

4.2 Gravitaation alainen ympyräliike

4.2 Gravitaation alainen ympyräliike

- Planeettojen, kuiden ja satelliittien liikettä kiertoradoillaan voidaan mallintaa tasaisena ympyräliikkeenä.
- Maan kiertoradalla oleva kappale putoaa jatkuvasti Maan ohi.
- Maan kiertoradalla olevaan satelliittiin ja Maahan vaikuttavat yhtä suuret mutta vastakkaissuuntaiset voimat.
- Satelliitteja hyödynnetään esimerkiksi tiedonsiirrossa, paikannuksessa, sääennusteiden laadinnassa ja tutkimustyössä.
- Geostationäärinen satelliitti
 - Kiertää maata päiväntasaajan yläpuolella => Geo-rata (näyttää pysyvän paikallaan maasta katsottuna)
 - Kulmanopeus sama kuin maan kulmanopeus ja
 - kierrosaika sama kuin maan pyörähdysaika.

ESIM1

Osoita, että geostationaarisen satelliitin kiertorata on aina 35 800 km:n korkeudella maanpinnasta.

$$h = 35800 \text{ km}, \quad r = R + h = (6378,137 + 35800) \cdot 10^3 \text{ m}$$

satelliittiin vaikuttaa painovoima $F = \gamma \cdot \frac{mM}{r^2}$

satelliitti on ympyräradalla eli $F = ma_n = m \cdot \frac{v^2}{r}$

$$\gamma \cdot \frac{mM}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$\gamma \cdot \frac{M}{r^2} = \frac{v^2}{r} \quad || \quad v = 465,1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{on kehänopeus päiväntasaajalla (tai:}$$

$$v = \frac{2\pi R}{T}, \quad T = \text{vuorokausi (s)}$$

$$\gamma M = v^2 \cdot r$$

$$r = \frac{\gamma M}{v^2} = \frac{6,6743 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^2}{\text{s} \cdot \text{kg}} \cdot 5,9723 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{465,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

ESIM2

ISS-avaruusasema kiertää maapalloa 400 km:n korkeudella maanpinnasta.

a) Kuinka suuri on gravitaatiokentän voimakkuus asemalla?

b) Kuinka kauan kestää aseman yksi kierros maapallon ympäri?

c) Kuinka monta auringonnousua asemalla voi nähdä vuorokaudessa?

a)

g_r = gravitaatiokentän voimakkuus etäisyydellä r

$$r = (6378,137 + 400) \cdot 10^3 \text{ m}$$

satelliittiin vaikuttaa painovoima $F = \gamma \cdot \frac{mM}{r^2} = mg_r$ (g eri kuin 9,81...)

$$g_r = \gamma \cdot \frac{M}{r^2} = 8,678030... \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

b)

$$v = \frac{s}{t}$$

$$t = \frac{s}{v} = \frac{2\pi r}{???} \quad (\text{en tiedä vielä nopeutta})$$

satelliitti on ympyräradalla eli

$$F = ma_n = m \cdot \frac{v^2}{r} \quad || \text{ a-kohdasta: } F = mg_r$$

$$mg_r = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$v^2 = g_r \cdot r$$

$$v = \sqrt{g_r \cdot r}$$

siis

$$t = \frac{s}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{g_r \cdot r}} = 5552,958... \text{ s} = 1,54248... \text{ h} \approx 1,5 \text{ h}$$

$$\begin{aligned} R &= 6378,137 \\ r &= (R+400) \cdot 10^3 \\ &= 6,778137 \text{e}6 \\ 2 \cdot \pi \cdot r / \sqrt{8,678030 \cdot r} &= 5552,95898942633901357553 \end{aligned}$$

c)
jaetaan yhden päivän tunnit kiertoajalla:

$$\begin{aligned} 24 / 1,54248860817398305933 \\ &= 15,55927212221780650923 \end{aligned}$$

V: Asemalla nähdään 15 auringonnousua.

T. 12.

Gravitaatiovoima pitää kuun m ympyräradalla Jupiterin M ympärillä. Kirjoitetaan Newtonin 2. lain perusteella **kuun** liikeyhtälö.

$$F = ma_n$$

$$\gamma \frac{mM}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

$$\gamma M = rv^2$$

Sijoitetaan tähän ratanopeus $v = \frac{2\pi r}{T}$.

$$\gamma M = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2}$$

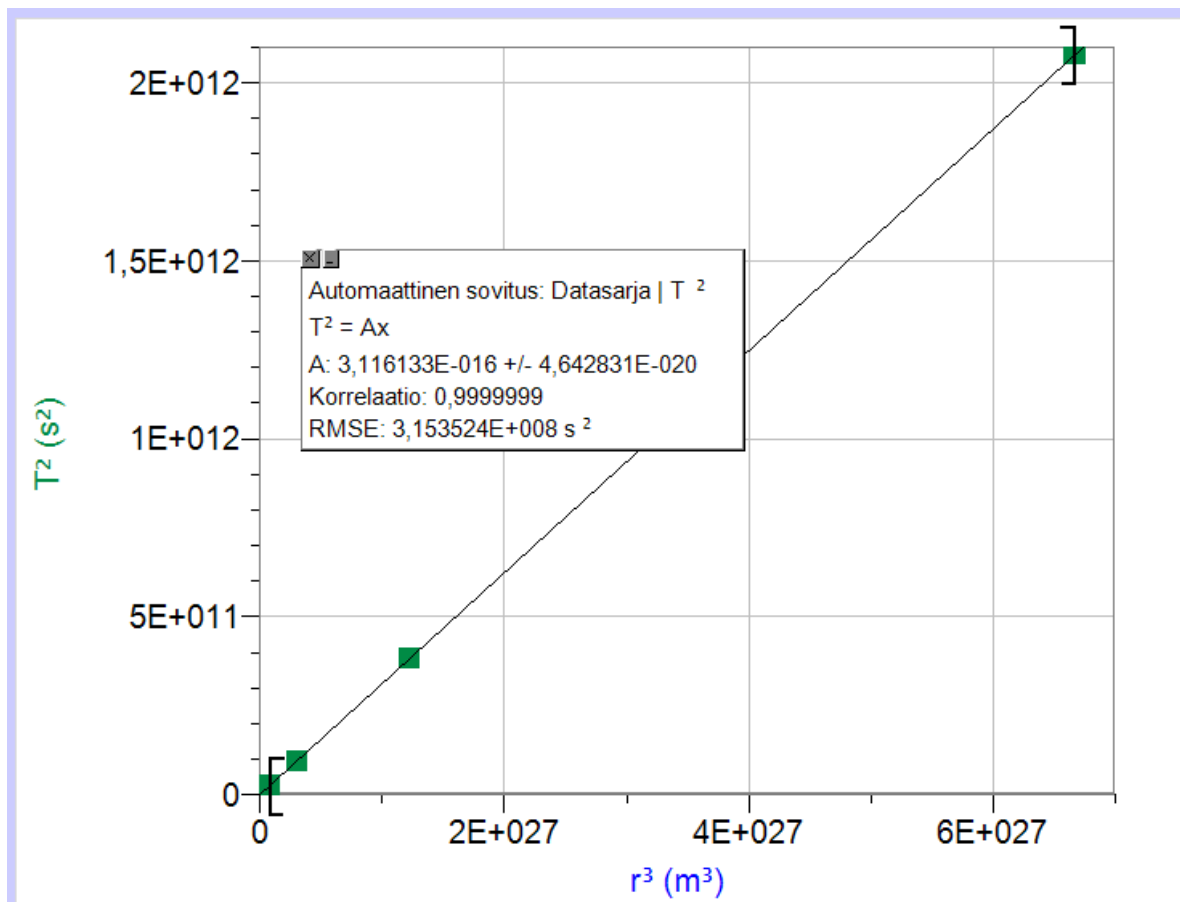
Kirjoitetaan yhtälö muotoon, josta näkyvät mitatut suureet T ja r .

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma M} r^3$$

Lasketaan uudet arvot T^2 ja r^3 :

Datarja			
r (km)	T (d)	r ³ (m ³)	T ² (s ²)
421800	1,77	7,504E+025	2,339E+010
671100	3,55	3,022E+026	9,408E+010
1070400	7,16	1,226E+027	3,827E+011
1882700	16,69	6,673E+027	2,079E+012

ja piirretään (r^3, T^2) -kuvaaja:



$$k = 3,116133 \cdot 10^{-16} \frac{\text{s}^2}{\text{m}^3}$$

$$k = \frac{4\pi^2}{\gamma M}$$

$$M = \frac{4\pi^2}{\gamma k}$$

$$M = \frac{4\pi^2}{6,674 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 3,11587 \cdot 10^{-16} \frac{\text{s}^2}{\text{m}^3}} \approx 1,90 \cdot 10^{27} \text{ kg}$$

V: Jupiterin massa on $1,90 \cdot 10^{27} \text{ kg}$