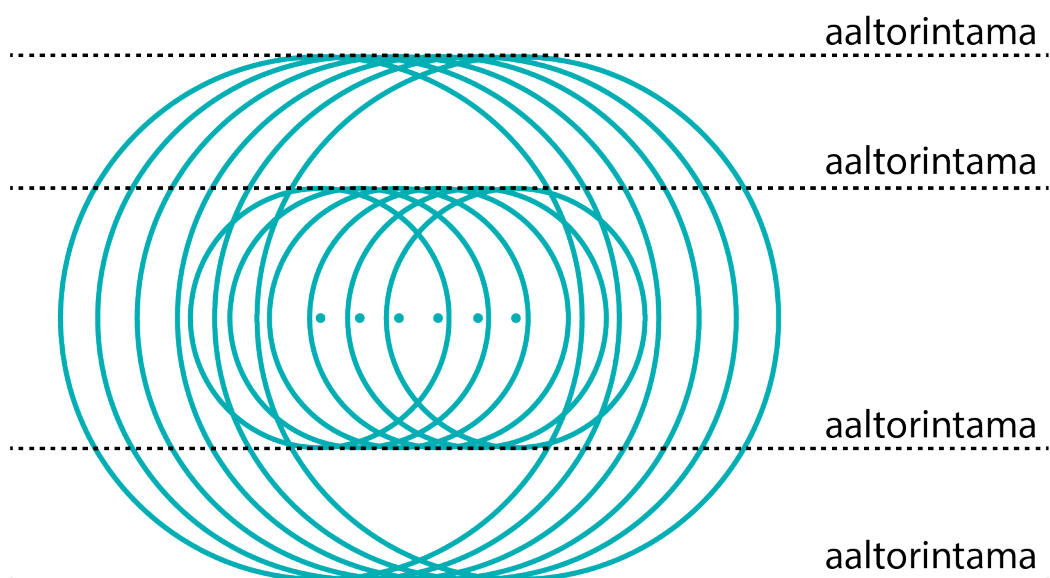
- a) Pisteiden  $A$  ja  $B$  välillä on kaksi kokonaista aaltoa ja sen lisäksi puolikas aalto. Pisteiden välinen matkaero  $d = 2,5\lambda$ .
- b) Koska pisteet  $A$  ja  $C$  ovat aallonharjoja, ovat pisteiden  $A$  ja  $C$  kohdalla olevat aallot samassa vaiheessa.

## Tehtävä 13.4.

a)

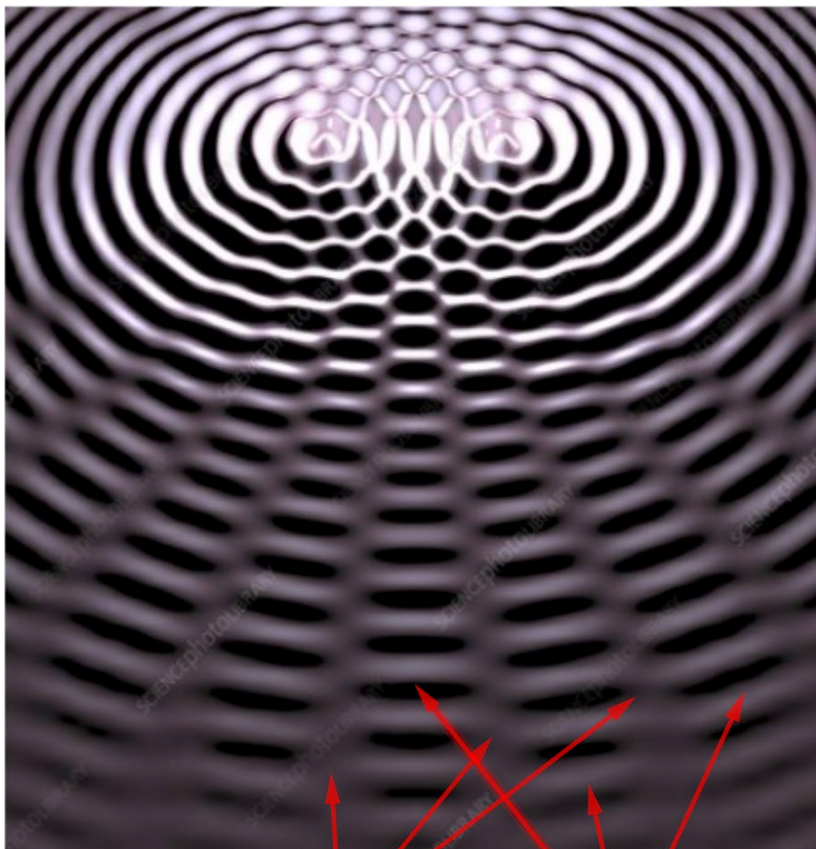


b)



## Tehtävä 13.5.

Kuvassa tummat alueet ovat aallonpohjia ja vaaleat alueet aallonharjoja. Kuvassa näkyvät säteen suuntaiset viivat, joissa ei erotu tummia ja vaaleita alueita, ovat alueita, joissa tapahtuu heikentävä interferenssi ja summa-aallon amplitudi on nolla. Muissa kohdissa aallot vahvistavat toisiaan.

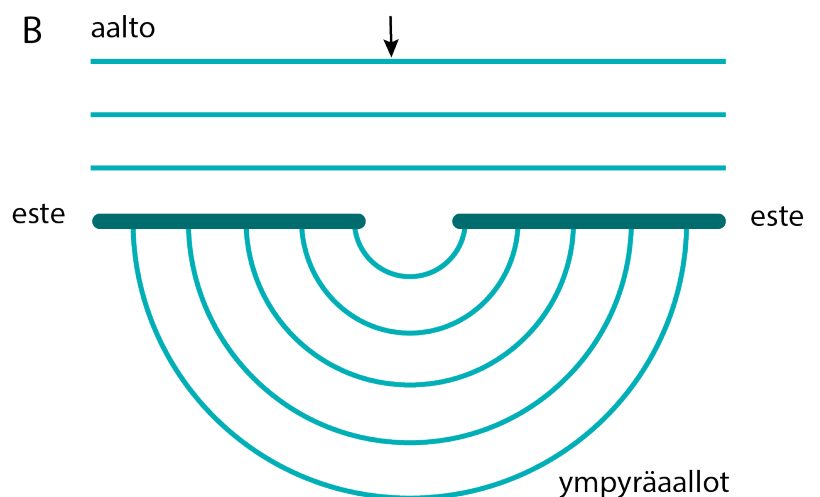
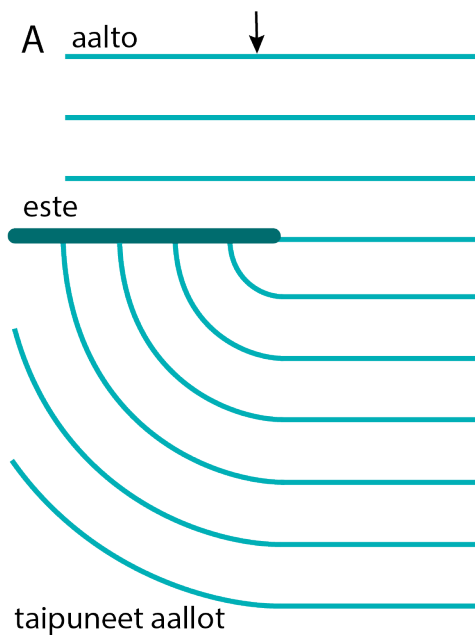


heikentävä interferenssi

vahvistava interferenssi

## Tehtävä 13.6.

Kun tasoaalto kohtaa esteen, aalto heijastuu esteestä. Tilanteessa A esteen pää toimii uuden alkeisaallon lähteenä ja tuottaa ympyräaallon. Tasoaalto, joka tulee esteen ohi, jatkaa tasoaaltona. Tilanteessa B esteiden välillä oleva rako toimii uuden alkeisaallon lähteenä. Koska raon leveys on aallonpituuden luokkaa, syntyy raossa ympyräaalto. Tilanteessa B esteiden jälkeen on ympyräaalto.



## Tehtävä 13.7.

- a) Molemmissa raoissa tapahtuu diffraktio. Kumpikin rako toimii Huygensin periaatteen mukaisesti ympyräaaltojen lähteenä. Raoista lähtevät ympyräaallot kohtaavat ja interferoivat. Tämän seurauksena syntyy diffraktiokuvio.
  
- b) Diffraktiokuvion muotoon vaikuttavat aallon etenemisnopeus, aallonpituus, rakojen leveys ja rakojen etäisyys toisistaan.

## Tehtävä 13.8.

- a) Väärin. Värähtelijöiden välinen etäisyys on neljä aallonpituutta.
- b) Oikein. Koska molempien lähettämät aallot ovat aallonpohjana hetkellä, jolloin aalto on toisen värähtelijän kohdalla, värähtelee värähtelijät samassa vaiheessa.
- c) Oikein. Molempien värähtelijöiden lähettämät aallot ovat pisteessä A aallonharjoja, joten aallot ovat samassa vaiheessa.
- d) Oikein. Pisteessä C aallot ovat samassa vaiheessa, jolloin ne vahvistavat toisiaan.
- e) Väärin. Pisteessä B toisen aallon lähettämä aalto on aallonpohjana ja toisen aallonharjana, jolloin ne heikentävät toisiaan.

## Tehtävä 13.9.

Kun pisara osuu vedenpintaan, osuma aiheuttaa veden pintaan häiriön. Osumiskohta toimii Huygensin periaatteen mukaan uuden alkeisaallon lähteenä, jolloin vedenpintaan syntyy ympyränmuotoinen aalto. Ympyräaalto etenee säteen suuntaan vakionopeudella. Kun aalto etenee osumakohdasta kauemmaksi, aallon amplitudi pienenee. Tämä johtuu siitä, että aallon energia jakautuu isommalle pinta-alalle.

## Tehtävä 13.10.

- a) Pisteessä A on molempien aaltojen aallonharja. Aallot ovat samassa vaiheessa, joten pisteessä A tapahtuu vahvistava interferenssi.

Pisteessä B aaltojen vaihe-ero on puoli aallonpituutta, eli aallot ovat vastakkaisissa vaiheissa. Näin ollen pisteessä B tapahtuu heikentävä interferenssi.

Pisteessä C on molempien aaltojen aallonpohja. Aallot ovat samassa vaiheessa, joten pisteessä C tapahtuu vahvistava interferenssi.

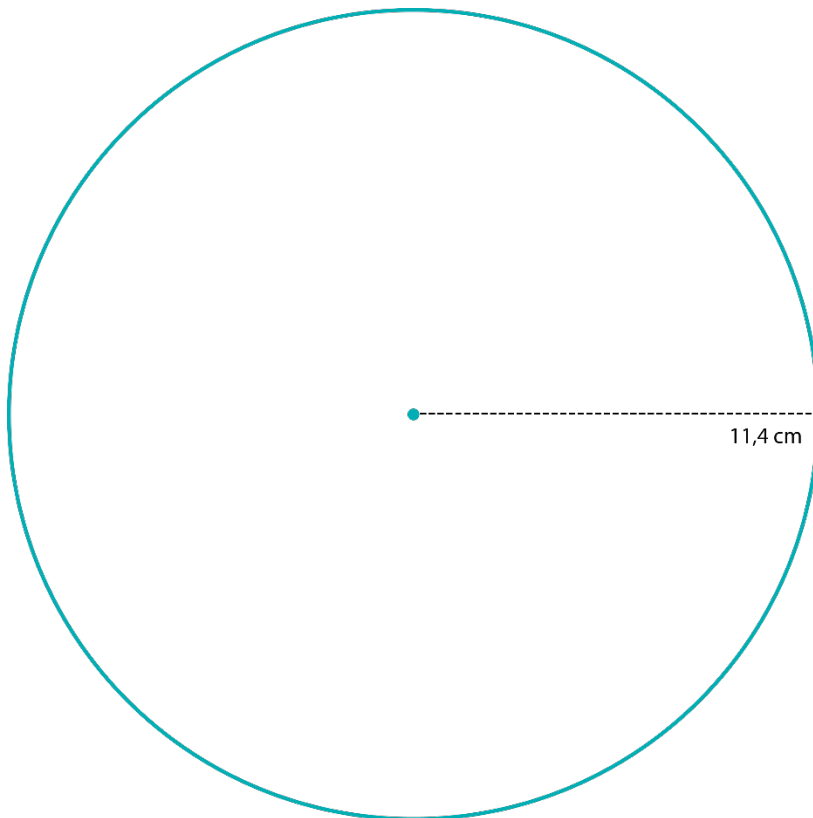
- b) Kun aallot etenevät puolen aallonpituuden verran, alkuperäisten aallonharjojen kohdille syntyy aallonpohjat ja alkuperäisten aallonpohjien kohdille aallonharjat. Tällöin pisteessä A on edelleen vahvistava interferenssi, pisteessä B heikentävä interferenssi ja pisteessä C vahvistava interferenssi.

## Tehtävä 13.11.

häiriön nopeus 11,4 cm/s

- a) Kun vesipisara osuu veteen, pisaran osuminen aiheuttaa häiriön. Huygensin periaatteen mukaan syntyy ympyrän muotoinen veden pinnalla etenevä pulssi. Syntynyt pulssi etenee veden pinnalla vakio nopeudella. Pulssi on edennyt 1,0 sekunnin aikana matkan

$$s = vt = 11,4 \text{ cm/s} \cdot 1,0 \text{ s} = 11,4 \text{ cm}.$$



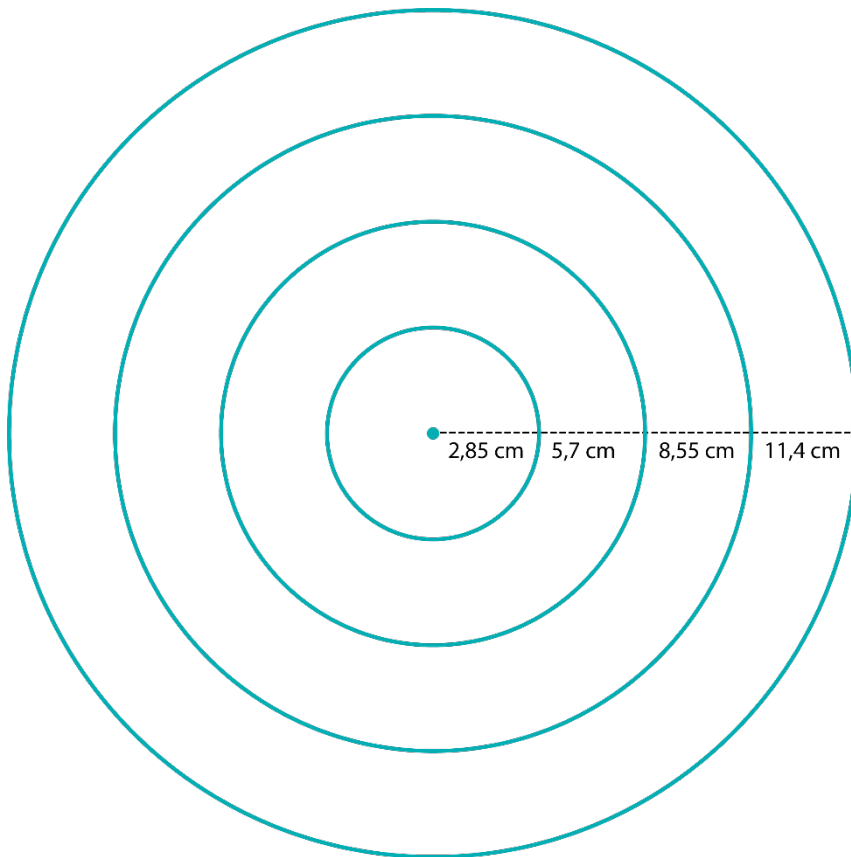
b) pisaroiden taajuus  $f = 4,0 \text{ Hz}$

Lasketaan pisaroiden muodostamien aaltorintamien aallonpituus aaltoliikkeen perusyhtälöstä

$$v = f\lambda$$

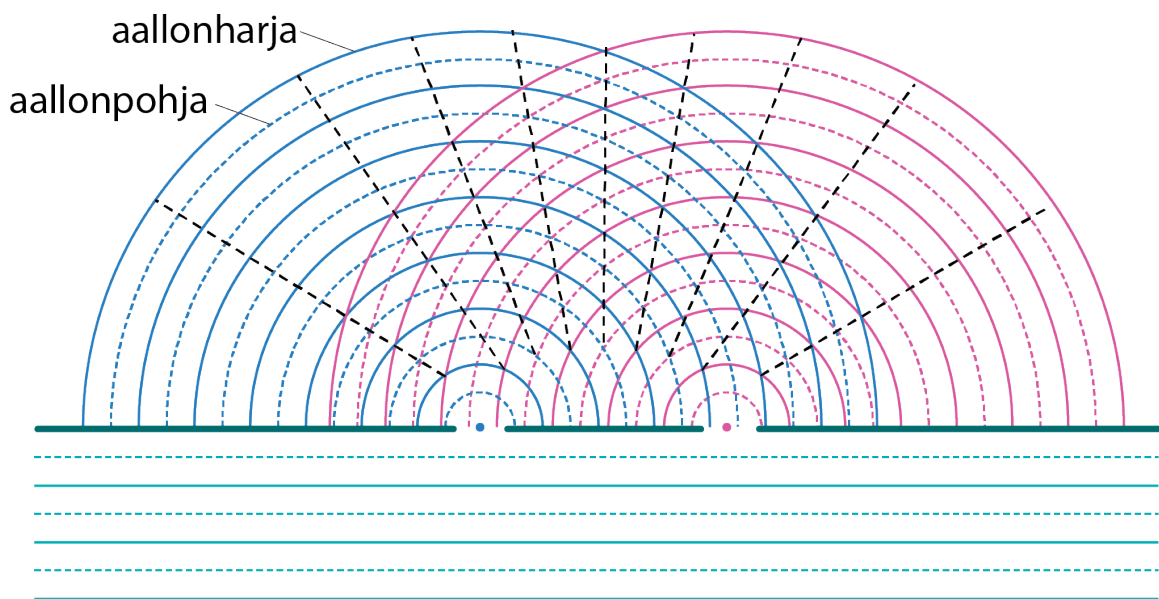
$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{11,4 \frac{\text{cm}}{\text{s}}}{4,0 \frac{1}{\text{s}}} = 2,85 \text{ cm.}$$

Hahmotellaan kuvaaja



## Tehtävä 13.12.

- a) Interferenssi on vahvistava suunnissa, joissa aallot kohtaavat samassa vaiheessa. Suunnat on merkittynä kuvassa mustilla katkoviivoilla.



- b) Raoista lähtevien ympyräaaltojen amplitudi pienenee, kun ympyrän säde kasvaa. Diffraktiokuviossa suurimmat amplitudit ovat lähellä keskipistettä, sillä etäisyys molemmista raoista on tällöin pienimmillään.

## Tehtävä 13.13.

a) Mereltä saapuu tasoaaltoja aallonmurtajia kohti. Aallonmurtajat vaimentavat ja heijastavat mereltä tulevia aaltoja. Kun mereltä tulevat aallot kohtaavat aallonmurtajan pään, aallonmurtajan pää toimii uutena aaltolähteenä, joka synnyttää Huygensin periaatteen mukaan ympyräaaltoja. Jos mereltä tulevien tasomaisten aaltojen aallonpituus on aallonmurtajan muodostaman salmen leveyden luokkaa, aallonmurtajan muodostamassa salmessa syntyy uusi ympyräaalto, joka taipuu aallonmurtajan taakse.

b) Jos mereltä saapuu aalto suoraan aallonmurtajan muodostamaan aukkoon, aukon kohdalla oleva vene kohtaa nämä aallot. Tämän veneen kohtaamilla aalloilla on likimain sama aallonpituus, amplitudi, taajuus ja nopeus kuin mereltä aallonmurtajaan tulevalla aallolla, mikäli meren syvyys ei merkittävästi muutu.

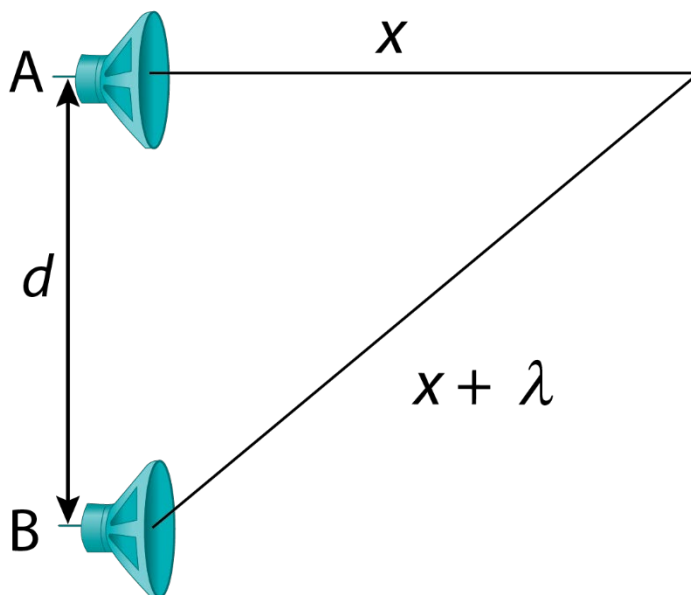
Aallonmurtajan pää synnyttää Huygensin periaatteen mukaan ympyräaaltoja. Aallonmurtajan takana olevat veneet kohtaavat nämä syntyneet ympyräaallot. Ympyräaaltojen taajuus on sama, mutta amplitudi on pienempi kuin mereltä aallonmurtajalle saapuvalla aaltoliikkeellä.

## Tehtävä 13.14.

Ääni kuuluu voimakkaimmin kohdissa, joissa kaiuttimista lähtevien ääniaaltojen välillä on vahvistava interferenssi. Lisäksi etäisyyden äänilähteisiin pitää olla mahdollisimman pieni, sillä äänen voimakkuus pienenee etäisyyden kasvaessa.

Oikeanpuoleisen kaiuttimen edessä edelliset ehdot voivat toteutua, kun etäisyys vasemmanpuoleisesta kaiuttimesta on yhden aallonpituuden pidempi kuin etäisyys oikeanpuoleisesta kaiuttimesta.

Ratkaistaan etäisyys oikeanpuoleisesta kaiuttimesta Pythagoraan lauseen avulla.



$$x^2 + d^2 = (x + \lambda)^2$$

$$x^2 + d^2 = x^2 + 2x\lambda + \lambda^2$$

$$d^2 = 2x\lambda + \lambda^2$$

$$x = \frac{d^2 - \lambda^2}{2\lambda} = \frac{(2,00 \text{ m})^2 - (0,780 \text{ m})^2}{2 \cdot 0,780 \text{ m}} = 2,174 \text{ m} \approx 2,17 \text{ m}$$

Vahvistava interferenssi tapahtuu myös tilanteessa, jossa etäisyys vasemmanpuoleisesta kaiuttimesta on kaksi aallonpituutta pidempi kuin etäisyys oikeanpuoleisesta kaiuttimesta. Muodostetaan tästä Pythagoraan lauseen mukainen yhtälö.

$$x^2 + d^2 = (x + 2\lambda)^2$$

$$x^2 + d^2 = x^2 + 4x\lambda + 4\lambda^2$$

$$d^2 = 4x\lambda + 4\lambda^2$$

$$x = \frac{d^2 - 4\lambda^2}{4\lambda} = \frac{(2,00 \text{ m})^2 - 4 \cdot (0,780 \text{ m})^2}{4 \cdot 0,780 \text{ m}} = 0,502 \text{ m} \approx 0,502 \text{ m}$$

Koska  $3\lambda > d$ , eivät etäisyydet  $x + 3\lambda, x + 4\lambda, \dots$  ole mahdollisia.

Ääni, jonka aallonpituus on 0,780 m, on voimakkaimmillaan oikeanpuoleisen kaiuttimen edessä, kun etäisyys kaiuttimesta on 0,502 m.

## **Tehtävä 13.15.**

Järveltä tulee tasoaaltoja. Tasoaaltojen suunta kauempana järvellä on eri kuin lähellä rantaa, joten tasoaalto on taittunut. Kun aalto kohtaa kiven, kiven ympäristöön syntyy uusia ympyräaalloja. Kun aalto tulee rantaan, aallon korkeus kasvaa juuri, kun aalto saavuttaa rannan. Aalto vaimenee, kun se osuu rantaan.

## **Tehtävä 13.16.**

Diffraktiokuvio havaitaan reikälevyn oikealla puolella todennäköisemmin tilanteessa 1, koska aallon vaihe on sama molempien reikien kohdalla, kun aaltorintamat ovat reikälevyn suuntaisia. Sen sijaan tilanteessa 2 aallon vaihe ei ole välttämättä sama molempien reikien kohdalla, jolloin läpimenneiden aaltojen vahvistus jää heikommaksi kuin tilanteessa 1.

## Tehtävä 13.17.

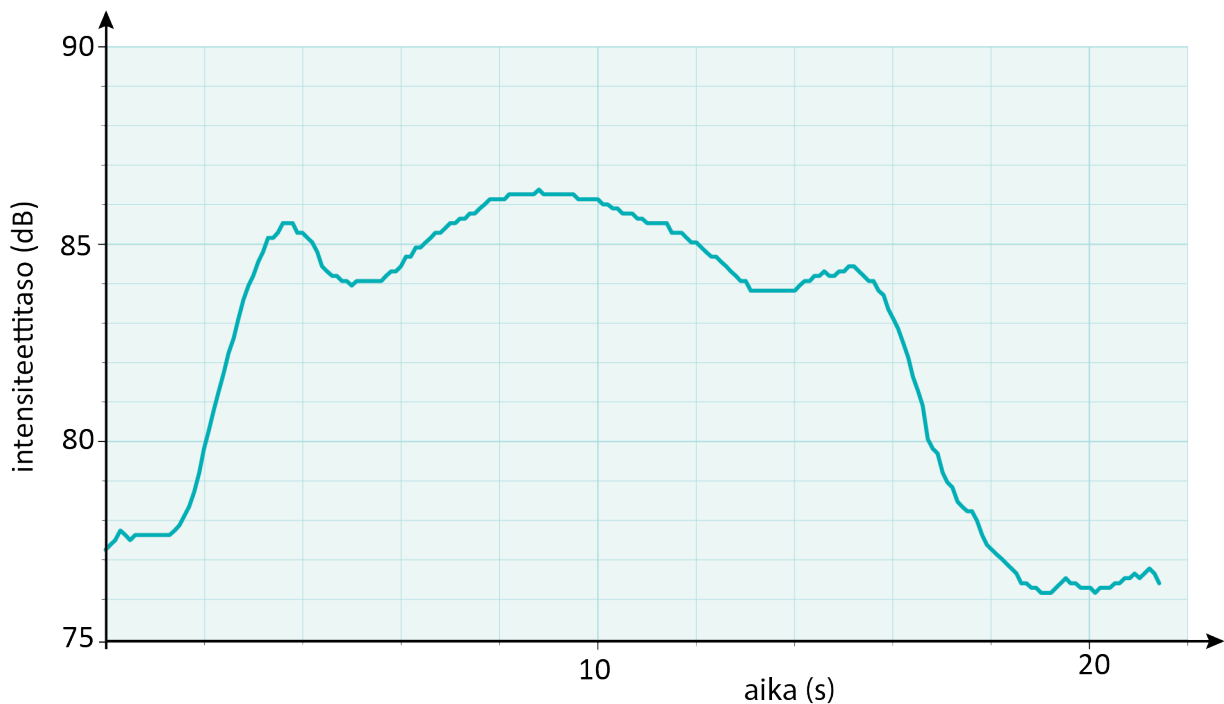
Arkielämässä havaitaan diffraktio, kun veden pinta-aalto osuu kiven reunaan ja kiven reunan taakse syntyy ympyräaalto. Äänen diffraktio havaitaan, kun opiskelija puhuu käytävällä vähän matkan päässä luokan avoimesta ovesta ja ääni kuuluu luokkaan.

## Tehtävä 13.18.

- a) Mitä kapeampi rako on, sitä voimakkaampana diffraktio ilmenee.
- b) Aaltojen amplitudi ei vaikuta diffraktiokuvion muotoon. Diffraktiokuviot kuitenkin erottuvat paremmin suurella amplitudilla kuin pienellä.
- c) Diffraktiokuviossa ei voi havaita kohtia, jotka pysyisivät paikallaan. Kun aalto etenee, heikentävän ja vahvistavan interferenssin paikat kulkevat aallonharjojen ja aallonpohjien mukana.

## Tehtävä 13.19.

a)



- b) Kuvaajasta havaitaan kolme intensiteettitason huippua. Keskimäinen huipuista on laajin ja intensiteettitaso on suurimmillaan noin 86 dB. Reunimmaisten ja keskimäisen huipun välillä on intensiteettitason alentuma. Kuvaaja on lähes symmetrinen keskimäisen intensiteettitason suhteen.

c) Intensiiteettitason huiput kuvaavat tilanteita, joissa kaiuttimien lähettämät ääniaallot vahvistavat toisiaan ja intensiiteettitason alenemat tilanteita, jossa ääniaallot heikentävät toisiaan. Molemmat reunoilla olevat intensiiteettitason maksimit kuvaavat tilannetta, jossa ääniaaltojen matkaero kaiuttimista on tasan yhden aallonpituuden mittainen. Reunoilla olevat intensiiteettimaksimien sivuilla intensiiteettitaso putoaa selvästi. Tämä voidaan selittää mikrofonin etäisyydellä äänilähteestä. Kun etäisyys kaiuttimista kasvaa, intensiiteettitaso pienenee selvästi.

## Tehtävä 13.20.

- a) Vastamelukuulokkeen mikrofoni ja siihen liitetty mikropiiri mittaavat ja laskevat taustaäänien taajuutta ja amplitudia. Näiden tietojen perusteella kuulokkeen kaiuttimiin syötetään vastaääntä, jonka vaihe on vastakkainen taustaääneen verrattuna. Tapahtuu destruktiivinen interferenssi, jolloin taustaääni vaimenee kuulokkeissa.
- b) Kaiuttimien tuottaman vastaäänen pitää olla taustaääneen verrattuna vastakkaisessa vaiheessa. Vastakkainen vaihe tarkoittaa  $180^\circ$ :n lisäystä taustaäänien vaiheeseen eli  $45^\circ + 180^\circ = 225^\circ$ . Lisäksi pitää huomioida signaalin prosessointiaika  $0,10 \text{ ms}$ , jonka aikana taustaäänien vaihe ehtii muuttua.

Harmonisen aallon funktiossa  $y(x,t) = A \sin\left(\frac{2\pi f}{v}x + 2\pi ft + \varphi\right)$

aika huomioidaan termissä  $2\pi ft$ , jossa

$f = 1 \text{ kHz} = 1000 \text{ 1/s}$  ja  $t = 0,1 \text{ ms} = 0,0001 \text{ s}$ . Kulma  $2\pi$  on sama kuin  $360$  astetta. Vaihekulman muutos

$0,1 \text{ ms}$  aikana on  $360^\circ \cdot ft = 360^\circ \cdot 1000 \frac{1}{\text{s}} \cdot 0,0001 \text{ s} = 36^\circ$ .

Kaiuttimien tuottaman vastaäänien vaiheen pitää olla  $225 + 36$  astetta, eli  $261$  astetta.

- c) Aineiston perusteella taustäääni aiheuttaa mikrofonin kalvoon värähtelyä, jolloin kondensaattorin jännite muuttuu. Mikrofonin kondensaattorin jännite on  $U = \frac{Q}{C}$ , jossa  $Q$  on kalvojen pysyvä varaus ja  $C$  on kapasitanssi, joka riippuu kalvojen välisestä etäisyydestä  $d$  eli  $C \sim \frac{1}{d}$ . Koska kalvojen välinen etäisyys vaihtelee välillä  $0,80d - 1,20d$ , kun sijoitetaan kalvojen etäisyys yhtälöön  $C \sim \frac{1}{d}$ , saadaan kapasitanssin arvoiksi  $0,8333C - 1,25C$ . Kun kapasitanssin arvot sijoitetaan yhtälöön  $U = \frac{Q}{C}$ , saadaan jännitteeksi  $0,80U - 1,20U$ . Toisin sanoen mikrofoni aiheuttaa vaihtojännitesignaalin, jonka amplitudi on  $0,20U$  ja taajuus on  $1,0 \text{ kHz}$ .

## Tehtävä 13.21.

- a) Kun kamera on alussa paikallaan, kuultavan äänen korkeus ja voimakkuus eivät muutu. (1 p) Kun kamera liikkuu kohti kaiutinta, havaitaan äänen voimakkuuden kasvu. (1 p) Kun kamera liikkuu seinän taakse, kuullaan ääni (1 p), jonka voimakkuus on pienempi kuin äänen voimakkuus oviaukon kohdalla (1 p), mutta äänen taajuus ei muutu. (1 p)

b) Kun äänilähde ja havaitsija ovat paikoillaan, havaitsijan kuuleman äänen taajuus on sama kuin äänilähteen lähettämän äänen taajuus. (1 p)

Äänen voimakkuus ei muutu, sillä äänen voimakkuus riippuu äänen intensiteetistä. Intensiteetti on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön. (1 p) Kun havaitsija on paikoillaan, ei havaitsijan etäisyys muutu, jolloin äänen voimakkuus ei muutu. (1 p)

Kun havaitsija liikkuu kohti kaiutinta, pienenee havaitsijan etäisyys äänilähteeseen nähden. Tällöin äänen intensiteetti kasvaa ja ääni kuullaan voimakkaampana. (2 p)

Ääni kuuluu, vaikka havaitsija siirtyy seinän taakse. Tämä aiheutuu äänen diffraktiosta. (1 p) Kun ääniaalto osuu oven reunaan, osa ääniaallosta taipuu oven taakse. (1 p). (Jos ei ole erikseen mainittu, että vain osa taipuu, niin tästä kohdasta 0 p). Taipuminen ei vaikuta äänen taajuuteen, joten kuullun äänen korkeus ei muutu. (1 p) Osa kaiuttimen lähettämästä äänestä absorboituu seinään ja heijastuu seinäpinnasta. Tämän vuoksi seinän takana kuullun äänen voimakkuus on pienempi kuin oviaukon kohdalla. (2 p)

# 14. Akustiikkaa

## Tehtävä 14.1.

Väitteistä oikein: a), e)

Väitteistä väärin: b), c), d)

Korjaukset vääriin väittämiin:

- b) Ääniaalto voi taittua kahden aineen rajapinnassa. Äänen taipumisessa eli diffraktiossa äänen kulkusuunta muuttuu, kun ääniaalto kohtaa esteen.
- c) Äänen intensiteettitaso konsertissa ei yleensä saa ylittää 70 dB:n rajaa lähimpien asuinrakennusten luona. Konserttilavan edessä äänen intensiteettitaso on usein huomattavasti tätä korkeampi.
- d) Konserttisalissa jälkikaiunta-ajan tavoitearvo on noin 1,5 s – 2,0 s.

## **Tehtävä 14.2.**

Akustiikka on fysiikan osa-alue, jossa tutkitaan ääntä. Akustiikan tutkimuskohteita ovat esimerkiksi äänentoisto, meluntorjunta, signaalinkäsittely ja äänen käyttäytyminen eri tiloissa.

## **Tehtävä 14.3.**

- a) Kylpyhuoneen pinnat ovat yleensä kovia ja tasaisia. Tämän vuoksi suuri osa äänestä heijastuu pinnoista ja äänet kylpyhuoneessa kaikuvat paljon.
  
- b) Tyhjässä asunnossa äänet kaikuvat paljon, sillä pinnat ovat pääosin tasaisia, yhtenäisiä ja kovia. Kalusteet ja esimerkiksi verhot absorboivat ääntä, jolloin kaiun määrä on vähäisempää kuin tyhjässä asunnossa.

## Tehtävä 14.4.

- a) Jälkikaiunta-aika on aika, jonka kuluessa kaikuneen äänen intensiteettitaso laskee 60 dB alkuperäisestä äänestä.
  
- b) Luokkahuoneessa akustiikka suunnitellaan puheäänien näkökulmasta, konserttisalissa musiikin näkökulmasta. Musiikin taajuusalue on laajempi kuin puheen. Kaikkien musiikin taajuuksien tarkoituksenmukainen kaikuminen ja seisovien aaltojen muodostumisen hallitseminen on tärkeää. Luokkahuoneessa akustiikka on yleensä hyvä, jos kaikua on vain vähän. Tällöin puheesta saa parhaiten selvää. Konserttisalissa tavoitellaan äänen hallittua kaikumista.

## Tehtävä 14.5.

- a) Kaikuluotaus perustuu äänen etenemiseen eri nopeudella eri aineissa. Lisäksi ääni etenee aina vakionopeudella väliaineessa. Ääni heijastuu rajapinnoissa, jolloin tasaisen liikkeen matkan yhtälön avulla voidaan määrittää rajapintojen etäisyys, kun pulssin edestakainen aika väliaineessa tiedetään.
  
- b) Ultraäänen käyttö kuvantamisessa ei ole vaarallista. Sillä saadaan monesta tutkimuskohteesta riittävän tarkkoja kuvia. Ultraäänen käyttö kuvantamisessa on edullista sekä laitteiden valmistus moniin muihin lääketieteen kuvantamislaitteisiin verrattuna on edullista. Ultraäänen käyttö monissa kuvantamiskohteissa ei tarvitse erityislupia, kuten esimerkiksi ionisoivan säteilyn käyttö vaatii aina käytöstä vastaavan henkilön sekä luvan STUK:lta.

## Tehtävä 14.6.

- a) Seinät heijastavat ja absorboivat ääniaaltoja. Kun seinät rakennetaan vinoiksi, ei ääni heijastu takaisin tulosuuntaansa. Tällöin konserttisaliin ei pääse syntymään seisovia aaltoja, jotka haittaisivat salin akustiikkaa.
  
- b) Konserttisalin seinän huokoiset materiaalit vaimentavat ääniaaltoja. Hyvin ääntä vaimentavat seinämateriaalit lyhentävät jälkikaiunta-aikaa.

## Tehtävä 14.7.

- a) Sinfoniaorkesterin soittimien taajuusalue voi olla 40 Hz – 5 000 Hz.
- b) Sinfoniaorkesterin hentoääniset jousi- ja puhallinsoittimet sijoittuvat orkesteria johtavan kapellimestarin lähelle. Vaskipuhaltimet ja lyömäsoitinten tuottamien äänten intensiteetit ovat suurimpia, joten nämä soittimet on sijoitettu sinfoniaorkesterissa kapellimestarista katsoen sivuille ja taakse.

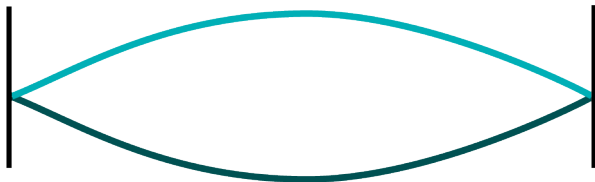
## Tehtävä 14.8.

huoneen seinien välimatka  $L = 5,1 \text{ m}$

äänen nopeus ilmassa  $v = 343 \text{ m/s}$

Perustaajuudella syntyy pisin mahdollinen seisova aalto.

Perustaajuudella seisovan aallon solmukohdat ovat seinien kohdalla, ja niiden välissä on yksi kupu.



Aallonpituudelle on tällöin voimassa  $L = \frac{\lambda}{2}$ .

Aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan saadaan syntyneen seisovan aallon taajuudeksi

$$v = f\lambda = f2L$$

$$f = \frac{v}{2L} = \frac{343 \text{ m/s}}{2 \cdot 5,1 \text{ m}} = 33,62 \text{ Hz} \approx 34 \text{ Hz}.$$

b) Ihmisen puheäänien taajuus on pienimmillään noin 80 Hz, joten syntynyt ääni ei ole ihmisen puheäänien taajuusalueella.

## Tehtävä 14.9.

kaiutinkotelon syvyys  $L_1 = 0,186 \text{ m}$

kaiutinkotelon korkeus  $L_2 = 0,213 \text{ m}$

äänen nopeus ilmassa  $v = 343 \text{ m/s}$

- a) Kun äänen taajuus vastaa kotelon perustaajuutta, kaiutinkoteloon syntyy seisova aalto, jossa on yksi kupu. Syntyneen seisovan aallon aallonpituudelle on voimassa syvyyssuunnassa

$$L_1 = \frac{\lambda_1}{2}$$

ja korkeussuunnassa

$$L_2 = \frac{\lambda_2}{2}.$$

Syntyneiden seisovien aaltojen aallonpituudet ovat

$$\lambda_1 = 2L_1$$

$$\lambda_2 = 2L_2.$$

Aaltoliikkeen perusyhtälön  $v = f\lambda$  mukaan syntyneiden seisovien aaltojen taajuudet ovat

$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2L_1} = \frac{343 \text{ m/s}}{2 \cdot 0,186 \text{ m}} = 922,04 \text{ Hz} \approx 922 \text{ Hz}$$

$$f_2 = \frac{v}{\lambda_2} = \frac{v}{2L_2} = \frac{343 \text{ m/s}}{2 \cdot 0,213 \text{ m}} = 805,16 \text{ Hz} \approx 805 \text{ Hz}.$$

b) Kaiuttimen sisälle syntyy seisova aalto, jonka keskellä on kupu ja päissä on solmut. Kuvun kohdalla ilmamolekyylien liike on suurinta. Kun koko kaiuttimen kotelon täyttää ääntä absorboivalla materiaalilla, materiaali vaimentaa kaiutinkotelon sisälle syntyneitä seisovaa aaltoliikettä. Kaiutinkotelon reunoille syntyy seisovan aaltoliikkeen solmukohdat, joissa molekyylien liike on vähäistä. Jos vain reunoille laitettaisiin materiaalia, kaiutinkotelon sisälle syntyneet seisovat aallot eivät vaimenisi. Lisäksi kaiuttimen sisälle syntyy seisovan aaltoliikkeen ylätaajuuksia. Kun koko kotelo on täytetty ääntä absorboivalla materiaalilla, materiaali vaimentaa myös ylätaajuuksia.

## Tehtävä 14.10.

Veden syvyys mittaushetkellä kaikuluotaimen mukaan on  $s = 10,7 \text{ m}$ .

Ultraääni kulki vedessä tasaisella nopeudella, jonka lämpötila oli  $24,2 \text{ }^{\circ}\text{C}$ , joten taulukkokirjan perusteella lähinnä tätä lämpötilaa oleva ultraäänen nopeus vedessä on  $v = 1\,484 \text{ m/s}$ .

Ultraääni kulkee vedessä veneestä aineiden rajapintaan ja takaisin, jolloin ultraäänen kulkema kokonaismatka on  $s_{\text{kok}} = 2s$ . Lasketaan kulunut aika.

$$s_{\text{kok}} = vt$$

$$t = \frac{s_{\text{kok}}}{v} = \frac{2s}{v} = \frac{2 \cdot 10,7 \text{ m}}{1\,484 \text{ m/s}} = 0,014\,32 \text{ s} \approx 14 \text{ ms}.$$

## Tehtävä 14.11.

Melu on häiritsevää tai kuulolle haitallista ääntä. Kotiin melua voi tulla ulkoa, kuten liikenteestä, tai kodin sisältä esimerkiksi kodinkoneiden, ilmanvaihtokoneiden ja vesiputkien aiheuttamasta kohinasta ja rakenteiden kautta asuntoon kantautuvista äänistä. Myös äänien kaikuminen seinäpinnoista aiheuttaa melua.

Melua voidaan pienentää vähentämällä melunlähteiden tuottamien äänten intensiteettejä. Esimerkiksi liikenteen melua voidaan pienentää käyttämällä niin kutsuttuja hiljaisia tienpinnoitteita, alentamalla nopeusrajoituksia tai vaikkapa parantamalla rautatiekiskojen kiinnitys- ja liitoskohtia.

Melua voidaan vaimentaa eri tavoin. Ulkopuolelta kotiin tulevaa melua voidaan vaimentaa esimerkiksi siten, että suunnitteluvaiheessa rakennuksen ikkunoita ja ovia ei sijoiteta melunlähteiden suuntaan. Melua voidaan vaimentaa myös ääntä eristävillä ikkunoilla ja ovilla sekä käyttämällä seinärakenteessa ääntä vaimentavia eristemateriaaleja. Myös ovien ja ikkunoiden tiivisteiden parantaminen saattaa vähentää kotiin tulevan melun voimakkuutta.

Kovat pinnat heijastavat enemmän ääntä, joten pehmeiden materiaalin käyttö sisustuksessa pienentää kaiusta aiheutuvaa melua. Siksi esimerkiksi seinäpinnoissa voidaan käyttää pehmeitä materiaaleja tai esimerkiksi puupanelointia, josta ääni heijastuu eri suuntiin. Myös sisustuksella, kuten matoilla, verhoilla tai seinävaatteilla sekä huonekaluilla, voidaan vaikuttaa merkittävästi meluun. Ilmastointikanavien melua voidaan pienentää käyttämällä ilmanvaihtokoneessa tarkoitukseen suunniteltuja äänenvaimentimia. Kodinkoneiden energiamerkintöjen avulla voi valita kodinkoneita, jotka tuottavat mahdollisimman vähän melua.

## Tehtävä 14.12.

melun intensiteettitason yläraja asuinalueella  $L_2 = 70$  dB  
äänen intensiteettitaso miksauspöydän kohdalla  $L_1 = 95$  dB  
miksauspöydän etäisyys konserttilavasta  $r_1 = 65$  m

a) Äänen intensiteetti miksauspöydän kohdalla saadaan  
äänen intensiteettitason avulla

$$L_1 = 10 \lg \left( \frac{I_1}{I_0} \right) \text{ dB} \quad \| : 10 \text{ dB}$$

$$\frac{L_1}{10 \text{ dB}} = \lg \left( \frac{I_1}{I_0} \right) \quad \| 10^{(\cdot)}$$

$$10^{\lg \left( \frac{I_1}{I_0} \right)} = 10^{\frac{L_1}{10 \text{ dB}}}$$

$$\frac{I_1}{I_0} = 10^{\frac{L_1}{10 \text{ dB}}} \quad \| \cdot I_0$$

$$I_1 = I_0 \cdot 10^{\frac{L_1}{10 \text{ dB}}}$$

$$= 1 \cdot 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 10^{\frac{95 \text{ dB}}{10 \text{ dB}}} = 1 \cdot 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 10^{9,5} = 1 \cdot 10^{-2,5} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$= 3,162 \cdot 10^{-3} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \approx 3,2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

- b) Äänen intensiteettitason avulla voidaan määrittää, kuinka suuri voi äänen intensiteetti olla asuinalueella. Melun intensiteetti asuinalueella voi olla

$$L_2 = 10 \lg \left( \frac{I_2}{I_0} \right) \text{ dB} \quad \parallel : 10 \text{ dB}$$

$$\frac{L_2}{10 \text{ dB}} = \lg \left( \frac{I_2}{I_0} \right) \quad \parallel 10^{(\cdot)}$$

$$10^{\lg \left( \frac{I_2}{I_0} \right)} = 10^{\frac{L_2}{10 \text{ dB}}}$$

$$\frac{I_2}{I_0} = 10^{\frac{L_2}{10 \text{ dB}}} \quad \parallel \cdot I_0$$

$$I_2 = I_0 \cdot 10^{\frac{L_2}{10 \text{ dB}}}$$

$$= 1,0 \cdot 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 10^{\frac{70 \text{ dB}}{10 \text{ dB}}} = 1,0 \cdot 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 10^{7,0} = 1,0 \cdot 10^{-5,0} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

Äänilähteen tuottaman äänen intensiteetti on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön  $I \sim \frac{1}{r^2}$ .

Intensiteettien suhteeksi saadaan  $\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$ .

Asuinalueen tulee olla konserttilavasta etäisyydellä

$$r_2^2 = \frac{I_1}{I_2} r_1^2$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{I_1}{I_2} r_1^2} = \sqrt{\frac{1,0 \cdot 10^{-2,5} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}{1,0 \cdot 10^{-5,0} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}} \cdot (65 \text{ m})^2} = 1155,882 \text{ m} \approx 1200 \text{ m}.$$

- c) Todellisuudessa ääni absorboituu väliaineeseen. Tämän vuoksi intensiteetti pienenee teoreettista mallia enemmän ja konsertti voidaan pitää myös laskettua tulosta lähempänä.

## Tehtävä 14.13.

- a) Lääketieteellisessä diagnostiikassa käytettävässä ultraäänitutkimuksessa ultraäänikuva muodostetaan kudosten rajapinnoilta heijastuneiden signaalien perusteella. Kun ultraääni osuu rajapintaan, osa ultraäänestä läpäisee rajapinnan ja osa heijastuu. Kun ultraäänisignaalin nopeus kudoksessa tunnetaan, ultraäänisignaalin ja kaiun välisestä aikaerosta saadaan selville, kuinka kaukana rajapinta sijaitsee. Ultraääntä käytetään hyvin yleisesti esimerkiksi sikiön tai pehmytkudoksen, kuten sydämen tai sappirakon tutkimisessa.
- b) Dopplerin ilmiössä aaltoliikkeen taajuus muuttuu, jos aaltolähde tai havaitsija liikkuu. Doppler-ultraäänilaitteella voidaan siten mitata esimerkiksi veren keskimääräinen nopeus verisuonessa. Kun ultraääni heijastuu liikkuvista punasoluista, ultraäänen taajuus muuttuu. Doppler-ultraäänilaitteella voidaan myös tutkia napanuoran sijaintia istukassa tai kuunnella sikiön sydämenlyöntejä.

c) kaikuluotaus esim. veneilyssä

- vaskulaarinen ultraääni, esim. veren virtauksen määrä ja veren nopeus
- neurosonografia, esim. aivojen visualisointi ja poikkeamat verenkierrossa
- ekokardiografia, esim. sydämen aortan ja keuhkovaltimon tutkiminen, neulan ohjaaminen paiseeseen ultraäänen avulla
- ultraäänitutka autoissa
- fysioterapia: polven eturistisiteen tutkiminen, lihaksen kudusrakenteen koon ja muodon tutkiminen
- ultraäänipesuri: pienten asioiden, kuten kellojen koneistojen osien puhdistaminen, tieteessä käytettävien pienten mitta-astioiden puhdistaminen. Perustuu ultraäänipesurin pesuveteen tapahtuvaa kavitaatioon. Ultraääni aiheuttaa pesuveteen kavitaatioilmakuplia, joiden nopea puhkeaminen synnyttää paineaaltoja. Paineaallot aiheuttavat lian värähtelyn ja lika irtaantuu puhdistettavan esineen pinnasta.

## Tehtävä 14.14.

intensiteettitaso  $L_1 = 90$  dB

intensiteettitaso lopussa  $L_2 = 30$  dB.

a) Johdetaan yhtälö äänen intensiteetille.

$$L_x = 10 \lg \left( \frac{I_x}{I_0} \right) \text{ dB} \quad \parallel : 10 \text{ dB}$$

$$\frac{L_x}{10 \text{ dB}} = \lg \left( \frac{I_x}{I_0} \right) \quad \parallel 10^{(\cdot)}$$

$$10^{\lg \left( \frac{I_x}{I_0} \right)} = 10^{\frac{L_x}{10 \text{ dB}}}$$

$$\frac{I_x}{I_0} = 10^{\frac{L_x}{10 \text{ dB}}} \quad \parallel \cdot I_0$$

$$I_x = I_0 \cdot 10^{\frac{L_x}{10 \text{ dB}}}$$

b) Lasketaan äänen intensiteetti alussa

$$I_1 = I_0 \cdot 10^{\frac{L_1}{10 \text{ dB}}}$$

$$= 1,0 \cdot 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 10^{\frac{90 \text{ dB}}{10 \text{ dB}}} = 1,0 \cdot 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 10^9 = 1,0 \cdot 10^{-3} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

- c) Jälkikaiunta-ajan aikana äänen intensiteettitaso on laskenut 60 dB eli intensiteettitaso jälkikaiunta-ajan jälkeen on  $L_2 = 90 \text{ dB} - 60 \text{ dB} = 30 \text{ dB}$ .

Lasketaan intensiteettien suhde

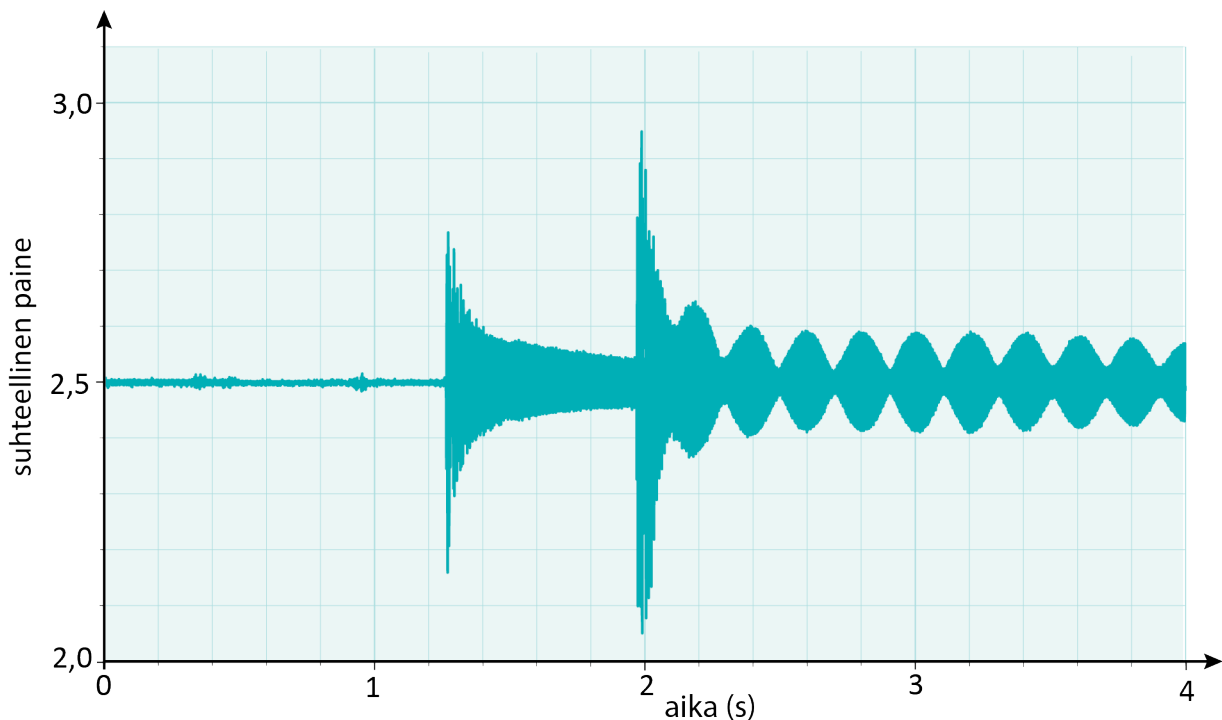
$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{I_0 \cdot 10^{\frac{L_1}{10 \text{ dB}}}}{I_0 \cdot 10^{\frac{L_2}{10 \text{ dB}}}} = \frac{10^{\frac{90 \text{ dB}}{10 \text{ dB}}}}{10^{\frac{30 \text{ dB}}{10 \text{ dB}}}} = 1\,000\,000.$$

Äänen intensiteetti on miljoonaertainen alussa verrattuna intensiteettiin lopussa.

## Tehtävä 14.15.

Ääni vaimenee ilmassa enemmän kuin juomalasissa, jolloin ääni kuuluu hieman selvempänä, kun korva on juomalasissa kiinni. Seinästä ääni siirtyy lasiin rakenneosasten mekaanisena värähtelynä.

## Tehtävä 14.16.



- a) Kitaran soinnissa havaitaan huojunta. Jos äänten taajuudet eivät ole täsmälleen samat, interferenssi voimistaa ja heikentää kuultavan äänen voimakkuutta jaksollisesti. Tällöin ääniaaltojen muodostaman summa-aallon amplitudi vuoroin suurenee ja pienenee. Tätä kutsutaan huojunnaksi.
- b) Kuvaajasta voidaan mitata, että viiteen jaksottaiseen äänen voimakkuuden vaihteluun kuluva aika on  $t = 1,1017$  s. Huojunnan taajuus on sama kuin soitettujen sävelten taajuusero. Taajuuseroksi saadaan  $f = 1/T = 5/t = 5/1,1017 \text{ s} \approx 4,5 \text{ Hz}$ .

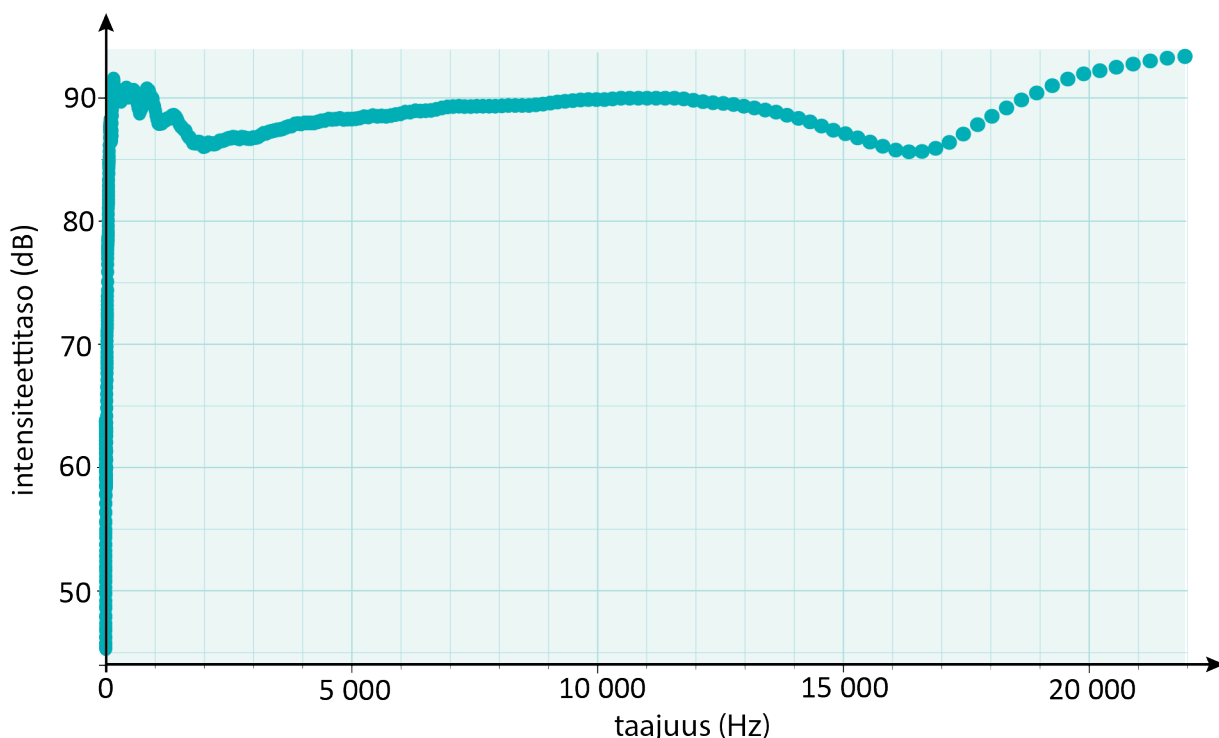
## Tehtävä 14.17.

Kuvaaja A esittää kylpyhuoneessa ja kuvaaja B makuuhuoneessa tehtyä mittausta.

Ääni etenee huoneilmassa lähes vakionopeudella. Kun ääni osuu seinään, osa äänestä heijastuu, osa absorboituu ja taittuu seinämateriaaliin. Mitä vähemmän ääni heijastuu seinästä, sitä nopeammin ääni vaimenee huoneessa. Kylpyhuoneen seinän pintamateriaalit ovat tyypillisesti kovia ja tasaisia, jolloin huoneeseen tuotettu ääni heijastuu seinästä enemmän kuin normaalissa huoneessa. Makuuhuoneen seinämateriaali on pehmeämpää ja makuuhuoneessa on huonekaluja, jonka pehmeät materiaalit absorboivat ääntä kylpyhuoneen kovia pintoja enemmän. Koska makuuhuoneen materiaalit absorboivat ääntä voimakkaammin, äänen suhteellinen paine pienenee nopeammin kuin pesuhuoneessa. Kuvaajassa B äänen suhteellinen paine pienenee nopeammin, joten se on mitattu makuuhuoneessa ja kuvaajan A mittaus pesuhuoneessa.

## Tehtävä 14.18.

a)



b) Interpoloidaan kuvaajasta taajuus, joka ylittää 85 dB:n intensiteettitason. Kuullun äänen matalin taajuus on  $f = 79$  Hz.

c) Alle 79 Hz:n taajuuksia tuotetaan subwoofer-kaiuttimilla. Nämä ovat kaiuttimia, jotka on suunniteltu matalien äänien toistoon. Subwoofer-kaiuttimissa on yleensä iso bassoelementti. Iso elementti pystyy värähtelemään hitaasti ja samalla se tuottaa riittävän suuren äänen paineen muutoksen, joka kuullaan äänenä.

## Tehtävä 14.19.

a) Jos jousivakio on suuri, materiaali on kovaa. Mitä suurempi jousivakio on, sitä enemmän tarvitaan voimaa aineen puristamiseksi kokoon. Jos jousivakio on pieni, materiaali on pehmeämpi.

b) Yksittäiselle jouselle värähtelyn jaksonaika on  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ .

Yhtälöstä voidaan päätellä, että mitä suurempi jousivakio on, sitä lyhyempi värähdysten jaksonaika on. Tästä voidaan päätellä, että monen jousen systeemissä värähdys etenee nopeasti, jos jousivakio on suuri ja hitaasti, jos jousivakio on pieni.

c) Edellisten kohtien perusteella voidaan päätellä, että kovien materiaalien jousivakiot ovat arvoltaan suuria ja pehmeiden materiaalien jousivakiot ovat pieniä. Kovissa materiaaleissa äänen nopeus on siis suuri.

Materiaaliin tuleva ääni kokonaisuudessaan heijastuu pinnasta, ellei ääni osu pintaan kohtisuorasti. Tämän vuoksi kovat materiaalit heijastavat suuremman osan tulevasta äänestä kuin pehmeät.

## Tehtävä 14.20.

a) Heijastuskerroin  $R = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$ . Heijastumista ei tapahdu lainkaan, kun  $R = 0$ . Näin käy, kun  $Z_1 = Z_2$ . Tällöin aineiden akustiset impedanssit ovat samat, eikä heijastumista tapahdu.

b) ilman akustinen impedanssi  $Z_{1,\text{ilma}} = 0,00041 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}} = 410 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}}$

geelin akustinen impedanssi  $Z_{1,\text{geeli}} = 1,5 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}}$

ihon akustinen impedanssi  $Z_2 = 1,99 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}}$

Heijastuskerroin ilman ja ihon rajapinnassa on

$$R = \frac{Z_2 - Z_{1,\text{ilma}}}{Z_2 + Z_{1,\text{ilma}}} = \frac{1,99 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}} - 410 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}}}{1,99 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}} + 410 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}}} \\ = 0,99959 \approx 100 \%$$

Koska ilman ja ihon akustiset impedanssit ovat niin erilaiset, käytännössä kaikki ultraääni heijastuu ilman ja ihon rajapinnasta, eikä ultraääntä etene lainkaan kudokseen.

Heijastuskerroin geelin ja ihon rajapinnassa on

$$R = \frac{Z_2 - Z_{1,\text{geeli}}}{Z_2 + Z_{1,\text{geeli}}} = \frac{1,99 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}} - 1,5 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}}}{1,99 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}} + 1,5 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}}} \\ = 0,14040 \approx 14 \, \%.$$

eli ainoastaan 14 % ultraäänestä heijastuu geelin ja ihon rajapinnassa.

Kun ihon pinnalle levitetään tarkoitukseen suunniteltua geeliä, saadaan ultraääni etenemään tutkittavaan kudokseen. Ilman geeliä mittausta on mahdoton tehdä.

- c) Kun poskiontelo on terve ja täynnä ilmaa, ultraääni heijastuu voimakkaasti jo ontelon etureunasta eli läheltä posken ihon pintaa.

Kun poskiontelo on tulehtunut ja se on täynnä märkäistä eritettä, ultraääni etenee poskessa aina ontelon takana olevaan luuhun saakka. Luusta saadaan voimakas ultraäänikaiku. Poskiontelon takaseinä on aikuisella ihmisellä vähintään 2,5 cm:n etäisyydellä posken etureunasta, joten tulehtuneesta poskiontelosta saadaan voimakas kaiku vasta melko syvältä kudoksesta.

- d) alkuperäinen taajuus  $f_0 = 3\,052,0\text{ Hz}$   
heijastuvan ultraäänen taajuus on  $f = 3\,053,9\text{ kHz}$   
ultraäänen ja veren virtaussuunnan välinen  
kulma  $\theta = 70^\circ$   
ultraäänen nopeus veressä on  $c = 1\,575\text{ m/s}$

Taajuuden muutos on

$$\Delta f = f - f_0 = 3\,053,9\text{ kHz} - 3\,052\text{ kHz} = 1,9\text{ kHz}.$$

Heijastuvan ultraäänipulssin taajuuden muutos on

$$\Delta f = 2 \frac{v}{c} f_0 \cos \theta.$$

Veren virtausnopeudeksi saadaan yhtälön perusteella

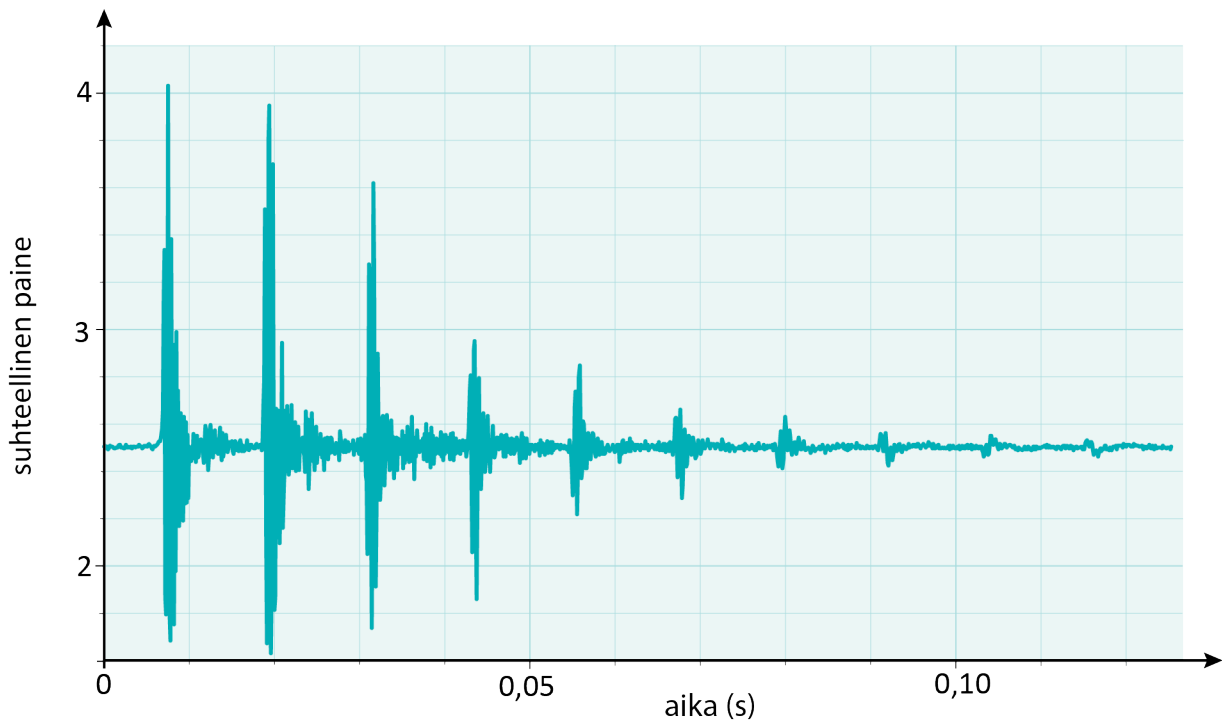
$$v = \frac{c \Delta f}{2 f_0 \cos \theta} = \frac{1\,575 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1,9\text{ kHz}}{2 \cdot 3\,052\text{ kHz} \cdot \cos 70^\circ} = 1,433 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 1,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ultraäänisignaali heijastuu veren punasoluista takaisin kohti anturia. Koska anturin havaitsema heijastuneen äänen taajuus kasvaa, Dopplerin ilmiön mukaan heijastuneen äänen lähde liikkuu kohti ultraäänianturia. Koska äänen taajuus kasvaa, veri virtaa kohti anturia.

## Tehtävä 14.21.

putken pituus on  $l = 2\,055\text{ mm}$

a)



(akselit oikein päin 1 p, mittauspisteet näkyvät kuvaajassa 1 p, kuvaaja on selkeä 1 p)

b) Kuvaajassa ensimmäinen piikki on naksuttimesta syntynyt ääni. Muut piikit ovat putken toisesta päästä heijastuneen äänen tuottamia paineaaltoja. (1 p)

Ääni kulkee putken pituisen matkan, heijastuu ja kulkee saman matkan takaisin. (1 p)

Määritetään kuvaajasta viiteen edestakaiseen matkaan kulunut aika.

$t = 0,0601$  s. (1 p, Huom! Ajan voi määrittää yhdestäkin edestakaisesta matkasta.)

Ääni etenee vakionopeudella. Äänen kulkema matka edellä määritetyssä ajassa on

$$s = 5 \cdot 2l = 10l = 10 \cdot 2\,055 \text{ mm} = 20\,550 \text{ mm}. \quad (1 \text{ p})$$

Äänen nopeus on

$$v = \frac{s}{t} = \frac{10l}{t} = \frac{10 \cdot 2\,055 \text{ mm}}{0,0601 \text{ s}} = 341,93 \text{ m/s} \approx 342 \text{ m/s}. \quad (2 \text{ p})$$

- c) Äänen nopeuden määrittäminen riippuu äänen kulkeman matkan ja ajan määrittämisestä. Mittauksessa syntyneitä virheitä voidaan pienentää, kun pienennetään mittausajan ja matkan virheitä (2 p).

Mitä pidemmän matkan ääni kulkee, sitä pienempi matkan määrittämisvirhe on. (1 p) Matka pitenee, mikäli tutkimus suoritetaan käyttämällä pidempää putkea. Mitä useampi edestakainen matka saadaan mitattua, sitä pienempi mittausvirhe on. (1 p)

Ajan mittaamiseen liittyvää virhettä voidaan pienentää, kun valitaan tarkalleen sama aallon kohta, josta äänen kulkema aika määritetään. Myös mittaustaajuuden suurentaminen pienentää virhettä. (1 p)

Äänen nopeuden virhettä voidaan pienentää myös toistamalla koe useita kertoja ja määrittämällä toistokokeissa saatujen äänen nopeuksien keskiarvo. (1 p)

TAI

Koe voidaan suorittaa eripituisilla putkilla. Tällöin eripituisilla putkilla voidaan määrittää äänen kulkema matka ja aika ja nämä mittaukset voidaan esittää  $(t, s)$ -koordinaatistossa. Koordinaatistoon merkittyihin mittauspisteisiin sovitettua suoran fysikaalinen kulmakerroin on äänen nopeus.

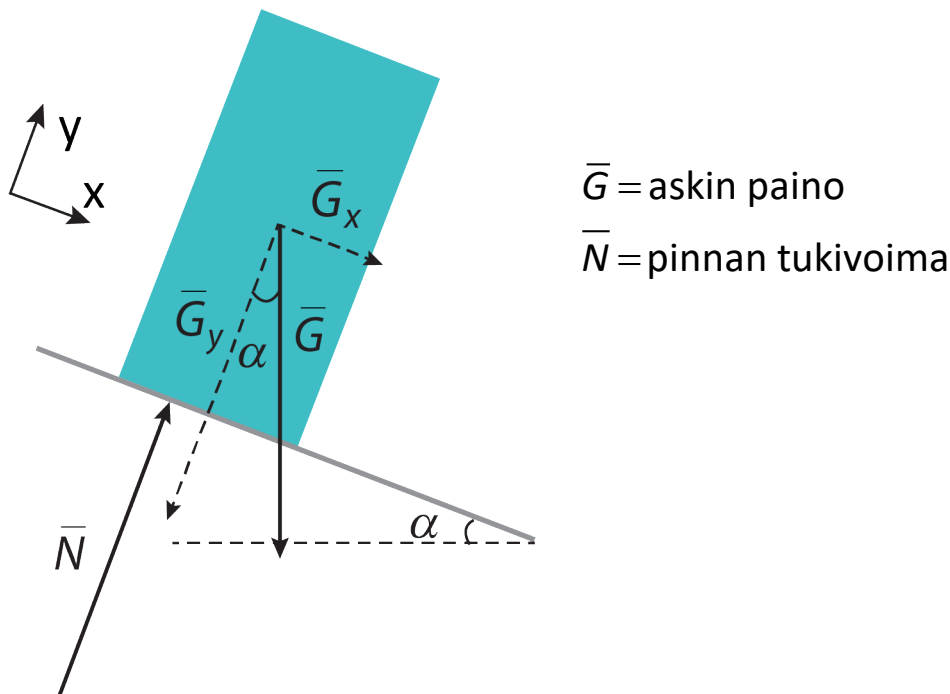
# Kertauskoe

## Tehtävä 1.

- a) C
- b) C
- c) D
- d) D
- e) D
- f) C

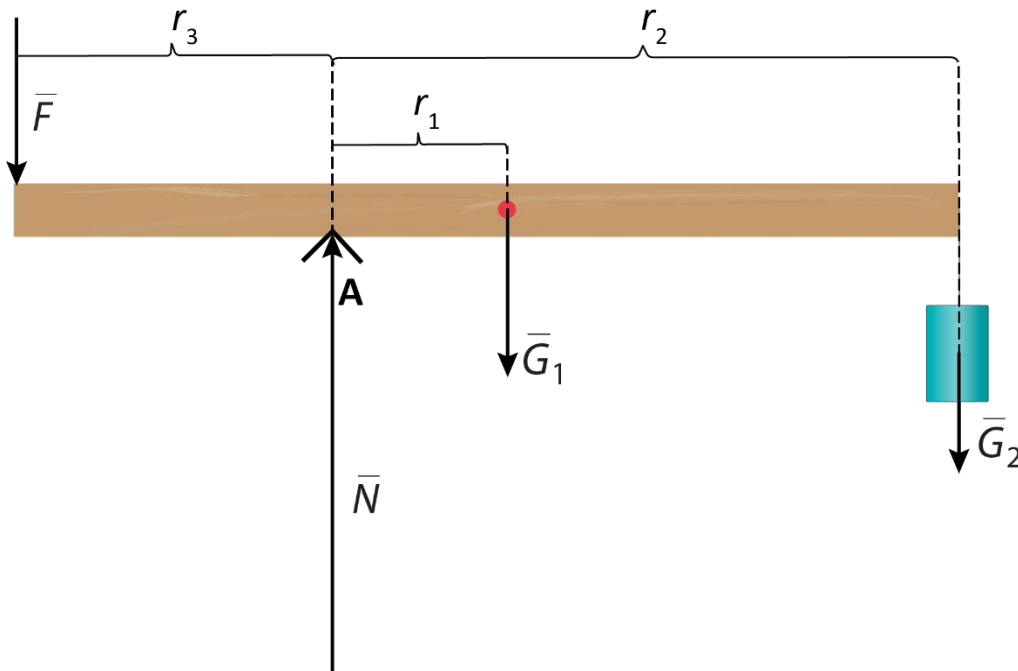
## Tehtävä 2.

Aski D kaatuu ensimmäisenä. Tulitikkuaski kaatuu, kun painon vaikutussuora ei enää kulje tukipinnan kautta. Askin D tukipinta on kallistussuunnassa kapea ja askin painopiste on korkealla. Askin painon vaikutussuora ohittaa tukipinnan jo melko pienellä kallistuskulmalla. Tämä voidaan todeta myös voimakuvion avulla.



### Tehtävä 3.

Laaditaan tilanteesta voimakuvio.



$\vec{G}_1$  = lankun paino

$\vec{G}_2$  = punnuksen paino

$\vec{N}$  = tuentakohdan lankkuun kohdistama tukivoima

$\vec{F}$  = lankkuun kohdistettu voima

lankun pituus  $l = 2,8 \text{ m}$

tuentakohdan etäisyys lankun painopisteestä  $r_1 = 0,65 \text{ m}$

lankun massa  $m_1 = 13 \text{ kg}$

punnuksen massa  $m_2 = 7,2 \text{ kg}$

putoamiskiihtyvyys  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

Lankku on symmetrinen, joten lankun painopiste sijaitsee lankun keskikohdassa. Punnuksen etäisyys tuentakohdasta

on  $r_2 = \frac{l}{2} + r_1 = \frac{2,8 \text{ m}}{2} + 0,65 \text{ m} = 2,05 \text{ m}.$

Lankun toiseen päähän kohdistetaan voima  $F$ , joka on etäisyydellä  $r_3$  tuentapisteestä A.

$$r_3 = 1,4 \text{ m} - 0,65 \text{ m} = 0,75 \text{ m}$$

Voimakuvion mukaan lankkua pitää painaa alaspäin, jotta lankku olisi pyörimisen suhteen tasapainossa.

Tarkastellaan voimien lankkuun kohdistamia momentteja tuentapisteen A suhteen. Kun lankku on pyörimisen suhteen tasapainossa, on voimassa

$$\Sigma M_A = 0$$

$$Fr_3 - G_1r_1 - G_2r_2 = 0.$$

Lankkua täytyy painaa voimalla

$$\begin{aligned} F &= \frac{G_1r_1 + G_2r_2}{r_3} \\ &= \frac{m_1gr_1 + m_2gr_2}{r_3} \\ &= \frac{13 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,65 \text{ m} + 7,2 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2,05 \text{ m}}{0,75 \text{ m}} \end{aligned}$$

$$F = 303,5868 \text{ N} \approx 300 \text{ N}.$$

Lankkuun pitää kohdistaa 300 N voima alaspäin, jotta se pysyy vaakasuorassa.

b) Lankku on tasapainossa etenemisen suhteen, jolloin Newtonin II lain mukaan voimille voidaan esittää suunnat huomioituna

$$N - F - G_1 - G_2 = 0.$$

Tuentakohtaan kohdistuvan voiman suuruus a-kohdan tulosta apuna käyttäen on

$$\begin{aligned} N &= F + G_1 + G_2 \\ &= F + m_1 g + m_2 g \\ &= 303,5868 \text{ N} + 13 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 + 7,2 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \\ &= 501,7488 \text{ N} \approx 500 \text{ N}. \end{aligned}$$

## Tehtävä 4.

- a) Kun punnus on keskellä viivainta, molemmat voima-anturit näyttävät likipitäen samaa lukemaa. Kun punnusta siirretään kohti viivaimen päätä, anturin lukemat muuttuvat. Lähempänä punnusta oleva anturi näyttää suurempaa lukemaa kuin alussa. Kauempana oleva anturi näyttää vastaavasti pienempää lukemaa.
- b) Viivain pysyy tasapainossa, joten systeemiin vaikuttavien momenttien summa on nolla. Viivaimen painopistettä voidaan pitää kiertoakselina. Kun punnusta siirretään kohti viivaimen toista päätä, punnuksen paino aiheuttaa viivaimelle momentin. Toisen voima-anturin tukivoiman täytyy kasvaa, jotta momenttien summa olisi edelleen nolla ja viivain pysyisi tasapainossa.
- c) Kun punnus asetetaan videolla olevan oikeanpuoleisen voima-anturin päälle, näyttää oikeanpuoleinen anturi lukemaa  $F_o = 3,36 \text{ N}$  ja vasemmanpuoleinen  $0 \text{ N}$ . Tällöin koko punnuksen paino on oikeanpuoleisen voima-anturin päällä. Punnusten massaksi saadaan

$$F_o = mg$$

$$m = \frac{F_o}{g} = \frac{3,36 \text{ N}}{9,81 \text{ m/s}^2} = 0,3425 \text{ kg} \approx 343 \text{ g}.$$

## Tehtävä 5.

avaruusaluksen säde  $r = 335 \text{ m}$

putoamiskiihtyvyys  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

Kokemus painosta Maan pinnalla on  $G = mg$ .

Kun avaruusalus pyörii akselinsa ympäri, astronautti on tasaisessa ympyräliikkeessä. Newtonin II lain mukaan astronauttiin kohdistuu voima  $F$  ympyräradan keskipistettä kohden. Voima aiheuttaa tasaisessa ympyräliikkeessä olevalle astronautille normaalikiihtyvyyden  $a_n$  ympyräradan keskipistettä kohti.

$$F = ma_n.$$

Kun astronautin normaalin suuntainen voima on yhtä suuri kuin astronautin paino, astronautin ratanopeudeksi saadaan

$$F = G$$

$$ma_n = mg$$

$$a_n = g$$

$$\frac{v^2}{r} = g$$

$$v = \sqrt{gr}.$$

Astronautin yhteen kierrokseen kulunut aika on yhtä suuri kuin aluksen yhteen pyörähdykseen kulunut aika. Koska astronautti on tasaisessa ympyräliikkeessä, kierrokseen kuluneelle ajalle on voimassa

$$t = \frac{s}{v} = \frac{2\pi r}{v}.$$

Sijoitetaan aiemmin ratkaistu ratanopeus  $v = \sqrt{gr}$ .

Tällöin kierrosaika on  $t = \frac{2\pi r}{\sqrt{gr}}$ .

Kierrosten määrä 60 sekunnin aikana

$$N = \frac{60 \text{ s}}{t} = \frac{60 \text{ s}}{\frac{2\pi r}{\sqrt{gr}}} = \frac{60 \text{ s} \sqrt{gr}}{2\pi r} = \frac{60 \text{ s}}{2\pi} \sqrt{\frac{gr}{r^2}} = \frac{60 \text{ s}}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{r}}$$

$$= \frac{60 \text{ s}}{2\pi} \sqrt{\frac{9,81 \text{ m/s}^2}{335 \text{ m}}} = 1,634 \, 41 \approx 1,63 \text{ kierrosta}.$$

Avaruusaluksen pitää pyöriä 1,63 kierrosta minuutissa, jotta avaruusaluksessa olevan astronautin paino vastaisi painoa maapallon pinnalla.

## Tehtävä 6.

- a) Kun alumiinilevyä aletaan pyörittää, aluksi kaikki kolikot pysyvät paikoillaan. Kun nopeus suurenee, kolikot lähtevät liukumaan levyä pitkin. Ensimmäisenä liukumaan lähtee kolikko, joka on kauimpana kiertoakselista. Tämän jälkeen liukuu keskimäinen ja viimeisenä kiertoakselia lähinnä oleva kolikko.
- b) Lepokitka pitää kolikon ympyräradalla ja myös lisää kolikon nopeutta. Tarkastellaan hetkeä, jolloin kolikko lähtee liukumaan levyä pitkin. Newtonin II lain mukaan suunnat huomioituna säteen suunnassa

$$F_{\mu 0} = ma_n.$$

Vaakasuuralla pinnalla  $F_{\mu 0} = \mu_0 N = G = mg$  ja  $a_n = \frac{v^2}{r}$ .

Saadaan ehdoksi

$$\mu_0 mg = m \frac{v^2}{r}$$

$$\mu_0 g = \frac{v^2}{r}.$$

Kolikko on tasaisessa ympyräliikkeessä, jolloin yhden kierroksen aikana

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{t}.$$

Saadaan

$$\mu_0 g = \frac{\left(\frac{2\pi r}{t}\right)^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{t^2}.$$

Mitä suurempi on etäisyys ympyräliikkeen keskipisteestä, sitä suurempi pitää olla lepokitkakertoimen. Tämä vuoksi kauempana levyn keskipisteestä oleva kolikko lähtee liikkeelle ensin.

Yhtälöstä havaitaan, että kolikon ja alumiinilevyn pinnan välinen lepokitkakerroin  $\mu_0$  on suoraan verrannollinen kolikon etäisyyteen alumiinilevyn pyörimisakselista  $r$  eli  $\mu_0 \sim r$ . Tästä voidaan päätellä, että mitä kauempana kolikko on kiertoakselista, sitä suurempi lepokitkakertoimen pitää olla, jotta kolikko pysyisi paikallaan levyssä. Siksi kauimpana kiertoakselista oleva kolikko lähtee liukumaan ensimmäisenä ja lähimpänä oleva kolikko viimeisenä.

## Tehtävä 7.

satelliitin 2 säde  $r_2$

satelliitin 1 säde  $r_1 = 2r_2$

satelliitin 2 massa  $m_2$

satelliitin 1 massa  $m_1 = 2m_2$

Satelliitin nopeus ratkaistaan sen liikeyhtälöstä.

$$F = ma_n$$
$$\gamma \frac{mM}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$
$$v = \sqrt{\gamma \frac{M}{r}}$$

Satelliitin liike-energia voidaan laskea yhtälöstä

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$
$$= \frac{1}{2}m \sqrt{\gamma \frac{M}{r}}^2 = \gamma \frac{mM}{2r}.$$

Lasketaan liike-energioiden suhde.

$$\frac{E_{k1}}{E_{k2}} = \frac{\gamma \frac{m_1 M}{2r_1}}{\gamma \frac{m_2 M}{2r_2}} = \frac{\cancel{\gamma} \frac{m_1 \cancel{M}}{2r_1}}{\cancel{\gamma} \frac{m_2 \cancel{M}}{2r_2}} = \frac{2m_2}{2r_2} = \frac{2m_2}{2r_2} \cdot \frac{r_2}{m_2} = 1$$

Liike-energiat ovat yhtä suuret.

## Tehtävä 8.

punnuksen massa  $m_1 = 0,370 \text{ kg}$

jousen venymä punnuksella  $x_1 = 0,014 \text{ m}$

a) jousen venymä hauen tapauksessa  $x_2 = 0,068 \text{ m}$

Määritetään ensin jousen jousivakio. Kun jouseen ripustetaan punnus, jousi asettuu tasapainotilaan ja Newtonin II lain mukaan suunnat huomioituna

$$F_j - G_1 = 0$$

$$kx_1 = m_1 g.$$

Jousen jousivakioksi saadaan

$$k = \frac{m_1 g}{x_1} = \frac{0,370 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{0,014 \text{ m}} = 259,264 \text{ N/m}.$$

Kun jouseen ripustettiin hauki, jousi ja hauki asettuvat tasapainoon. Newtonin II lain mukaan suunnat huomioituna

$$F_j - G_2 = 0$$

$$kx_2 = m_2 g.$$

Hauen massa on

$$m_2 = \frac{kx_2}{g} = \frac{m_1 g x_2}{x_1 g} = \frac{m_1 x_2}{x_1} = \frac{0,370 \text{ kg} \cdot 0,068 \text{ m}}{0,014 \text{ m}} = 1,797 \text{ kg} \approx 1,8 \text{ kg}.$$

b) Lasketaan jousen venymä, kun kalan massa on 1,0 kg.

a-kohdan mukaan saadaan ehto

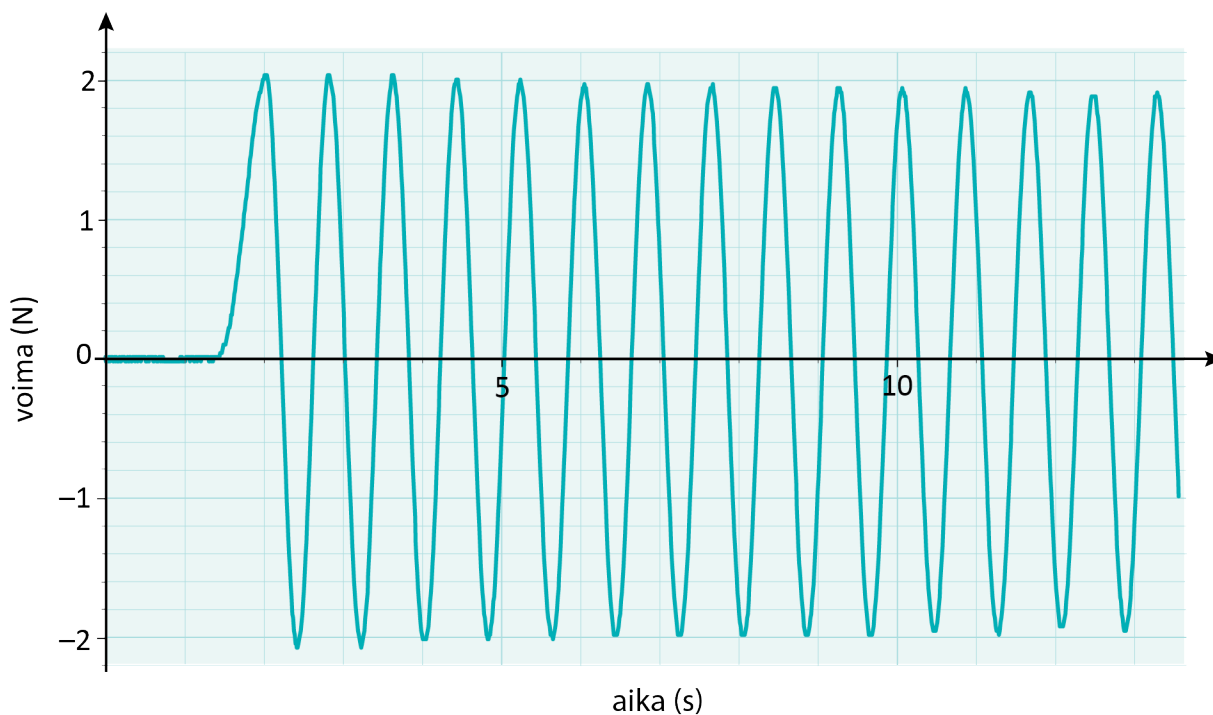
$$kx = mg$$

$$x = \frac{mg}{k} = \frac{1,0 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{259,264 \text{ N/m}} = 0,0378 \text{ m} \approx 3,8 \text{ cm}.$$

## Tehtävä 9.

punnuksen massa  $m = 410 \text{ g}$

a) Esitetään voima-anturin lukema ajan suhteen.



Jousen voima välittyy voima-anturiin, joten jousen voima muuttuu samalla tavalla kuin voima-anturin lukema. Määritetään jousen värähtelyn jaksonaika kymmenen värähdyksen jaksonajan keskiarvosta.

$$T = \frac{8,04 \text{ s}}{10} = 0,804 \text{ s} \approx 0,80 \text{ s}$$

b) Voima-anturi nollattiin, kun punnus roikkui vapaana jousessa. Kun joustaa venytetään, voima välittyy jousen kautta voima-anturille. Jousen voima muuttuu yhtä paljon kuin voima-anturin voima. Kuvaajan ensimmäinen voiman lukeman kasvu on venytystapahtuma. Joustaa venytettiin enimmillään 2,06 N:n voimalla. Jousi vaikuttaa käteen yhtä suurella, mutta vastakkaissuuntaisella voimalla kuin käsi jouseen. Tällöin venytyksessä jousen jousivoima  $F = 2,06 \text{ N}$ .

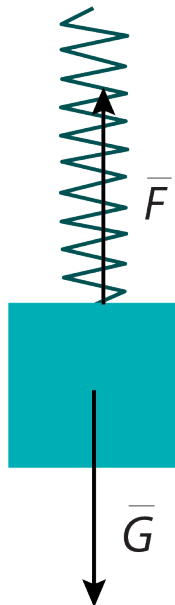
Määritetään jousen jousivakio jaksonajan perusteella.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$
$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{m}{k}$$
$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$$

Jousen venymä saadaan jousivoiman avulla

$$F = kx = \frac{4\pi^2 m}{T^2} x$$
$$x = \frac{FT^2}{4\pi^2 m} = \frac{2,06 \text{ N} \cdot (0,804 \text{ s})^2}{4\pi^2 \cdot 0,410 \text{ kg}} = 0,0822689 \text{ m} \approx 8,2 \text{ cm}.$$

c) Piirretään voimakuvio tilanteesta, jossa punnus on ripustettu jouseen.



$\bar{G}$  = punnuksen paino

$\bar{F}$  = jousen jousivoima

Valitaan positiivinen suunta ylöspäin. Kun punnus on paikallaan ja tasapainossa, Newtonin II lain mukaan punnukseen kohdistuva kokonaisvoima on

$$F - G = 0.$$

Kun punnus ripustettiin jouseen, jousen venymä oli

$$F = G$$

$$kx = mg$$

$$x = \frac{mg}{k}.$$

Koska jousivakio on jouselle ominainen suure, b-kohdan mukaan jousen venymäksi saadaan

$$x = \frac{\cancel{m}g}{\frac{4\pi^2 \cancel{m}}{T^2}} = \frac{gT^2}{4\pi^2} = \frac{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (0,804 \text{ s})^2}{4\pi^2} = 0,1606 \text{ m} \approx 16,1 \text{ cm}.$$

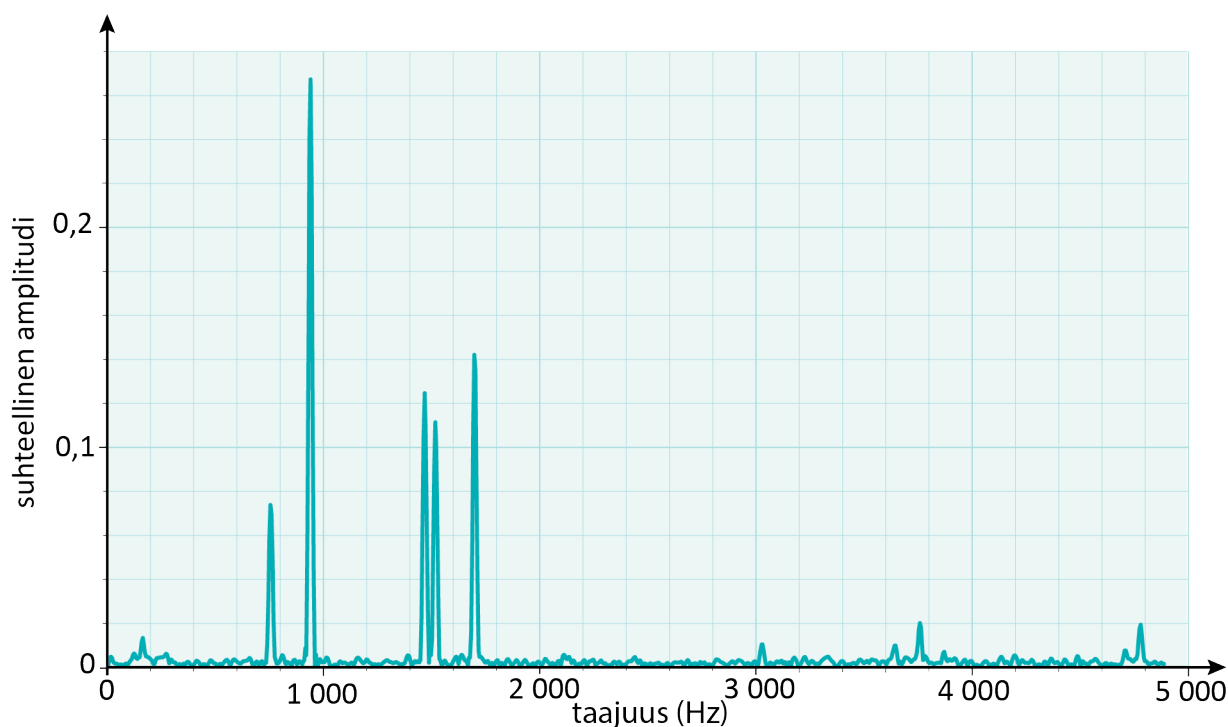
Kun punnus otettiin jousesta pois, jousi lyheni venymän  $x = 16,1 \text{ cm}$  verran.

## Tehtävä 10.

- a) Videolta havaitaan, että aluksi molemmat punnukset heiluivat samaan tahtiin. Sitten toinen punnuksista poistettiin ja heilahduksen amplitudia kasvatettiin. Seuraavaksi langan pituutta lyhennettiin ja heilahdusaika lyheni selvästi.
- b) Jaksonaikaan vaikuttaa langan pituus. Mitä pidempi on lanka, sitä suurempi on jaksonaika. Videon on kaksi eri massaista kuulaa. Video perusteella matemaattisen heilurin langan päässä oleva massa ei vaikuta heilahdusaikaan. Myös heilahtelun amplitudi ei vaikuta jaksonaikaan.
- c) Videon perusteella kuuden heilahduksen aika on  $t = 29,58 \text{ s} - 21,04 \text{ s} = 8,18 \text{ s}$ . Heilurin heilahdusaika on  $T = 8,18 \text{ s} / 6 = 1,363 \text{ s} \approx 1,4 \text{ s}$ .

## Tehtävä 11.

- a) Ääni ilmassa on ilmassa eteneviä paineaaltoja. Kun triangelia lyödään teräksisellä puikolla, triangeli alkaa värähdellä. Värähtely aiheuttaa ilmaan jaksottaisesti muuttuvia paineaaltoja eli ääntä.
- b) Määritetään triangelin tuottamien äänten taajuudet FFT-analyysillä. Korkein piikki kuvaa sen äänen taajuutta, joka kuuluu voimakkaimmin.



Kuvaajan perusteella suurin suhteellinen amplitudi on taajuudella  $f = 937,5 \text{ Hz} \approx 940 \text{ Hz}$ .

## Tehtävä 12.

äänimerkin taajuus  $f_0 = 510 \text{ Hz}$

auton nopeus  $v_1 = 45 \text{ km/h}$

äänen nopeus  $v = 340 \text{ m/s}$

- a) Kun äänilähde tai havaitsija liikkuvat toisiinsa nähden, havaitsija kuulee äänen taajuuden muuttuvan. Kyseessä on Dopplerin ilmiö. Kun äänilähde liikkuu, sen edessä ääniaaltorintamat ovat tiheämmässä. Auton etupuolella oleva jalankulkija kohtaa samassa ajassa enemmän aaltorintamia eli jalankulkija kuulee äänimerkin äänen korkeampana. Kuultavan äänen taajuus on suurempi kuin auton tuottaman äänimerkin taajuus. Aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan  $v = f\lambda$  eli kun taajuus  $f$  suurenee, niin aallonpituus  $\lambda$  pienenee, sillä äänen nopeus on ilmassa sama,  $340 \text{ m/s}$ .

Kuultavan äänen intensiteetti on kääntäen verrannollinen äänilähteen ja havaitsijan välisen etäisyyden neliöön. Koska äänimerkin lähettänyt auto lähestyy jalankulkijaa, myös äänen intensiteetti suurenee, mikäli äänimerkkiä toistetaan pitkään. Tällöin jalankulkija kuulee äänen voimakkaampana.

- b) Tarkastellaan tilannetta Dopplerin ilmiönä, jossa äänilähde liikkuu kohti jalankulkijaa. Jalankulkijan kokema äänen taajuus on

$$f = f_0 \frac{v}{v \pm v_1}$$

Koska taajuus kasvaa, pitää yhtälön nimittäjän pienentyä ja siksi yhtälöstä valitaan miinusmerkki. Kuullun äänen taajuus on

$$f = f_0 \frac{v}{v - v_1}$$

Aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan saadaan havaitsijan kokeman äänen aallonpituus

$$v = f\lambda$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{v}{f_0 \frac{v}{v - v_0}} = \frac{v - v_0}{f} = \frac{340 \frac{\text{m}}{\text{s}} - \frac{45 \text{ m}}{3,6 \text{ s}}}{510 \text{ Hz}} = 0,642 \text{ m} \approx 64 \text{ cm}.$$

## Tehtävä 13.

Kun tuotetaan ääntä, jonka taajuus vastaa lasin ominaistaajuutta, lasi on resonanssissa äänen kanssa. Lasin värähtelyn amplitudi kasvaa ja on lopulta niin suuri, että lasi rikkoutuu. Kaiuttimen tuottaman energian määrä täytyy olla hyvin suuri.

## Tehtävä 14.

intensiteettitaso 12 metrin etäisyydellä  $L_1 = 41$  dB  
etäisyys keskustelijoista alussa  $r_1 = 3,8$  m  
vertailuintensiteetti  $I_0 = 1 \cdot 10^{-12}$  W/m<sup>2</sup>

- a) Intensiteetti on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön. Kun mittaja menee lähemmäksi keskustelijoita, etäisyys pienenee, joten äänen intensiteetti kasvaa.

b) kuullun äänen intensiteettitaso  $L_2 = 62 \text{ dB}$

Ratkaistaan äänen intensiteetti. Se saadaan intensiteettitasosta.

$$L_1 = 10 \lg \left( \frac{I_1}{I_0} \right) \text{ dB} \quad \parallel : 10 \text{ dB}$$

$$\frac{L_1}{10 \text{ dB}} = \lg \left( \frac{I_1}{I_0} \right) \quad \parallel 10^{(\cdot)}$$

$$10^{\lg \left( \frac{I_1}{I_0} \right)} = 10^{\frac{L_1}{10 \text{ dB}}}$$

$$\frac{I_1}{I_0} = 10^{\frac{L_1}{10 \text{ dB}}} \quad \parallel \cdot I_0$$

$$I_1 = I_0 \cdot 10^{\frac{L_1}{10 \text{ dB}}}$$

$$= 1 \cdot 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 10^{\frac{41 \text{ dB}}{10 \text{ dB}}}$$

$$= 1 \cdot 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 10^{4,1}$$

$$= 1 \cdot 10^{-7,9} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$= 1,258925412 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Määritetään kuullun 62 dB:n äänen intensiteetti.

$$L_1 = 10 \lg \left( \frac{I_1}{I_0} \right) \text{ dB} \quad \parallel : 10 \text{ dB}$$

$$\frac{L_1}{10 \text{ dB}} = \lg \left( \frac{I_1}{I_0} \right) \quad \parallel 10^{(\cdot)}$$

$$10^{\lg \left( \frac{I_1}{I_0} \right)} = 10^{\frac{L_1}{10 \text{ dB}}}$$

$$\frac{I_1}{I_0} = 10^{\frac{L_1}{10 \text{ dB}}} \quad \parallel \cdot I_0$$

$$I_1 = I_0 \cdot 10^{\frac{L_1}{10 \text{ dB}}}$$

$$= 1 \cdot 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 10^{\frac{62 \text{ dB}}{10 \text{ dB}}} = 1 \cdot 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 10^{6,2} = 1 \cdot 10^{5,8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$= 1,584\,89 \cdot 10^{-6} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Äänilähteen tuottaman äänen intensiteetti on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön  $I \sim \frac{1}{r^2}$ . Intensiteettien suhteeksi saadaan  $\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$ .

Keskustelijoiden tuottama intensiteettitaso on 62 dB, kun mittajaan etäisyys on

$$r_2^2 = \frac{r_1^2 I_1}{I_2}$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{r_1^2 I_1}{I_2}} = \sqrt{\frac{(3,8 \text{ m})^2 \cdot 1,258\,925\,412 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}{1,584\,893\,192 \cdot 10^{-6} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}} = 0,338\,675 \text{ m} \approx 34 \text{ cm}.$$

## Tehtävä 15.

äänen nopeus ilmassa  $v_1 = 343 \text{ m/s}$

äänen nopeus vedessä  $v_2 = 1\,480 \text{ m/s}$

äänen tulokulma  $\alpha = 9,2^\circ$

a) Äänen nopeus on suurempi vedessä kuin ilmassa.

Taittumislain mukaan  $\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}$ . Koska aallon nopeus

kasvaa, myös taitekulma kasvaa, joten aaltorintama kääntyy normaalista poispäin. Jos tulokulma on riittävän suuri, kokonaisheijastuminen on mahdollista.

b) Kun ääni kohtaa rajapinnan, osa äänestä heijastuu. Heijastunut ääni noudattaa heijastumislakia. Osa ääniaallosta taittuu rajapinnassa. Lasketaan taittuneen ääniaallon taitekulma taittumislain avulla.

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{v_2}{v_1} \sin \alpha_1$$

$$\alpha_2 = \sin^{-1} \left( \frac{v_2}{v_1} \sin \alpha_1 \right)$$

$$= \sin^{-1} \left( \frac{1\,480 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s}} \sin 9,2^\circ \right)$$

$$= 43,6195^\circ \approx 44^\circ.$$

Aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan  $v = f\lambda$ . Äänen taajuus ei muutu rajapinnassa. Koska äänen nopeus kasvaa, myös ääniaallon aallonpituus kasvaa rajapinnassa.

- c) Koska äänen taajuus ei muutu rajapinnassa, niin aaltoliikkeen perusyhtälön ja taittumislain avulla voidaan ratkaista aallonpituus vedessä.

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{f \lambda_1}{f \lambda_2}$$

$$\lambda_2 = \frac{v_2}{v_1} \lambda_1 = \frac{1480 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s}} \lambda_1 = 4,3148688 \lambda_1 \approx 4,31 \lambda_1.$$

Aallonpituuden kasvu prosentteina

$$\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} \cdot 100 \% = \frac{4,31 \lambda_1 - \lambda_1}{\lambda_1} \cdot 100 \% = 313 \%.$$

## Tehtävä 16.

kitaran kielen pituus  $L = 0,65 \text{ m}$

kielen tuottaman äänen taajuus  $f = 110 \text{ Hz}$

- a) Kun kieli värähtelee perustaajuudella, kieleen syntyy seisova aalto, jossa on yksi kupu. Tällöin aallonpituudelle on voimassa

$$L = \frac{\lambda}{2}$$

$$\lambda = 2L.$$

Aaltoliikkeen perusyhtälön avulla saadaan syntyneen aallon nopeus.

$$v = f\lambda = f2L = 110 \text{ Hz} \cdot 2 \cdot 0,65 \text{ m} = 143 \text{ m/s} \approx 140 \text{ m/s}$$

b) Lämpötilassa 20 °C äänen nopeus on 343 m/s.

Toisesta päästä suljettuun pilliin syntyy seisova aalto, jossa on puolikas kupu. Tällöin aallonpituudelle on voimassa

$$L = \frac{\lambda}{4}$$
$$\lambda = 4L.$$

Kun äänen taajuus on 110 Hz, saadaan aaltoliikkeen perusyhtälöstä pillin pituudeksi

$$v = f\lambda$$

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

$$4L = \frac{v}{f}$$

$$L = \frac{v}{4f} = \frac{343 \text{ m/s}}{4 \cdot 110 \text{ Hz}} = 0,7795 \text{ m} \approx 78 \text{ cm}.$$

## Tehtävä 17.

- a) Lääketieteellisessä kuvantamisessa ultraäänen eri nopeuteen eri aineissa. Kuvantamisessa käytettävässä ultraäänitutkimuksessa ultraäänikuva muodostetaan kudosten rajapinnoilta heijastuneiden signaalien perusteella. Kun ultraääni osuu rajapintaan, osa ultraäänestä läpäisee rajapinnan ja osa heijastuu. Kun ultraäänisignaalin nopeus kudoksessa tunnetaan, ultraäänisignaalin ja kaiun välisestä aikaerosta saadaan selville, kuinka kaukana rajapinta sijaitsee. Ultraääntä käytetään hyvin yleisesti esimerkiksi sikiön tai pehmytkudoksen, kuten sydämen tai sappirakon tutkimisessa.

- b) ultraäänen nopeus kudoksessa  $v = 1\,500\text{ m/s}$   
ultraäänen aallonpituus  $\lambda = 0,72\text{ mm}$

Ultraääni tuotetaan pietsosähköisellä kiteellä, jonka värähdystaajuus kertoo, kuinka monta kertaa sekunnissa kide värähtää. Ultraääni noudattaa aaltoliikkeen perusyhtälöä, josta voidaan ratkaista taajuus.

$$v = f\lambda$$

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{1\,500\text{ m/s}}{0,72 \cdot 10^{-3}\text{ m}} = 2\,083\,333\text{ Hz}$$

Pietsosähköinen kide värähtää  $2,1 \cdot 10^6$  kertaa sekunnissa.

## Tehtävä 18.

opettajan huilun äänen taajuus  $f_1 = 440 \text{ Hz}$

huojuntataajuus  $f_h = 5,2 \text{ Hz}$

- a) Kun poikkihuilua soitetaan, poikkihuilun sisällä olevaan ilmapatsaaseen syntyy seisova aalto, jolla on tietty taajuus. Taajuus riippuu syntyneen aallon aallonpituudesta sekä aallon nopeudesta. Kun opiskelija tulee pakkasella sisälle, soitin on kylmempi kuin sisällä oleva soitin. Äänen nopeus ilmassa riippuu ilman lämpötilasta. Oppilaan huilun sisällä olevassa kylmässä ilmassa äänen nopeus on pienempi. Koska huilun pituus ei juuri ollenkaan muutu, sillä pituuden lämpölaajeneminen on niin pientä huilun materiaalilla pienellä lämpötila-alueella, huiluun syntyneen seisovan aallon aallonpituus ei muutu. Näin ollen aaltoliikkeen perusyhtälön  $v = f\lambda$  mukaisesti, kun äänen nopeus pienenee, myös äänen taajuus pienenee. Kylmän huilun äänen taajuus on hiukan pienempi kuin lämpimässä olleen huilun äänen taajuus. Kun soittimia soitetaan yhtä aikaa, kuullaan huojunta. Tällöin soittimien tuottamien äänten interferenssi voimistaa ja heikentää kuultavan äänen voimakkuutta jaksollisesti. Ääniaaltojen muodostaman summa-aallon amplitudi vuoroin suurenee ja pienenee.

- b) Edellisen kohdan mukaan oppilaan huilun äänen taajuus on pienempi kuin opettajan huilun äänen taajuus. Tällöin huojuntataajuuden avulla saadaan määritettyä oppilaan huilun äänen taajuus.

$$f_h = f_1 - f_2$$

$$f_2 = f_1 - f_h = 440 \text{ Hz} - 5,2 \text{ Hz} = 434,8 \text{ Hz} \approx 435 \text{ Hz}.$$

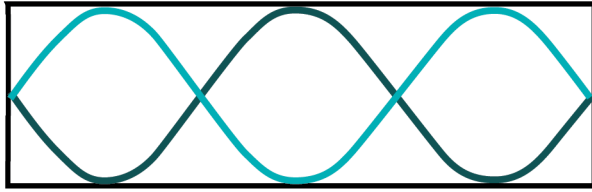
## Tehtävä 19.

putken pituus  $L = 4,8 \text{ m}$

äänen nopeus  $v = 340 \text{ m/s}$

- a) Kun putkessa oleva ilma liikkuu, putken sisälle syntyy aalto, joka heijastuu suljetusta päästä samanlaisena takaisin samanlaisena. Heijastuneen aallon taajuus ja aallonpituus ovat samat kuin alkuperäisen aallon taajuus ja aallonpituus. Jos aallon taajuus on juuri sopiva, kohtaavien aaltojen interferenssi eli yhteisvaikutus tuottaa putkeen seisovan aallon.

- b) Toisen ylävärähtelyn tapauksessa molemmista päistä suljettuun putkeen syntyy kolme kupua



Syntyneen seisovan aallon aallonpituus on

$$L = \frac{3}{2} \lambda$$

$$\lambda = \frac{2}{3} L.$$

Äänen taajuus saadaan ratkaistua aaltoliikkeen perusyhtälöstä.

$$v = f \lambda = f \frac{2}{3} L$$

$$f = \frac{3v}{2L} = \frac{3 \cdot 340 \text{ m/s}}{2 \cdot 4,8 \text{ m}} = 106,25 \text{ Hz} \approx 110 \text{ Hz}$$

## Tehtävä 20.

- a) Lepakot tuottavat ultraääniä, jotka heijastuvat ympäristön pinnoista sekä saalishyönteisistä. Ultraäänen kaikujen perusteella lepakot pystyvät havainnoimaan ympäristöään myös pimeässä.
- b) Ihmisten ja valaiden kudoksissa on paljon nestettä. Koska ultraääni heikkenee ilmassa selvästi voimakkaammin kuin vedessä, valaat pystyvät kaikuluotauksen perusteella päättelemään esimerkiksi lajitovereidensa keuhkoissa olevan ilman määrän. Sairaaloissa ultraäänitutkimuksissa hyödynnetään samaa ilmiötä. Ultraääni etenee ja vaimenee eri kudoksissa eri tavoin, joten heijastuneiden ultraäänien avulla saadaan tietoa esimerkiksi potilaan sisäelimistä tai verenkierrosta.

c) **Huom!**

Painetussa kirjassa, 1.painos, on virhe vaimenevaa aaltoa kuvaavassa funktiossa. Oikea kaava on:

$$y(x,t) = Ae^{-\alpha x} \sin\left(\frac{2\pi f}{v}x + 2\pi ft + \varphi\right)$$

**Tehtävän ratkaisu on laskettu tämän oikean kaavan mukaan.**

vaimenemiskerroin ilmassa  $\alpha_{\text{ilma}} = 12 \text{ cm}^{-1}$

vaimenemiskerroin vedessä  $\alpha_{\text{vesi}} = 0,0022 \text{ cm}^{-1}$

etäisyys ultraäänilähteestä  $x = 1,0 \text{ cm}$

Ultraäänisignaalin amplitudi pienenee, kun aalto etenee väliaineessa matkan  $x$  verran. Pienentyneen amplitudin suuruus etäisyydellä  $x$  on  $Ae^{-\alpha x}$ . Kun ultraääniaalto on edennyt 1 cm matkan, amplitudien suuruudet ovat

$$\text{ilmassa: } A_{\text{ilma}} = Ae^{-\alpha_{\text{ilma}}x} = Ae^{-12 \frac{1}{\text{cm}} \cdot 1 \text{ cm}} = Ae^{-12} = A \cdot 6,144 \cdot 10^{-6}$$

$$\text{vedessä: } A_{\text{vesi}} = Ae^{-\alpha_{\text{vesi}}x} = Ae^{-0,0022 \frac{1}{\text{cm}} \cdot 1 \text{ cm}} = Ae^{-0,0022} = A \cdot 0,9978.$$

Kun verrataan pienentyneitä amplitudeja ilmassa ja vedessä, huomataan että amplitudi vedessä on moninkertainen verrattuna vastaavaan amplitudiin ilmassa. Amplitudien suhde on

$$\frac{A_{\text{vesi}}}{A_{\text{ilma}}} = \frac{A \cdot 0,9978}{A \cdot 6,144 \cdot 10^{-6}} = 162\,402 \approx 160\,000.$$