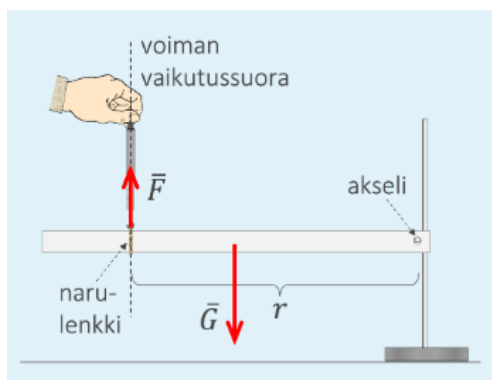


2 Voiman momentti ja kappaleen pyöriminen

2 Voiman momentti ja kappaleen pyöriminen

Vääntöä mittaava suure on **momentti**.

Koe 1: Voima-anturilla tai jousivaakalla mitataan ripustuskohtaan vaikuttavaa voimaa. Asetetaan tanko kuvan mukaisesti stativiin ja mitataan eri etäisyyksillä voimaa, jota tarvitaan kannattelemaan tankoa.

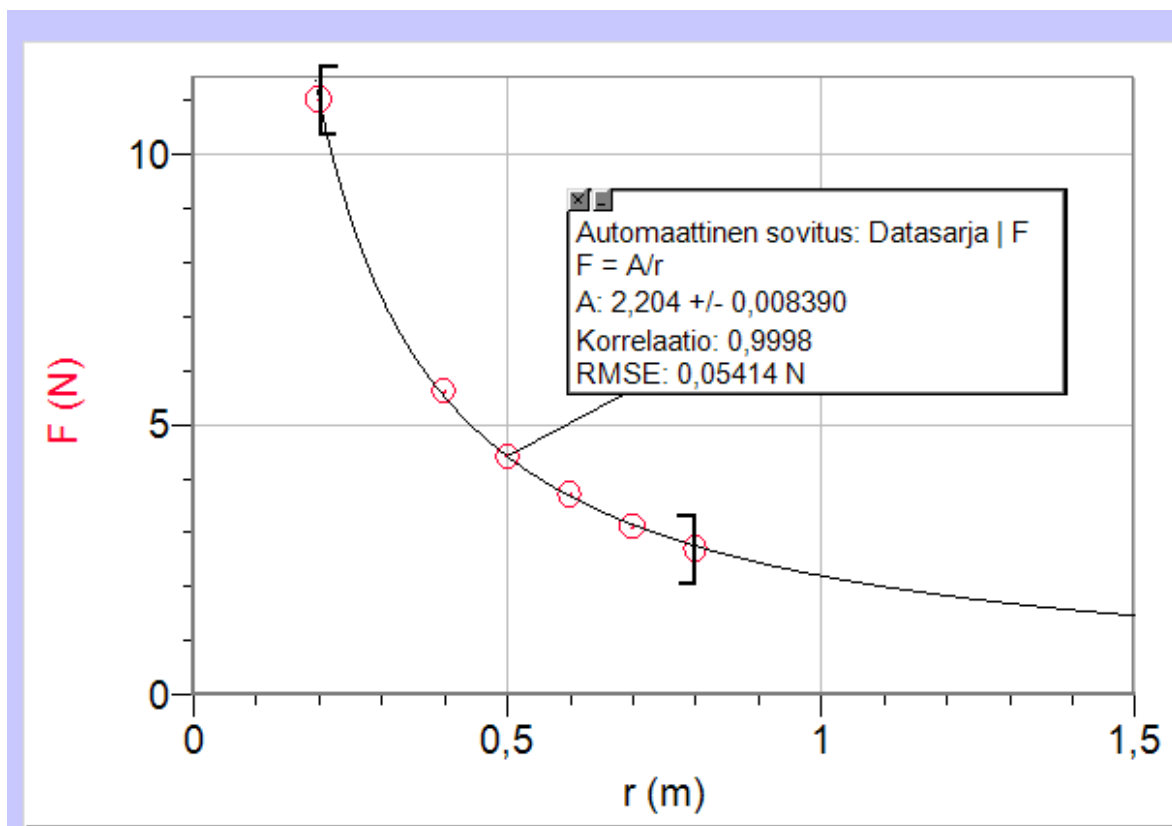


r (m)	F (N)
0,80	2,7
0,70	3,1
0,60	3,7
0,50	4,4
0,40	5,6
0,20	11

Piirrä kuvaaja (r , F)-koordinaatistoon.

Huomataan, että kyseessä on käänteisfunktion kuvaaja eli $y = k \cdot \frac{1}{x}$,

missä $y = F$ ja $x = r$.

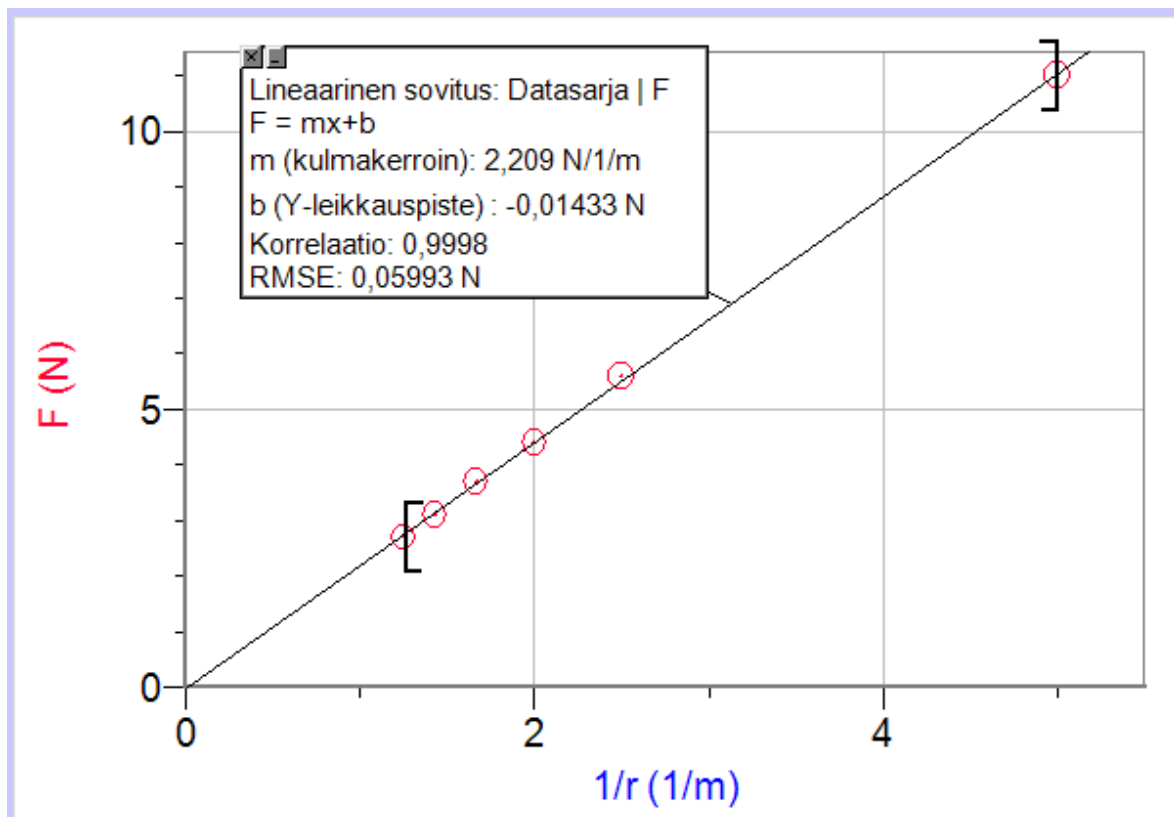


Kun piirretään $1/r$ -sovitus, saadaan voiman momentti sovituksen $F = \frac{A}{r}$ vakiosta A.

Laske arvoista r uusi laskettu sarake $1/r$. Piirrä nyt sovitus $\left(\frac{1}{r}, F\right)$ -koordinaatistoon.

Huomataan, että kyseessä on suoran kuvaaja eli $y = k \cdot x$, missä

$$y = F \text{ ja } x = \frac{1}{r}.$$



Momentti saadaan suoran kulmakertoimesta.

Koe 2: rikkaharjan painopiste, kokeile!

(Etusormien päällä kannatetaan tauluviivoitinta/rikkaharjaa ja siirretään molempia sormia kohti keskipistettä. Vain toinen sormi liikkuu kerrallaan, koska **kitka on pienempi**.)

Momentti

- Momentti kuvaa voiman vääntövaikutusta.
- Kappaleeseen voi kohdistua vääntövaikutus, vaikka kokonaisvoima olisi nolla.



$\vec{F}_1$ = oikealle pinnan suuntaisesti
 työntävä voima

$\vec{F}_2$ = vasemmalle pinnan suuntaisesti
 työntävä voima

- Voiman momentin M_A suuruus (A on valittu akselipiste) saadaan voiman suuruuden F ja voiman varren r tulona.

$$M_A = Fr$$

- Momentin yksikkö on newtonmetri, 1 Nm:

$$[M] = [F] [r] = \text{Nm}$$

- Painopiste on kappaleen painon kuviteltu vaikutuspiste.
- Kappale kaatuu, kun sen painon vaikutussuora kulkee kappaleen tukipinnan ulkopuolelta.

ESIM1.

Auton pyörän pultin kiristysmomentti on ohjeiden mukaan 110 Nm.

Rengasavaimen varren pituus on 24 cm.

a) Kuinka suuri voima pultin kiristämiseen tarvitaan?

$$M = 110 \text{ Nm}, \quad r = 0,24 \text{ m} \quad F = ?$$

$$M = Fr \quad || : r$$

$$F = \frac{M}{r} = \frac{110 \text{ Nm}}{0,24 \text{ m}} = 458,333... \text{ N} \approx 460 \text{ N}$$

V: Tarvittava voima on 460 N

b) Kuinka pitkä rengasavaimen varren pitää olla, jotta kiristämiseen tarvittava voima saadaan puolitettua?

$$F_2 = \frac{F}{2} = 229,1666... \text{ N}, \quad r = ?$$

$$M = Fr \quad || : F$$

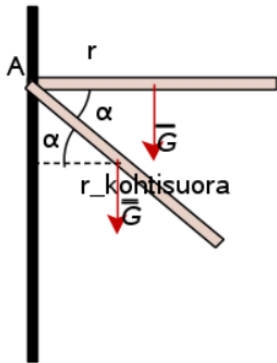
$$r = \frac{M}{F} = \frac{110 \text{ Nm}}{229,1666... \text{ N}} = 0,48 \text{ m}$$

V: Varren pitää olla 0,48 m

ESIM2.

Tauluviivoittimen päässä on reikä, josta viivoitin ripustetaan statiiviin. Aluksi viivoitin on vaakatasossa: $M = Gr$. Mikä on momentin kaava, kun viivoitin käännetään 20 asteen kulmaan?

Piirretään kuva (Nspire):



voiman varsi on nyt $r_{\perp}$ eli $r_{\perp}$
joten suorakulmaisesta kolmiosta

$$\cos(\alpha) = \frac{r_{\perp}}{r}$$

$$r_{\perp} = r \cdot \cos(\alpha)$$

$$M_2 = G \cdot r_{\perp} = mg \cdot r \cdot \cos \alpha$$

$$M_2 = 0,20 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,50 \text{ m} \cdot \cos(20^\circ)$$

$$M_2 = 0,921838... \text{ Nm} \approx 0,92 \text{ Nm}$$

Tehtäviä

Studeosta merkityt kotitehtävät

2.1 Tasapaino pyörimisen suhteen

2.1 Tasapaino pyörimisen suhteen

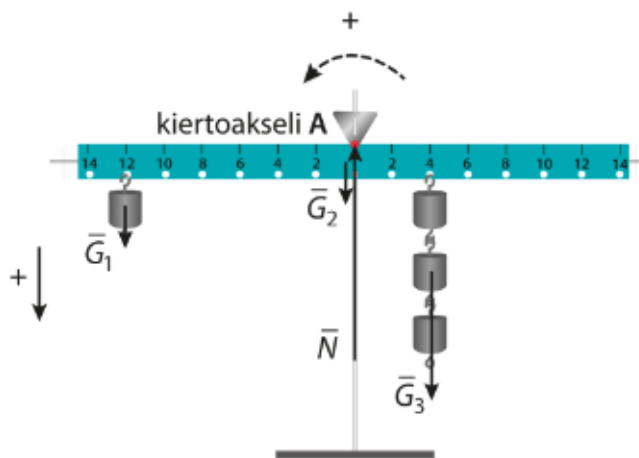
Kappale on tasapainossa, kun se ei liiku eikä pyöri.

- Tasapainoehto etenemisen suhteen on $\Sigma F = ma = 0$ ja
- tasapainoehto pyörimisen suhteen on $\Sigma M = 0$
- Jos tasapainoehdot toteutuvat, kappale on tasapainossa.
- Tarvittavaa voimaa voidaan pienentää **vivun** avulla.

ESIM1.

Tanko kiinnitettiin keskikohdastaan stativiin. Tankoon ripustettiin kolme 100 g:n punnusta 4,0 cm:n etäisyydelle kiertoakselista. Mihin kohtaan yksi 100 g:n punnus pitää ripustaa, jotta vaaka on tasapainossa?

1. Tee voimakuvio
2. Valitse kiertoakseli A
3. Tee suuntasopimukset (M ja F)



$\bar{G}_1$ = yhden punnuksen paino

$\bar{G}_2$ = tangon paino

$\bar{G}_3$ = kolmen punnuksen paino

$\bar{N}$ = akselin tukivoima

4. Kirjoita tasapainoehdot

Newtonin toisen lain $\Sigma F = ma = 0$ mukaan:

$$G_1 + G_2 + G_3 - N = 0$$

Tasapaino pyörimisen suhteen $\Sigma M = 0$:

$$G_1 r_1 - G_3 r_3 = 0$$

5. Ratkaise kysytyt suureet

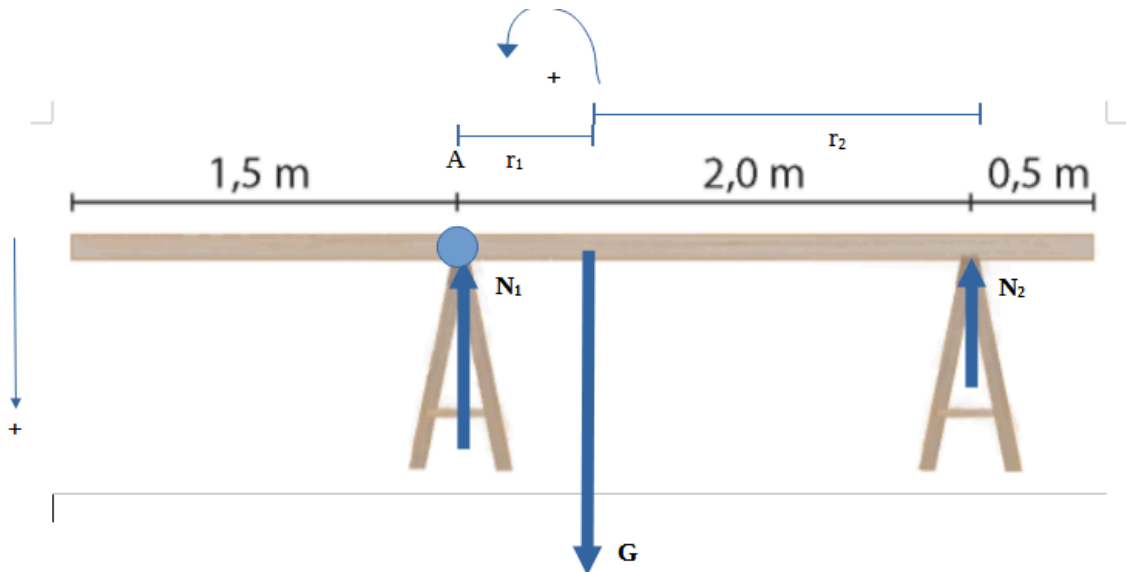
$$G_1 r_1 = G_3 r_3$$

$$r_1 = \frac{G_3 r_3}{G_1} = \frac{3G_1 r_3}{G_1} = 3r_3 = 3 \cdot 4,0 \text{ cm} = 12 \text{ cm}$$

ESIM2. Tasapaksu lankku on kahden tuen päällä. Lankun massa on 8,9 kg.



a) Kuinka suuret tukivoimat lankkuun kohdistuvat?



$$m = 8,9 \text{ kg}$$

$$G = mg$$

Tasapainoehdot:

Newtonin toisen lain mukaan:

$$G - N_1 - N_2 = 0$$

Momenttiehto:

$$N_2 \cdot (r_1 + r_2) - G \cdot r_1 = 0$$

$$N_2 = \frac{Gr_1}{r_1 + r_2} = \frac{mg \cdot r_1}{r_1 + r_2} \quad \parallel \quad r_1 = \frac{4,0 \text{ m}}{2} - 1,5 \text{ m} = 0,5 \text{ m}$$

$$N_2 = \frac{8,9 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,5 \text{ m}}{2,0 \text{ m}} = 21,82725 \text{ N} \approx 22 \text{ N}$$

Toinen tukivoima:

$$G - N_1 - N_2 = 0$$

$$N_1 = G - N_2 = mg - N_2 = 8,9 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 21,82725 \text{ N}$$

$$= 65,48175 \text{ N} \approx 65 \text{ N}$$

V: Tukivoimat ovat 65 N ja 22 N (vasemmalta oikealle).

b) Kissa hyppää lankun päälle tukien väliin. Kuinka pitkälle kissa voi kävellä vasemmanpuoleisen tuen yli ennen kuin lankku kaatuu? Kissan massa on 4,7 kg.

Ratkaisu. Merkitään kissan painoa tunnuksella G_k ja se ehtii etäisyydelle

$$r_k \text{ .}$$

Kissan edetessä tukivoima N_2 pienenee.

Ääriasemassa lankku juuri ja juuri ei vielä keikahda eli tukivoima $N_2 = 0 \text{ N}$.

Nyt momenttiehto on:

$$G_k r_k - G \cdot r_1 = 0$$

$$r_k = \frac{G \cdot r_1}{G_k} = \frac{mg}{m_k g} \cdot r_1 = \frac{m}{m_k} \cdot r_1 = \frac{8,9 \text{ kg}}{4,7 \text{ kg}} \cdot 0,5 \text{ m}$$

$$r_k = 0,9468... \text{ m} \approx 0,95 \text{ m}$$

V: Kissa voi kävellä 0,95 m päähän.

3 Ympyräliike

3 Tasainen ympyräliike

- Jaksollisessa liikkeessä sama tapahtuma toistuu tietyin väliajoin.
- Yhteen jaksoon kulunut aika on **jaksonaika** T .
- Ympyräliikkeessä kappale on aina **kiihtyvässä liikkeessä**.
- Ympyräliikkeessä olevalla kappaleella on normaalikiihtyvyys $a_n = \frac{v^2}{r}$.
missä v on **ratanopeus** ja r ympyrän säde
- Tasaisessa ympyräliikkeessä kappaleen nopeuden suunta muuttuu koko ajan, mutta nopeuden suuruus pysyy samana. Kiihtyvyyden suunta on **kohti ympyräliikkeen keskipistettä**.
- Käyräviivaista liikettä voidaan mallintaa hetkellisesti ympyräliikkeenä.

Muista:

- Newtonin toinen laki: $\Sigma F = ma_n$
- Mekaanisen energian säilymislaki: $E_{ka} + E_{pa} = E_{kl} + E_{pl}$
- Vektorikolmio, Pythagoraan lause, sin cos tan

ESIM1

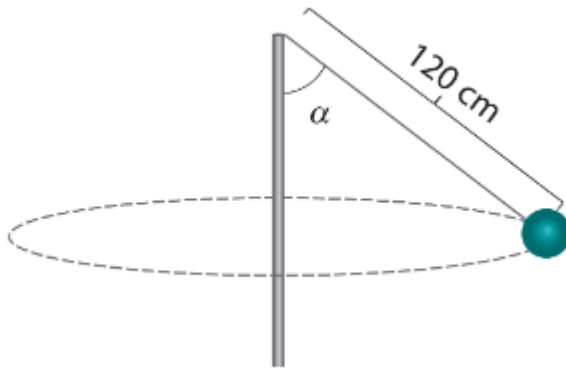
Salkopallopelissä pelaajat lyövät vastakkaisiin suuntiin palloa, joka on kiinnitetty salkoon 120 cm pitkällä narulla.

a) Laadi pallon voimakuvio, kun narun ja salon välillä on 55°:n kulma.

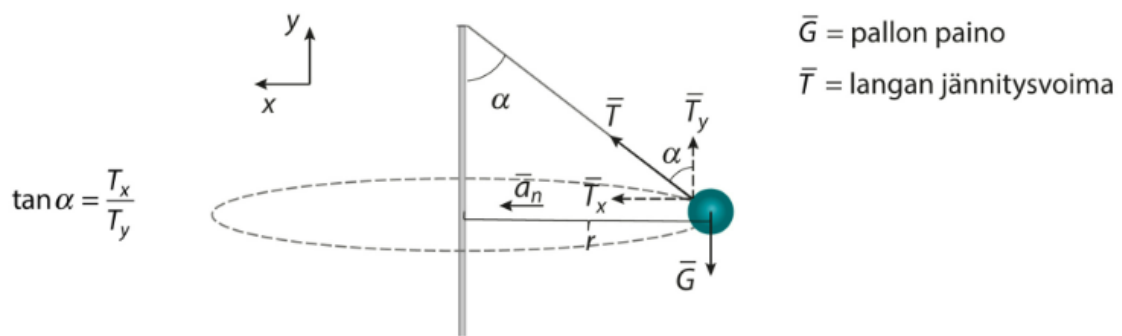
Ilmanvastusta ei huomioida.

b) Määritä ratanopeus.

c) Kuinka kauan kestää, että pallo kiertää puolikkaan kierroksen salon ympäri?



a)



b)

Newtonin toisen lain mukaan:

$$\Sigma F = ma_n$$

x-suunnassa:

$$T_x = ma_n \quad \parallel \quad a_n = \frac{v^2}{r}$$

$$T_x = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$v^2 = \frac{T_x \cdot r}{m}$$

y-suunnassa:

$$T_y - G = 0$$

$$T_y = G = mg$$

suorakulmaisesta kolmiosta:

$$\sin(55^\circ) = \frac{T_x}{T} \Rightarrow T_x = T \cdot \sin(55^\circ)$$

$$\cos(55^\circ) = \frac{T_y}{T} \Rightarrow T = \frac{T_y}{\cos(55^\circ)}$$

$$T_x = \frac{T_y}{\cos(55^\circ)} \cdot \sin(55^\circ) = T_y \cdot \tan(55^\circ)$$

$$\tan(55^\circ) = \frac{T_x}{T_y}$$

$$T_x = T_y \cdot \tan(55^\circ)$$

eli

$$T_x = mg \tan(55^\circ)$$

Siis:

$$v^2 = \frac{T_x \cdot r}{m} = \frac{mg \tan(55^\circ) \cdot r}{m} \quad \parallel \quad r = L \sin(55^\circ)$$

$$v = \sqrt{g \tan(55^\circ) \cdot L \sin(55^\circ)} = \sqrt{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \tan(55^\circ) \cdot 1,2 \text{ m} \cdot \sin(55^\circ)}$$

$$v = 3,711... \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 3,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

c)

Puolikas kierros on puolet ympyrästä eli $s = \frac{2\pi r}{2} = \pi r$.

Matka on $s = vt$ eli aika on

$$t = \frac{s}{v} = \frac{\pi r}{\sqrt{g \tan(55^\circ) \cdot L \sin(55^\circ)}} = 0,83215... \text{ s} \approx 0,83 \text{ s}$$

(voisi myös sijoittaa 3,7110 m/s tuonne nopeudeksi mutta ei saa sijoittaa 3,7 m/s !!!)

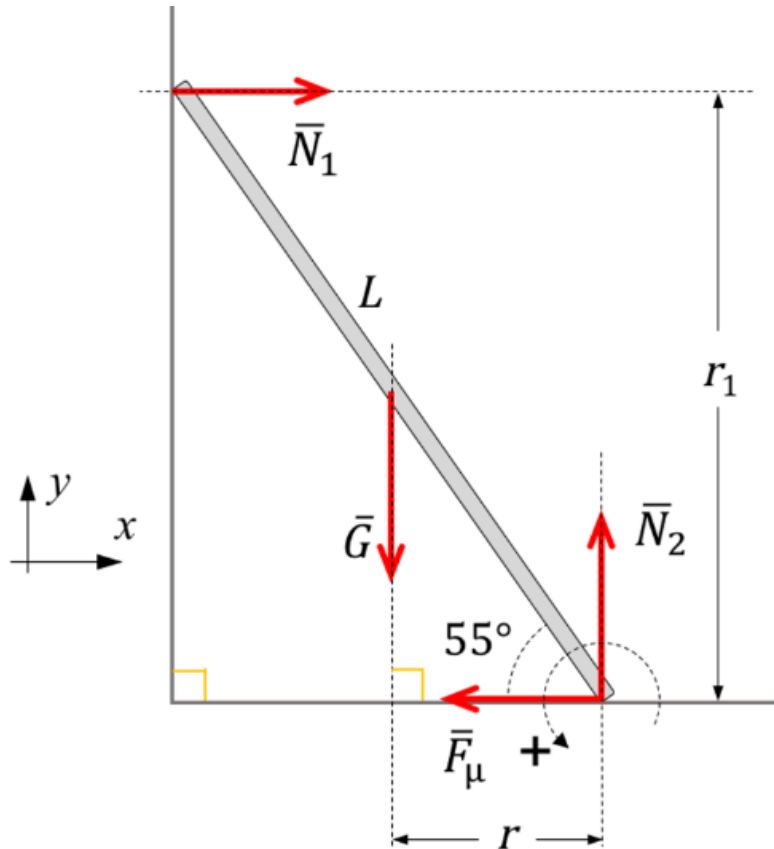
$$t = \frac{s}{v} = \frac{\pi r}{3,7110... \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 0,83215... \text{ s} \approx 0,83 \text{ s}$$

ESIM2

Soratiellä on mäennyppylä, jonka kaarevuussäde on 40 m. Kuinka suurella nopeudella ralliauton on ajettava nyppylään, jotta sen renkaat irtoavat tiestä?

...

Tehtävä 18 (kpl 2.1)



$$\cos 55^\circ = \frac{r}{L} \text{ , joten } r = \frac{L}{2} \cos 55^\circ$$

$$\sin 55^\circ = \frac{r_1}{L} \text{ , joten } r_1 = L \sin 55^\circ$$

Tasapaino etenemisen suhteen: $\Sigma F = 0$

x-suunta:

$$N_1 - F_\mu = 0 \quad \parallel \quad F_\mu = \mu N_2$$

$$N_1 - \mu N_2 = 0$$

y-suunta:

$$-G + N_2 = 0$$

$$N_2 = G = mg$$

Tasapaino pyörimisen suhteen: $\Sigma M = 0$

$$Gr - N_1 r_1 = 0 \quad \parallel \quad r = \frac{L}{2} \cdot \cos(55^\circ) \quad \text{ja} \quad r_1 = L \cdot \sin(55^\circ)$$

$$mg \cdot \frac{L}{2} \cdot \cos(55^\circ) - N_1 \cdot L \cdot \sin(55^\circ) = 0$$

Tavassa A luetellaan kaikki yhtälöt (myös $G = m \cdot g$) ja ratkaistaan yksi iso yhtälöryhmä.

Tavassa B sievennetään ensin vastauskentässä ja sitten nämä kolme yhtälöä yhtälöryhmäksi ja ratkaistaan siitä μ .

Ensin merkitään $\{\$1, \$2, \$3\}$, $\{\mu\}$ ja ratkaistaan. Sitten lisätään aina saatuja tuntemattomia:

$\{\$1, \$2, \$3\}$, $\{\mu, N_1, N_2, G\}$ jne. kunnes saadaan μ :lle lauseke, johon voidaan sijoittaa arvot.

TAPA A

Kirjoitetaan kaikki tarvittavat kaavat

1	$N1 - F\mu = 0$ $\rightarrow -F\mu + N1 = 0$
2	$F\mu = \mu N2$ $\rightarrow F\mu = N2 \mu$
3	$G = m g$ $\rightarrow G = g m$
4	$-G + N2 = 0$ $\rightarrow -G + N2 = 0$
5	$G r - N1 r1 = 0$ $\rightarrow G r - N1 r1 = 0$
6	$\cos(55^\circ) = \frac{r}{\frac{L}{2}}$ $\rightarrow \cos\left(\frac{11}{36} \pi\right) = 2 \cdot \frac{r}{L}$
7	$\sin(55^\circ) = \frac{r1}{L}$ $\rightarrow \sin\left(\frac{11}{36} \pi\right) = \frac{r1}{L}$
8	$\{\$1, \$2, \$3, \$4, \$5, \$6, \$7\}$ $\rightarrow \left\{ -F\mu + N1 = 0, F\mu = N2 \mu, G = g m, -G + N2 = 0, G r - N1 r1 = 0, \cos\left(\frac{11}{36} \pi\right) = 2 \cdot \frac{r}{L}, \sin\right\}$
9	$\$8, \{\mu, F\mu, N2, N1, G, r, r1\}$ Ratkaise: $\left\{ \left\{ \mu = \frac{-\tan^2\left(\frac{11}{72} \pi\right) + 1}{4 \tan\left(\frac{11}{72} \pi\right)}, F\mu = \frac{-g m \tan^2\left(\frac{11}{72} \pi\right) + g m}{4 \tan\left(\frac{11}{72} \pi\right)}, N2 = g m, N1 = \frac{-g m \tan^2\left(\frac{11}{72} \pi\right) + g r}{4 \tan\left(\frac{11}{72} \pi\right)} \right\} \right\}$
10	$\mu = \frac{-\tan^2\left(\frac{11}{72} \pi\right) + 1}{4 \tan\left(\frac{11}{72} \pi\right)}$ $\approx \mu = 0.3501$

TAPA B

Tai kun käytetään jo sijoitettuja kaavoja:

11	$N1 - \mu N2 = 0$ $\checkmark \quad N1 - \mu N2 = 0$
12	$-m g + N2 = 0$ $\checkmark \quad -m g + N2 = 0$
13	$m g \frac{L}{2} \cos(55^\circ) - N1 L \sin(55^\circ) = 0$ $\rightarrow -L N1 \sin\left(\frac{11}{36} \pi\right) + \frac{1}{2} L g m \cos\left(\frac{11}{36} \pi\right) = 0$
14	$\{\$11, \$12, \$13\}, \{\mu, N1, N2\}$ ☐ Ratkaise: $\left\{ \left\{ \mu = \frac{-\tan^2\left(\frac{11}{72} \pi\right) + 1}{4 \tan\left(\frac{11}{72} \pi\right)}, N1 = \frac{-g m \tan^2\left(\frac{11}{72} \pi\right) + g m}{4 \tan\left(\frac{11}{72} \pi\right)}, N2 = g m \right\} \right\}$
15	$\mu = \frac{-\tan^2\left(\frac{11}{72} \pi\right) + 1}{4 \tan\left(\frac{11}{72} \pi\right)}$ $\approx \mu = 0.3501$

4.1 Gravitaatiolaki

4 Gravitaatiolaki

- Gravitaatiolain (Newton 1687) mukaan kahden kappaleen vuorovaikutuksessa kappaleet vetävät toisiaan puoleensa yhtä suurilla mutta vastakkaissuuntaisilla voimilla.

- Gravitaatiovoima on

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

jossa γ on gravitaatiovakio, m_1 ja m_2 ovat vuorovaikuttavien kappaleiden massat ja r on kappaleiden välimatka.

- Gravitaatiokenttä välittää gravitaatiovuorovaikutuksen ja vaikuttaa kaikkiin kentässä oleviin kappaleisiin, joilla on **massa**.
- Gravitaatiokentän voimakkuus g kuvaa, kuinka suuren kiihtyvyyden gravitaatiovoima aiheuttaa kappaleelle. ($G = mg$)

ESIM1

Kuinka korkealla Maan pinnasta gravitaatiokentän voimakkuus eli gravitaatiovoiman aiheuttama kiihtyvyys on $4,9 \text{ m/s}^2$ eli noin puolet siitä, mitä se on Maan pinnalla?

$$h = ?$$

$$g = 4,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Newtonin II lain mukaan $F = ma = m_1 g$ ||

m_1 = kappaleen massa, m_2 = Maapallon massa

Gravitaatiolain mukaan $F = \gamma \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$

eli

$$\gamma \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} = m_1 \cdot g \quad || \quad r = R + h$$

$$1 \quad \left\{ \gamma m \frac{M}{r^2} = m g, r = R + h \right\}$$

$$\rightarrow \left\{ M m \frac{\gamma}{r^2} = g m, r = R + h \right\}$$

$$2 \quad \text{Ratkaise:}$$

$$\left\{ \left\{ h = \frac{-g R - \sqrt{M g \gamma}}{g}, r = \frac{-\sqrt{M g \gamma}}{g} \right\}, \left\{ h = \frac{-g R + \sqrt{M g \gamma}}{g}, r = \frac{\sqrt{M g \gamma}}{g} \right\} \right\}$$

$$h = \frac{\pm \sqrt{m_2 \cdot g \cdot \gamma} - g \cdot R}{g} = \frac{\sqrt{m_2 \cdot g \cdot \gamma} - g \cdot R}{g} \quad (\text{pituus ei ole}$$

negatiivinen)

Sijoita

Rivi 4

Sijoita	With
M	5.9723*10 ²⁴
R	6378.137*10 ³
g	4.9
h	
γ	6.67430*10 ⁻¹¹

$$h = \frac{-g R + \sqrt{M g \gamma}}{g}$$

4 Sijoita, M=5.9723*10²⁴, R=6378.137*10³, g=4.9, γ=6.67430*10⁻¹¹:

$$h = \frac{-4.9 \cdot 6378.137 \cdot 10^3 + \sqrt{5.9723 \cdot 10^{24} \cdot 4.9 \cdot 6.6743 \cdot 10^{-11}}}{4.9}$$

5

$$\approx h = 2641221.08047$$

V: putoamiskiintyvyys on 4,9 $\frac{m}{s^2}$, kun ollaan

$$h = 2641,221... \text{ km} \approx 2600 \text{ km}$$

korkeudella.

Tehtävä 3.

Gravitaatiolaki: $F = \gamma \cdot \frac{m_{kpl} \cdot M_{kuu}}{r^2}$

Newtonin II laki: $F = ma = m_{kpl} g_{kuu}$

Voimat sama, joten:

$$\gamma \cdot \frac{m_{kpl} \cdot M_{kuu}}{r^2} = m_{kpl} \cdot g_{kuu}$$

$$M_{kuu} = \frac{g_{kuu} \cdot r^2}{\gamma} = \dots \approx 6,9 \cdot 10^{22} \text{ kg}$$

(Geogebra:ssa:

12	$\gamma \frac{M}{r^2} = g$
	$\approx \mathbf{M \frac{\gamma}{r^2} = g}$
13	\$12, M
	Ratkaise: $\left\{ \mathbf{M = g \frac{r^2}{\gamma}} \right\}$
14	$1.6 \cdot \frac{(1700 \cdot 10^3)^2}{6.6743 \cdot 10^{-11}}$ $\rightarrow \frac{\mathbf{46240000000000000000000000000000}}{\mathbf{66743}}$
15	\$14
	$\approx \mathbf{6.92807 \cdot 10^{22}}$

4.2 Gravitaation alainen ympyräliike

4.2 Gravitaation alainen ympyräliike

- Planeettojen, kuiden ja satelliittien liikettä kiertoradoillaan voidaan mallintaa tasaisena ympyräliikkeenä.
- Maan kiertoradalla oleva kappale putoaa jatkuvasti Maan ohi.
- Maan kiertoradalla olevaan satelliittiin ja Maahan vaikuttavat yhtä suuret mutta vastakkaissuuntaiset voimat.
- Satelliitteja hyödynnetään esimerkiksi tiedonsiirrossa, paikannuksessa, sääennusteiden laadinnassa ja tutkimustyössä.
- Geostationäärinen satelliitti
 - Kiertää maata päiväntasaajan yläpuolella => Geo-rata (näyttää pysyvän paikallaan maasta katsottuna)
 - Kulmanopeus sama kuin maan kulmanopeus ja
 - kierrosaika sama kuin maan pyörähdysaika.

ESIM1

Osoita, että geostationaarisen satelliitin kiertorata on aina 35 800 km:n korkeudella maanpinnasta.

$$h = 35800 \text{ km}, \quad r = R + h = (6378,137 + 35800) \cdot 10^3 \text{ m}$$

satelliittiin vaikuttaa painovoima $F = \gamma \cdot \frac{mM}{r^2}$

satelliitti on ympyräradalla eli $F = ma_n = m \cdot \frac{v^2}{r}$

$$\gamma \cdot \frac{mM}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$\gamma \cdot \frac{M}{r^2} = \frac{v^2}{r} \quad || \quad v = 465,1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{on kehänopeus päiväntasaajalla (tai:}$$

$$v = \frac{2\pi R}{T}, \quad T = \text{vuorokausi (s)}$$

$$\gamma M = v^2 \cdot r$$

$$r = \frac{\gamma M}{v^2} = \frac{6,6743 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^2}{\text{s} \cdot \text{kg}} \cdot 5,9723 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{465,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

ESIM2

ISS-avaruusasema kiertää maapalloa 400 km:n korkeudella maanpinnasta.

a) Kuinka suuri on gravitaatiokentän voimakkuus asemalla?

b) Kuinka kauan kestää aseman yksi kierros maapallon ympäri?

c) Kuinka monta auringonnousua asemalla voi nähdä vuorokaudessa?

a)

g_r = gravitaatiokentän voimakkuus etäisyydellä r

$$r = (6378,137 + 400) \cdot 10^3 \text{ m}$$

satelliittiin vaikuttaa painovoima $F = \gamma \cdot \frac{mM}{r^2} = mg_r$ (g eri kuin 9,81...)

$$g_r = \gamma \cdot \frac{M}{r^2} = 8,678030... \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

b)

$$v = \frac{s}{t}$$

$$t = \frac{s}{v} = \frac{2\pi r}{???} \quad (\text{en tiedä vielä nopeutta})$$

satelliitti on ympyräradalla eli

$$F = ma_n = m \cdot \frac{v^2}{r} \quad || \text{ a-kohdasta: } F = mg_r$$

$$mg_r = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$v^2 = g_r \cdot r$$

$$v = \sqrt{g_r \cdot r}$$

siis

$$t = \frac{s}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{g_r \cdot r}} = 5552,958... \text{ s} = 1,54248... \text{ h} \approx 1,5 \text{ h}$$

$$\begin{aligned} R &= 6378,137 \\ r &= (R+400) \cdot 10^3 \\ &= 6,778137 \text{e}6 \\ 2 \cdot \pi \cdot r / \sqrt{8,678030 \cdot r} &= 5552,95898942633901357553 \end{aligned}$$

c)
jaetaan yhden päivän tunnit kiertoajalla:

$$\begin{aligned} 24 / 1,54248860817398305933 \\ &= 15,55927212221780650923 \end{aligned}$$

V: Asemalla nähdään 15 auringonnousua.

T. 12.

Gravitaatiovoima pitää kuun m ympyräradalla Jupiterin M ympärillä. Kirjoitetaan Newtonin 2. lain perusteella **kuun** liikeyhtälö.

$$F = ma_n$$

$$\gamma \frac{mM}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

$$\gamma M = rv^2$$

Sijoitetaan tähän ratanopeus $v = \frac{2\pi r}{T}$.

$$\gamma M = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2}$$

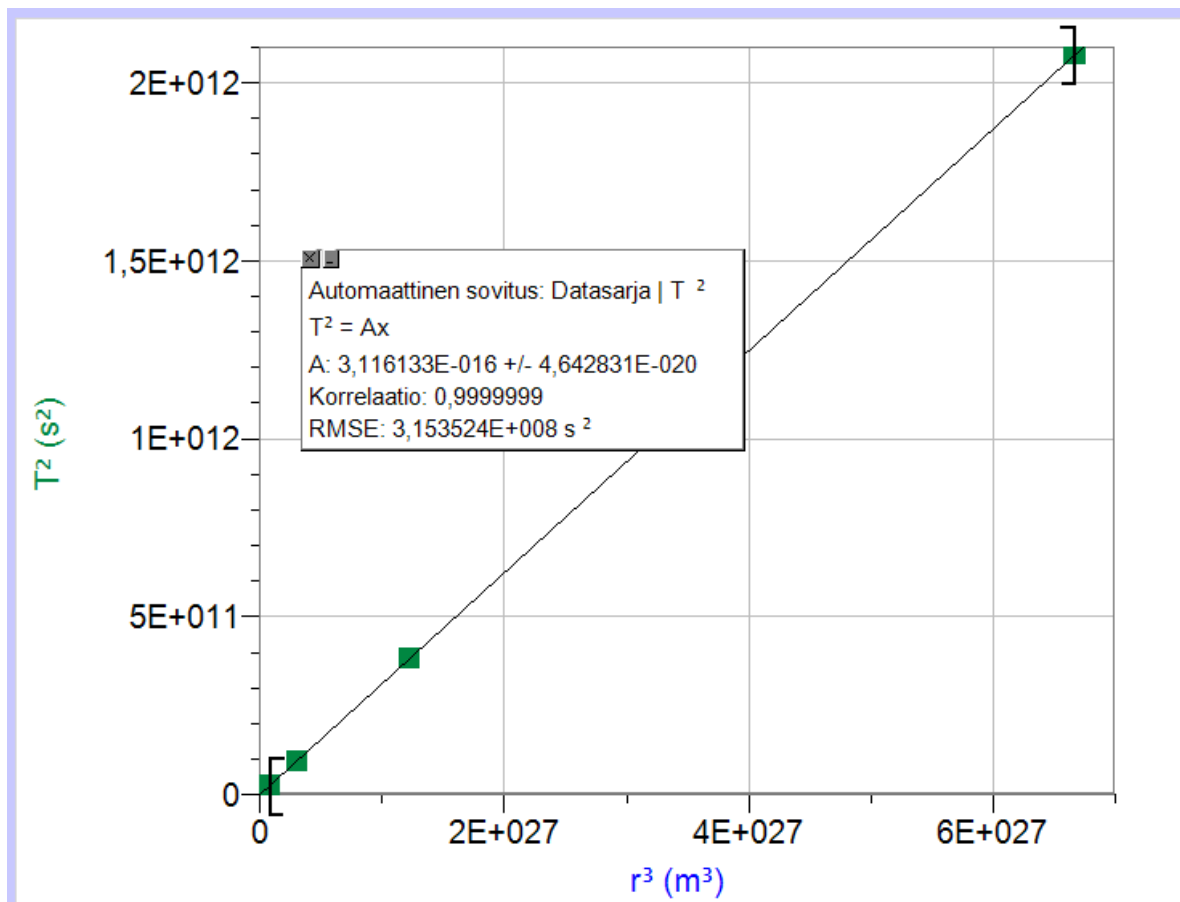
Kirjoitetaan yhtälö muotoon, josta näkyvät mitatut suureet T ja r .

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma M} r^3$$

Lasketaan uudet arvot T^2 ja r^3 :

Datarja			
r (km)	T (d)	r ³ (m ³)	T ² (s ²)
421800	1,77	7,504E+025	2,339E+010
671100	3,55	3,022E+026	9,408E+010
1070400	7,16	1,226E+027	3,827E+011
1882700	16,69	6,673E+027	2,079E+012

ja piirretään (r^3, T^2) -kuvaaja:



$$k = 3,116133 \cdot 10^{-16} \frac{s^2}{m^3}$$

$$k = \frac{4\pi^2}{\gamma M}$$

$$M = \frac{4\pi^2}{\gamma k}$$

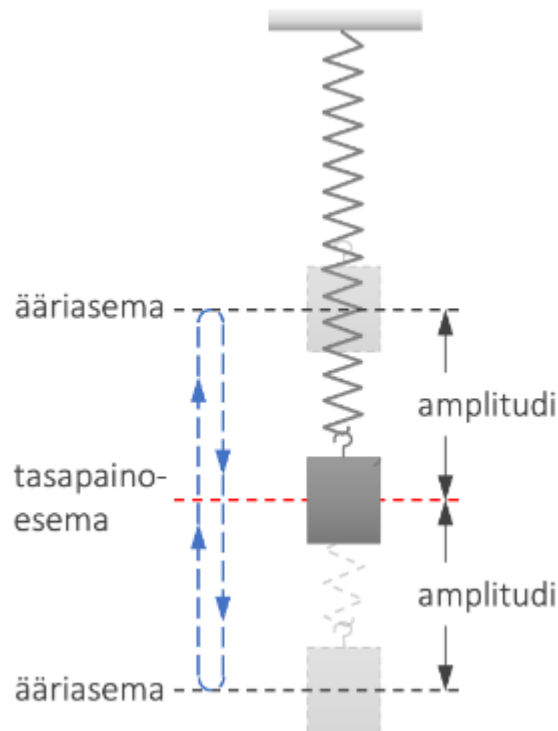
$$M = \frac{4\pi^2}{6,674 \ 30 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 3,115 \ 87 \cdot 10^{-16} \frac{s^2}{m^3}} \approx 1,90 \cdot 10^{27} \text{ kg}$$

V: Jupiterin massa on $1,90 \cdot 10^{27} \text{ kg}$

5 Jaksollinen liike

5 Jaksollinen liike

- Jaksollisessa liikkeessä kappale *värähtelee*
 - kappaleen paikka tai muoto muuttuu jaksollisesti:
 - 1. ääriasema $\leftrightarrow$ tasapainoasema $\leftrightarrow$ 2. ääriasema



- Amplitudi** A (m) on etäisyys tasapainoasemasta ääriasemaan
- Jaksonaika** T (s) on kahden peräkkäisen saman **vaiheen** välillä kuluva aika
 - taajuus** jaksonajan käänteisarvo $\frac{1}{T}$ $\left(\frac{1}{s}\right)$

ESIM2

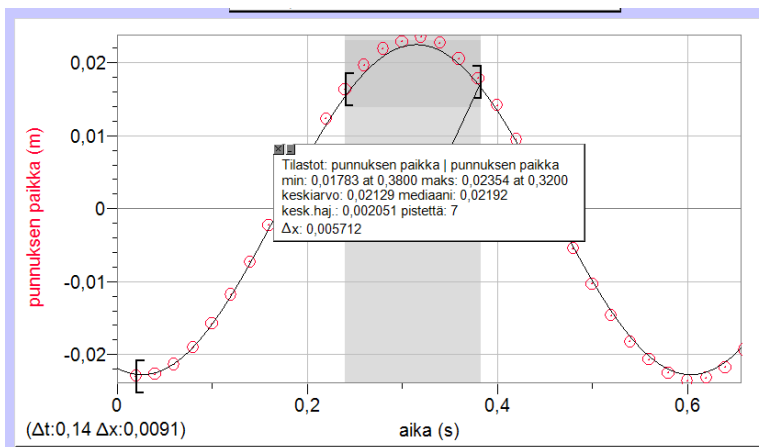
Punnus ripustettiin jouseen, ja systeemi saatettiin värähtelemään. Punnuksen paikkaa mitattiin ajan funktiona ultraäänianturin avulla. Mittaustulokset on esitetty oheisessa kuvaajassa.

a) Punnus liikkuu aluksi ylöspäin. Millä ajanhetkellä liikkeen suunta vaihtuu ensimmäisen kerran?

b) Missä kohdassa punnuksen nopeus on suurimmillaan?
Kuinka suuri tämä nopeus on?

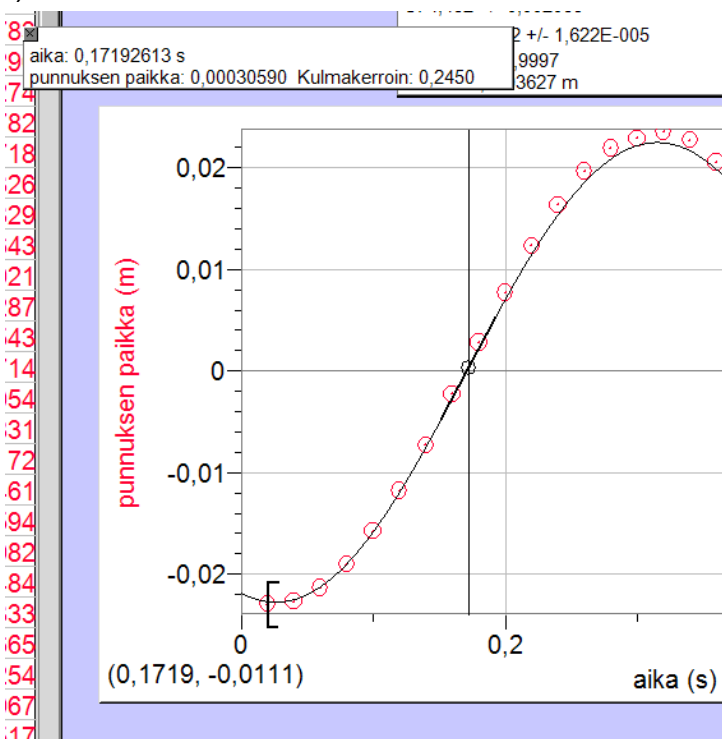
c) Millä ajanhetkellä punnuksen kiihtyvyys on suurimmillaan

a)



Ajanhetkellä $t = 0,32 \text{ s}$ liikkeen suunta vaihtuu.

b)

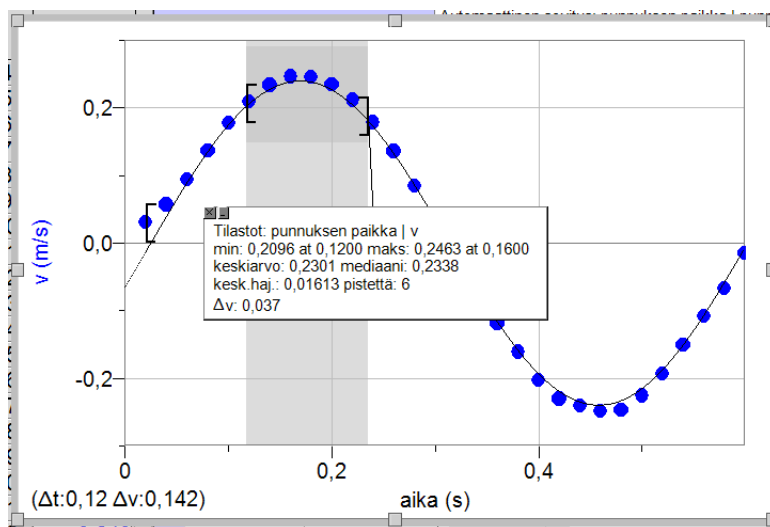


Nopeus on kuvaajan fysikaalinen kulmakerroin $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

ja se on suurimmillaan $0,2450 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0,25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ajanhetkellä

$t = 0,1719 \text{ s} \approx 0,17 \text{ s}$.

(nopeus on paikan derivaatta, joten voidaan myös laskea derivaatta("punnuksen paikka") ja tehdä lasketuilla arvoille sovitekäyrä:

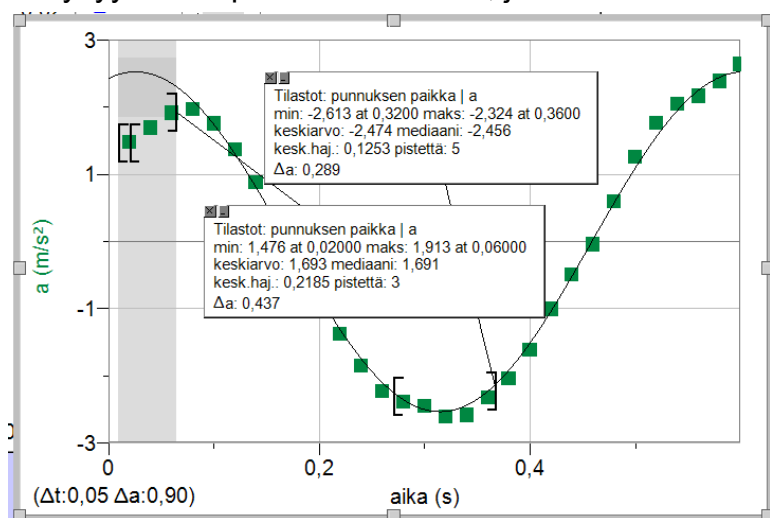


nopeus on suurimmillaan $0,2463 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0,25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ajanhetkellä

$$t = 0,1600 \text{ s} \approx 0,16 \text{ s} .)$$

c)

Kiihtyvyys on nopeuden derivaatta, joten derivoidaan nopeus ja sovitetään käyrä:

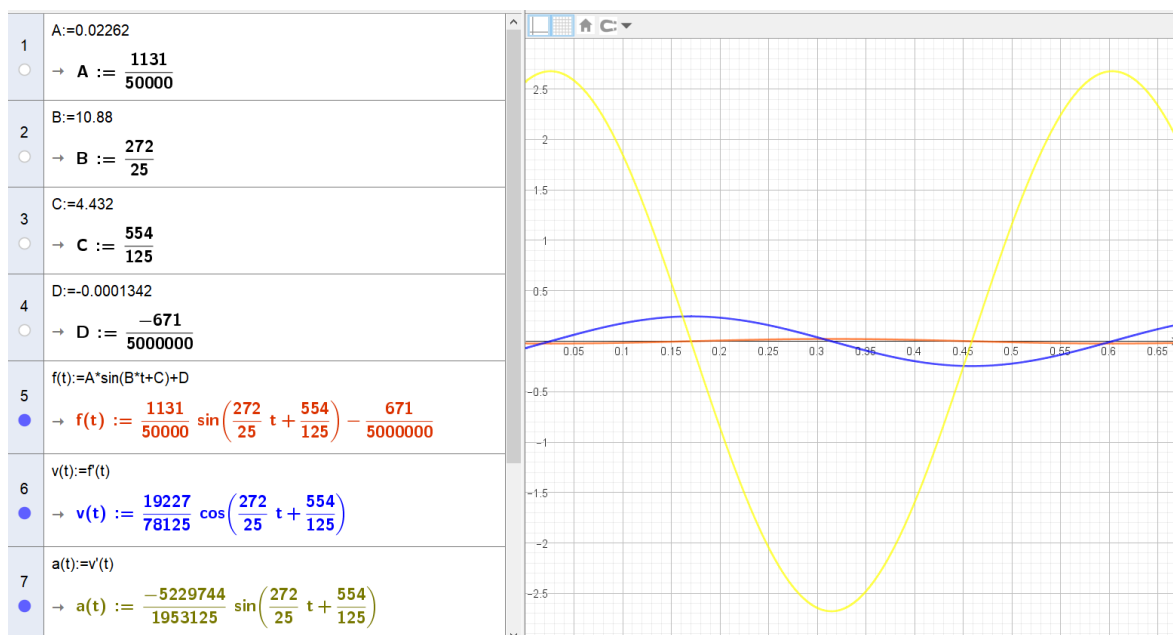


Kiihtyvyyden suurin arvo on ajanhetkellä $t = 0,360 \text{ s} \approx 0,36 \text{ s}$ ja toistuu aina

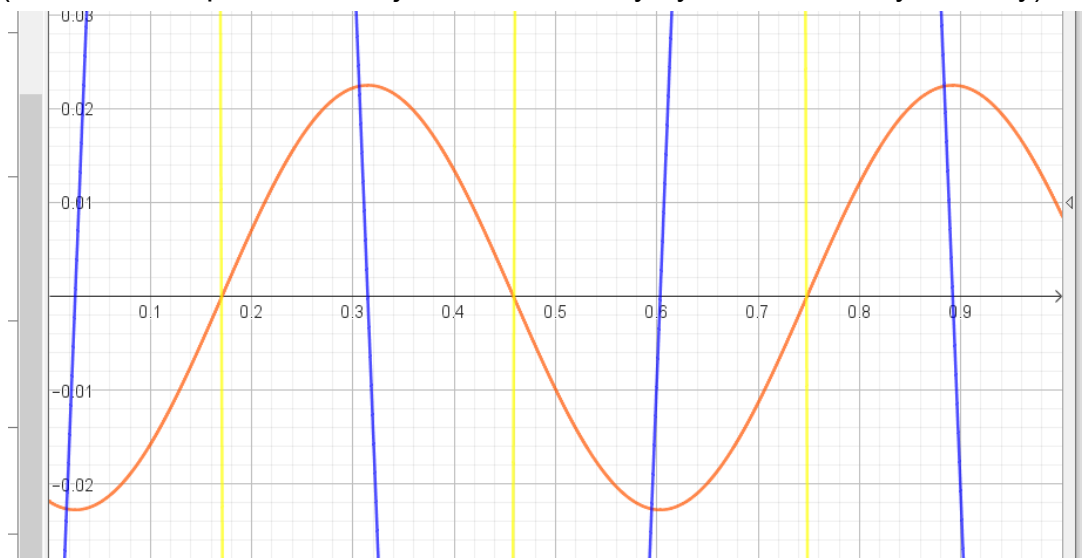
$$0,36 \text{ s} - 0,06 \text{ s} = 0,30 \text{ s} \text{ välein.}$$

(kiihtyvyyden arvo on eri ääriarvoissa, koska derivoitiin mittaustuloksia)

Tehdään Geogebraa sama, kun ensin Loggerprossa punnuksen paikan sovite tehty.



(huomaa, että paikan kuvaajassa ei tässä näy hyvin, että sinikäyrä ei näy)



Huomaathan: kun **paikka (oranssi)** on 0 (tasapainoasema), **nopeus (sininen)** on suurin ja **kiikhtyvyys (keltainen)** 0.
Kun paikka on huipussa (ääriasema), on kiikhtyvyys (keltainen) suurin ja nopeus 0.

Lasketaan maksimeja ja minimejä (ajanhetki (s), funktion arvo (m, v/s, v/s²))

8	Max(f,0,0.7)
☐	$\approx (0.31452, 0.02249)$
9	Max(v,0,0.7)
☐	$\approx (0.17015, 0.24611)$
10	Max(a,0,0.25)
☐	$\approx (0.02577, 2.67763)$
11	Min(a,0.25, 0.4)
☐	$\approx (0.31452, -2.67763)$

Tehtäviä

6 Harmoninen voima

6 Harmoninen voima

Mittaus: venymä x ja voima F .

- Jousessa vaikuttava voima on $\vec{F}$ ja sen kaava on

$$\vec{F} = k\vec{x}$$

, jossa k on jousen **jousivakio** ja $\vec{x}$ on jousen poikkeama tasapainoasemasta.

- Jousivakio k kuvaa jousen jäykkyyttä. Jousivakion yksikkö on

$$[k] = \frac{[F]}{[x]} = \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad \text{tai} \quad \frac{\text{N}}{\text{m}} = \frac{\frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}}{\text{m}} = \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$$

- harmoniseksi voimaksi** kutsutaan voimaa, jonka suunta on aina kohti tasapainoasemaa ja jonka suuruus on suoraan verrannollinen etäisyyteen tasapainoasemasta.
- Harmonisen voiman potentiaalienergia on

- $E = \frac{1}{2}kx^2$

- Jousivoima on harmoninen voima.
 - Poikkeama voi olla joko positiivista (jousta venytetään) tai negatiivista (jousta puristetaan kasaan).
 - Jousivoima ja poikkeama ovat aina vastakkaissuuntaisia.

- $F = -kx$

ESIM1

Jousi venyi 13 cm, kun siihen ripustettiin juomatölkki, jonka massa oli 340 grammaa. Kun jouseen ripustettiin mato-ongella saatu ahven, jousi venyi 7,0 cm.

a) Kuinka suuri oli jousen jousivakio?

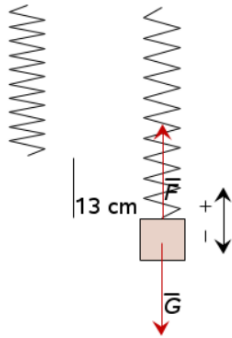
b) Kuinka suuri oli ahvenen massa?

a)

$$x_j = 13 \text{ cm} = 0,13 \text{ m}$$

$$m_j = 340 \text{ g} = 0,340 \text{ kg}$$

$$k = ?$$



Newtonin toisen lain mukaan $\Sigma F = 0$

$$F - G = 0 \quad \parallel \quad F = kx \quad , \quad G = mg$$

$$kx - mg = 0$$

$$k = \frac{mg}{x} = \frac{0,340 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0,13 \text{ m}} = 25,6569... \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$k \approx 26 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

b)

$$x_a = 0,070 \text{ m}$$

$$m_a = ?$$

Newtonin toisen lain mukaan $\Sigma F = 0$

$$F - G = 0 \quad \parallel \quad F = kx \quad , \quad G = mg$$

$$kx - mg = 0$$

$$m = \frac{kx}{g} = \frac{25,6569... \frac{\text{kg}}{\text{s}^2} \cdot 0,070 \text{ m}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0,18307... \text{ kg}$$

$$m = 0,183 \text{ kg} = 183 \text{ g}$$

$$k = m \cdot g / x$$

$$= 25,65692307692307692308$$

$$x = 0,070$$

$$= 0,07$$

$$m_a = k \cdot x / g$$

$$= 0,18307692307692307692$$

ESIM1 (aineisto-6-esim2)

Määritä mittausten avulla jousen A jousivakio.

Jousen harmoninen voima

$$F = kx$$

(jousivakio saadaan (x, F)-kuvaajan kulmakertoimesta)

(voimakuvio)

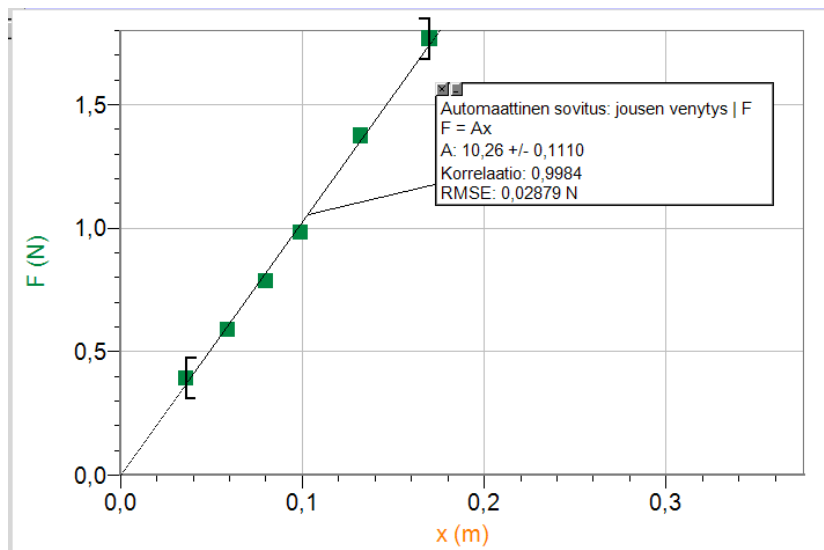
Kappale on paikallaan, joten Newtonin toisen lain mukaan $\Sigma F = 0$:

$$F - G = 0$$

$$F = G = mg$$

Lasketaan massojen m avulla voimat $F = mg$ ja piirretään (x, F)-kuvaaja.

	jousen venytys				
	m (g)	x(A) (cm)	x(B) (cm)	F (N)	x (m)
1	40	3,6	2,8	0,392	0,036
2	60	5,9	3,9	0,589	0,059
3	80	8	5,8	0,785	0,080
4	100	9,9	7,4	0,981	0,099
5	140	13,2	9,8	1,373	0,132
6	180	17	12,7	1,766	0,170



Jousivakio saadaan kuvaajan fysikaalisesta kulmakertoimesta

$$k = \frac{\Delta F}{\Delta x} = 10,26 \frac{\text{N}}{\text{m}} \approx 10 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

6.1 Harmoninen värähtely

6.1 Harmoninen värähtely ja mekaaninen energia

- Harmonisessa värähtelyssä mekaaninen energia on jousen potentiaalienergiaa ja värähtelijän liike-energiaa

- $E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ (jouselle)

- tasapainoasema:

- **poikkeama** 0 m
 - **kiihtyvyys** 0 (**voima** 0)
 - **nopeus** suurimmillaan

- ääriasema:

- **poikkeama** suurimmillaan
 - **kiihtyvyys** suurimmillaan (**voima** suurin)
 - **nopeus** 0

- Resonanssissa kappaleeseen vaikuttaa ulkoinen voima, jonka taajuus on sama kuin kappaleen ominaistajuus (f_0) tai ominaistajuuden monikerta. Tällöin kappaleen värähtelyn amplitudi kasvaa.

- Harmonisen värähtelijän jaksonaika

- $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$, punnuksen massa m ja jousen jousivakio

k

- Heilurin jaksonaika

- $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$, heilurin pituus l ja putoamiskiihtyvyys g

- Harmonista värähtelyä voidaan mallintaa matemaattisesti sinifunktion avulla.

- $x(t) = A \sin (2\pi ft + \varphi)$

missä A on **amplitudi**, f taajuus

- LoggerProssa: $x = A \cdot \sin(Bt + C) + D$

- A on amplitudi A

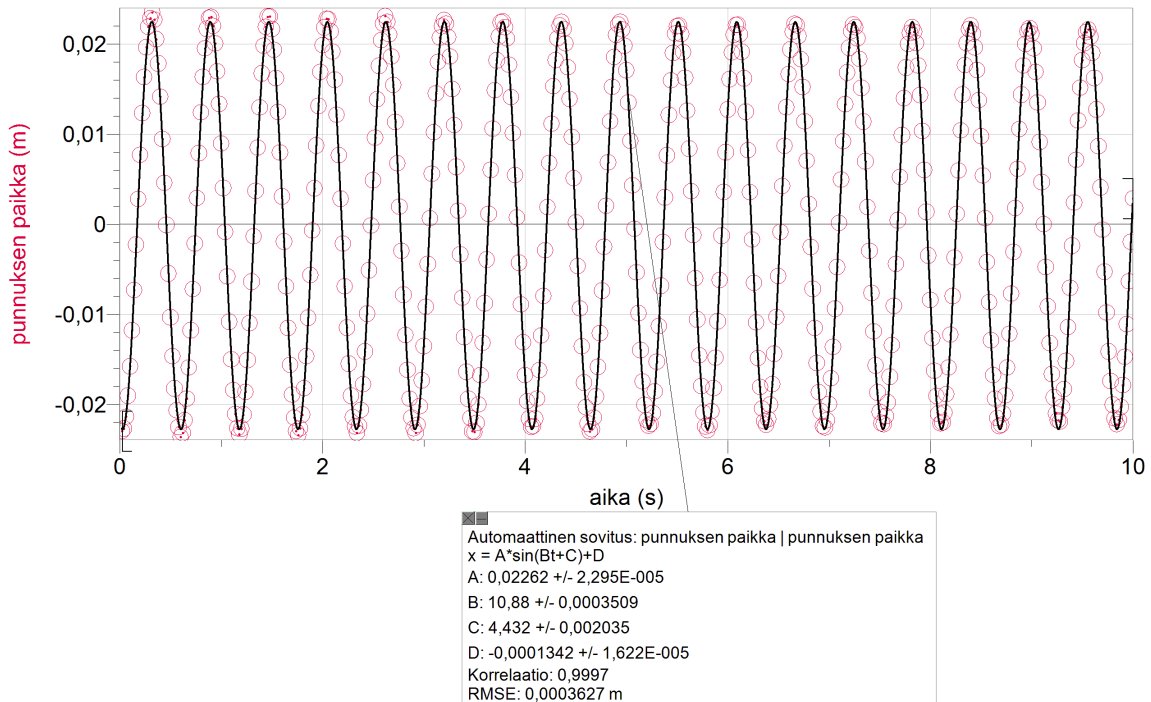
- $B = 2\pi f$

- $C = \varphi$ eli vaihe

- D kertoo tasapainoaseman paikan

ESIM1. (aineisto-6.1-esim1)

Määritä mittausten perusteella värähtelijän taajuus.



Taajuus saadaan sovituksen vakiosta B:

$$B = 2\pi f$$

$$f = \frac{B}{2\pi} = \frac{10,88 \frac{1}{s}}{2\pi} = 1,7316... \frac{1}{s} \approx 1,7 \text{ Hz}$$

ESIM2 (aineisto-6.1-esim2)

Jousi ja punnus laitettiin värähtelemään ja värähtelyn jaksonaika määritettiin keskiarvona kahdeksasta värähdyksestä. Mittaus toistettiin erimassaisilla punnuksilla. Oheisessa mittausaineistossa on esitetty jouseen ripustettujen punnusten massat ja värähtelyn jaksonajat. Jousen massa on punnusten massoihin verrattuna hyvin pieni.

Jousen jaksonaika on

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \quad || ()^2$$

$$T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{m}{k}$$

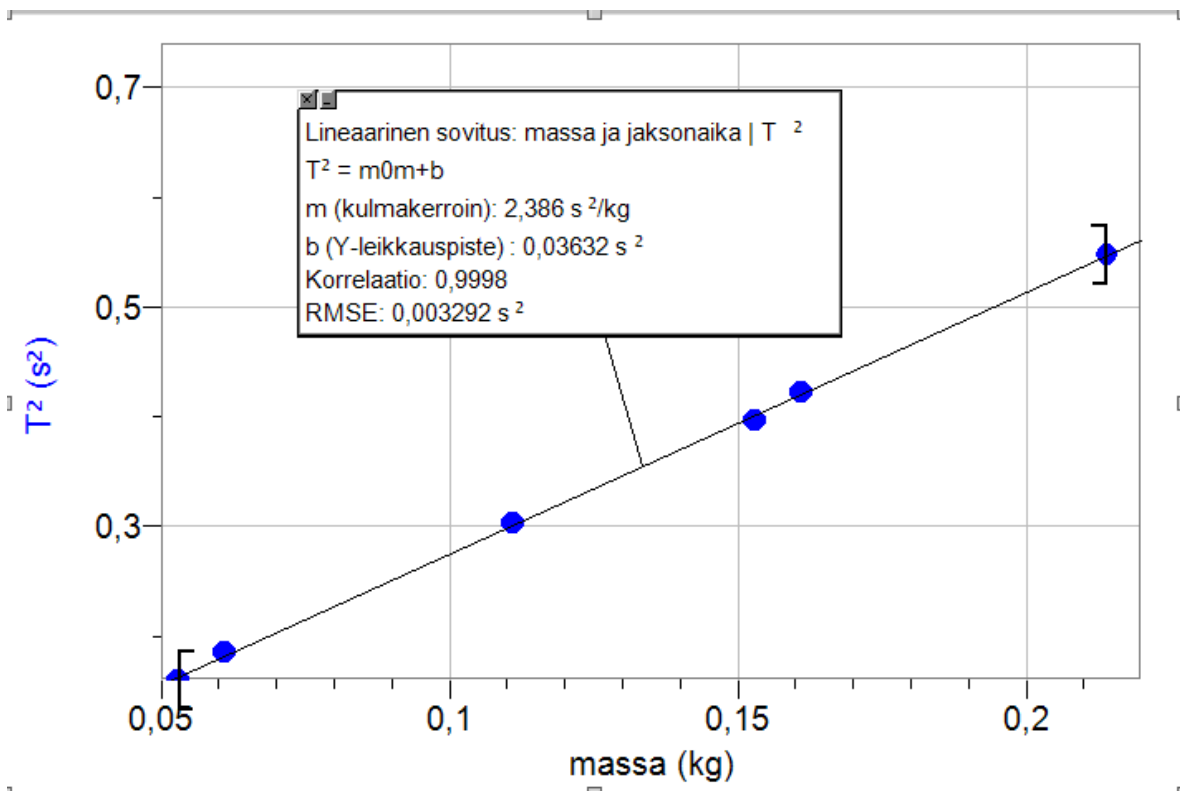
$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k} \cdot m$$

(vrt $y = k \cdot x$)

Jousivakio saadaan siis (m, T^2) -kuvaajan kulmakertoimesta ratkaisemalla

Lasketaan mittauksista jaksonajan neliö T^2 :

massa ja jaksonaika		
m (kg)	T (s)	T ² (s ²)
0,053	0,4	0,160
0,061	0,43	0,185
0,111	0,55	0,303
0,153	0,63	0,397
0,161	0,65	0,423
0,214	0,74	0,548



Jousivakio saadaan kulmakertoimesta ratkaisemalla

$$\frac{4\pi^2}{k} = 2,386 \frac{\text{s}^2}{\text{kg}}$$

$$\frac{4\pi^2}{2,386 \frac{\text{s}^2}{\text{kg}}} = k$$

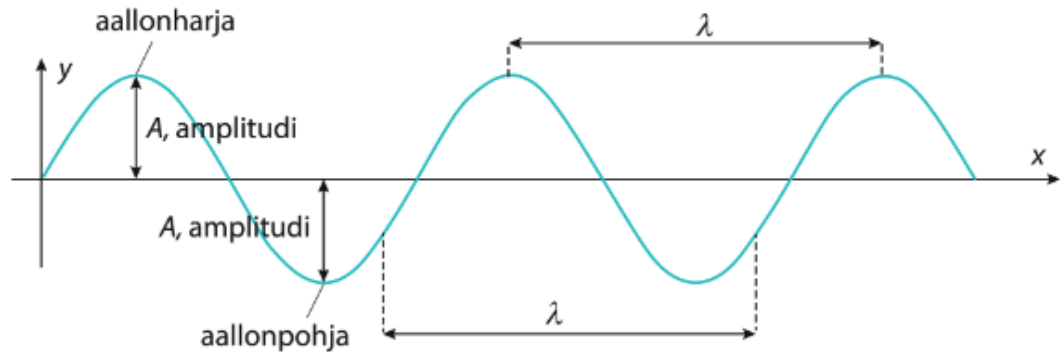
$$k = \frac{4\pi^2}{2,386 \frac{\text{s}^2}{\text{kg}}} = 16,545... \frac{\text{kg}}{\text{s}^2} \approx 17 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$$

V: Jousivakio on 17 N/m

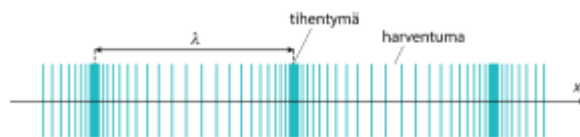
7 Mekaaninen aaltoliike

7 Mekaaninen aaltoliike

- Mekaaninen aalto etenee häiriönä **väliaineessa**.
- Poikittaisessa** aaltoliikkeessä värähtely tapahtuu kohtisuorassa suunnassa aaltoliikkeen etenemissuuntaan nähden.



- Pitkittäisessä** aaltoliikkeessä värähtely tapahtuu aallon etenemissuunnassa.

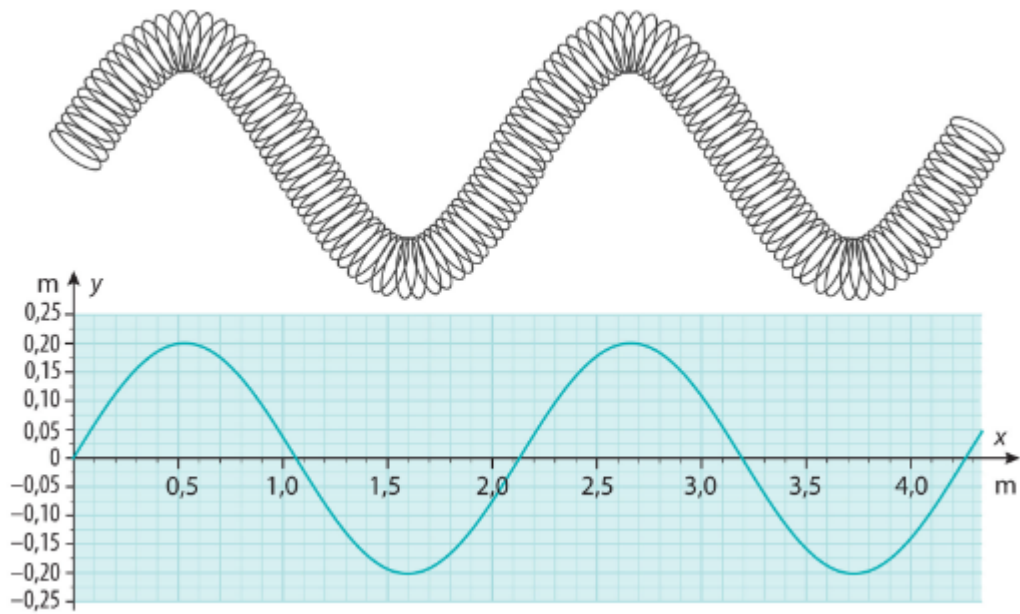


- Aaltolähde** määrää aallon taajuuden f ja **väliaine** määrää aallon etenemisnopeuden v .
- Aaltoliikkeen perusyhtälö on $v = \lambda f$, jossa v on aallon nopeus, f on aallon taajuus ja λ on **aallonpituus (m)**.
- aaltojen interferenssi** tarkoittaa aaltojen yhteisvaikutusta.

ESIM

Pitkää jouta heilutetaan edestakaisin seitsemän kertaa 5,0 sekunnin aikana. Jouseen syntyy aalto, jonka mitat ovat oheisessa kuvassa. Kuinka suuri oli aallon

- amplitudi
- aallonpituus
- etenemisnopeus jousessa?



a) $A = 20 \text{ cm}$

b) luetaan kuvaajasta kahden aallon pituus

$$\lambda = \frac{4,25 \text{ m}}{2} = 2,125 \text{ m} \approx 2,1 \text{ m}$$

c)

$$f = \frac{7}{5 \text{ s}} = 1,4 \frac{1}{\text{s}}$$

aaltoliikkeen perusyhtälöllä

$$v = \lambda f = 2,125 \text{ m} \cdot 1,4 \frac{1}{\text{s}} = 2,975 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 3,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

7.1 Aaltojen heijastuminen ja diffraktio

11 Aalto rajapinnassa

- Kun aalto kulkee rajapinnan läpi, aallon muoto ja taajuus pysyvät samoina.
- Heijastumisessa aalto ei läpäise rajapintaa.
 - Aallon tulokulma α on yhtä suuri kuin heijastuskulma β .
- Taittumisessa aalto läpäisee rajapinnan.
 - Aallon kulkusuunta, nopeus ja aallonpituus muuttuvat.
 - **taajuus** säilyy
- Taittumislain mukaan tulokulman α_1 ja taitekulman α_2 sinien suhde on vakio eli

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} = n = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

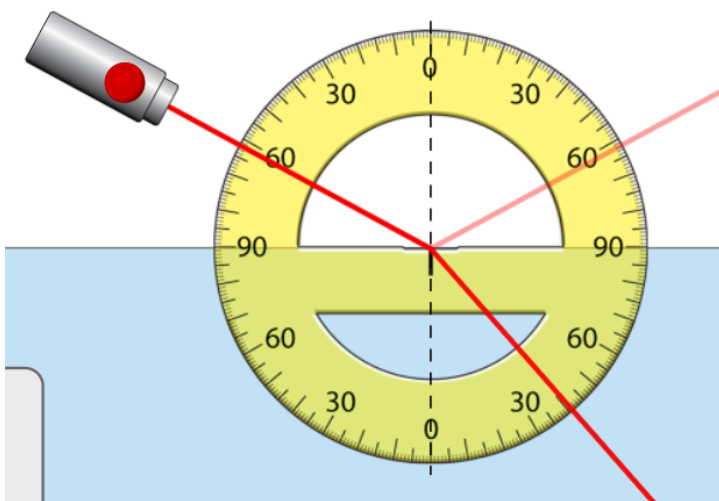
- n = taitekerroin
- Kokonaisheijastuminen
 - voi tapahtua, jos aallon nopeus kasvaa, kun aalto kulkee rajapinnan läpi.
- Kaasun lämpötila vaikuttaa kaasussa kulkevan ääniaallon nopeuteen.

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

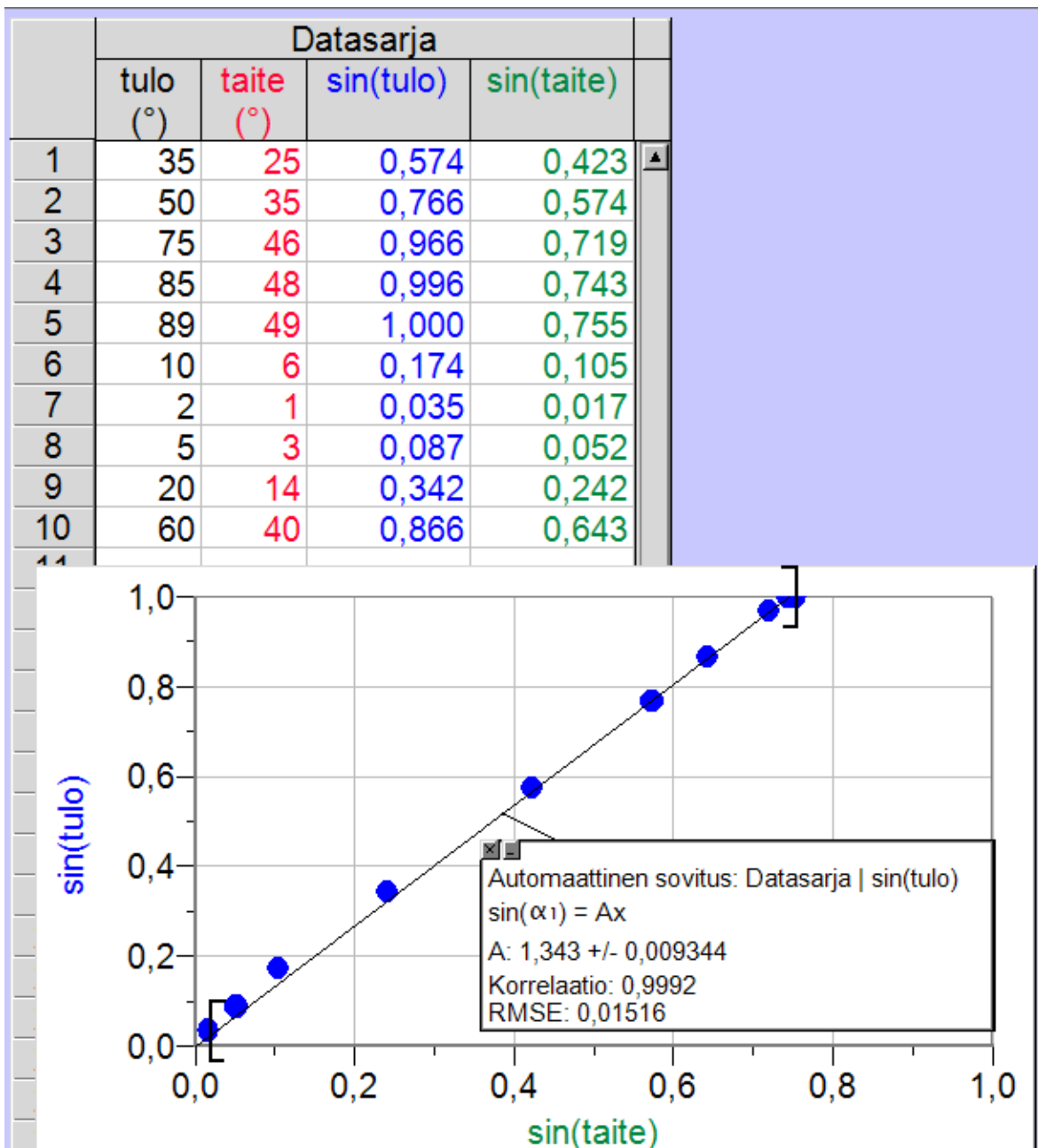
- Huygensin periaate: *jokainen aaltorintaman piste on alkeisaallon lähde*
- Kun aalto kohtaa esteen tai raon, havaitaan **diffraktio** eli aallon taipuminen.
- Kahden tai useamman raon läpäissyt aalto muodostaa diffraktiokuvion diffraktion ja **interferenssin** seurauksena.
- Diffraktiokuvion muoto riippuu rakojen leveyksistä , rakojen välimatkasta d ja aaltojen aallonpituudesta λ .

koe

Mitataan tulo- ja taitekulmia.



Taulukoidaan ja lasketaan kulmien sin:



Kulmakerroin on taitekerroin $n_{12} = 1,343$.

ESIM1.

Uima-altaassa veden pinta-aallot taittuvat porraskelman kohdalla, koska aaltojen eteneminen hidastuu, kun ne saapuvat matalaan veteen. Aaltojen nopeus on syvässä vedessä ennen porrasta 0,25 m/s ja porraskelman päällä 0,20 m/s. Aallot kohtaavat portaan 60°:n tulokulmassa. Mikä on taitekulma?

$$\alpha = 60^\circ$$

$$\beta = ?$$

$$v_1 = 0,25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_2 = 0,20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

taittumislain mukaan

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{v_1}{v_2}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{v_1}{v_2} \cdot \sin(\beta)$$

$$\sin(\beta) = \frac{v_2}{v_1} \cdot \sin(\alpha) = \frac{0,20 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,25 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \cdot \sin(60^\circ)$$

$$\begin{aligned} &0,2/0,25*\sin(60) \\ &= 0,69282032302755091741 \\ &\arcsin(\text{ans}) \\ &= 43,85377861202205652871 \end{aligned}$$

$$\beta = 43,853...^\circ \approx 44^\circ$$

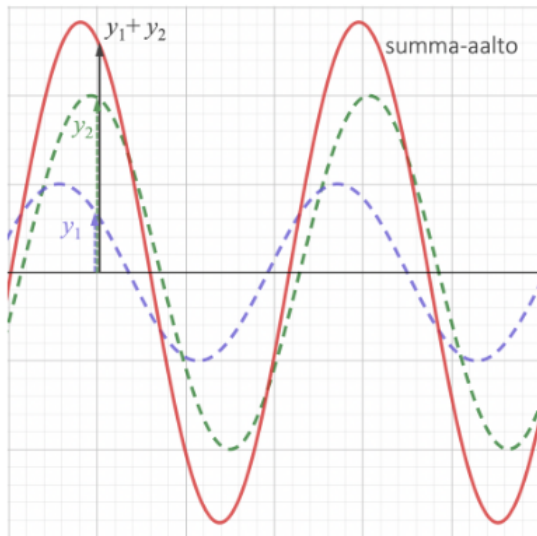
ESIM2

Maanpinnan lähelle voi muodostua sopivissa sääolosuhteissa inversiokerros. Inversiokerroksen kylmä ilma jää ylempänä olevan lämpimämmän ilman alapuolelle. Eräänä aamuna inversiokerroksen ilman lämpötila on -20°C ja sen päällä olevan lämpimän ilmakerroksen lämpötila on -12°C . Vihellysäänen taajuus on 390 Hz. Laske, kuinka suuria seuraavat vihellysäänen suuret ovat rajapinnan eri puolilla.

7.2 Aaltojen interferenssi

7.2 Aaltojen interferenssi

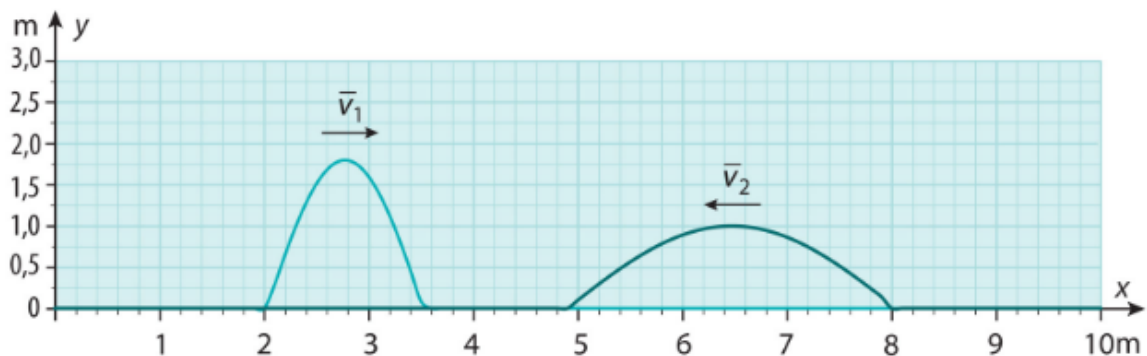
- Kun kaksi aaltoa kohtaa, aallot summautuvat:



- summa-aallon** syntyminen noudattaa **superpositioperiaatetta**
- summautumista kutsutaan **interferenssiksi**
- jos aalloilla on
 - sama vaihe, tapahtuu **voimistava interferenssi**
 - eri vaihe, tapahtuu **heikentävä interferenssi**

ESIM1

Kaksi pulssia lähestyy toisiaan kuvan mukaisesti nopeuksilla $v_1 = v_2 = 1,0 \text{ m/s}$. Kuva on tilanteesta ajanhetkellä $t = 0,0 \text{ s}$. Piirrä kuvasarja pulssien kohtaamisesta ajanhetkillä $1,0 \text{ s}$, $2,0 \text{ s}$ ja $3,0 \text{ s}$.



ESIM

Audacity: miksaus

- Luo -> Ääni -> sin 440, kahdesti

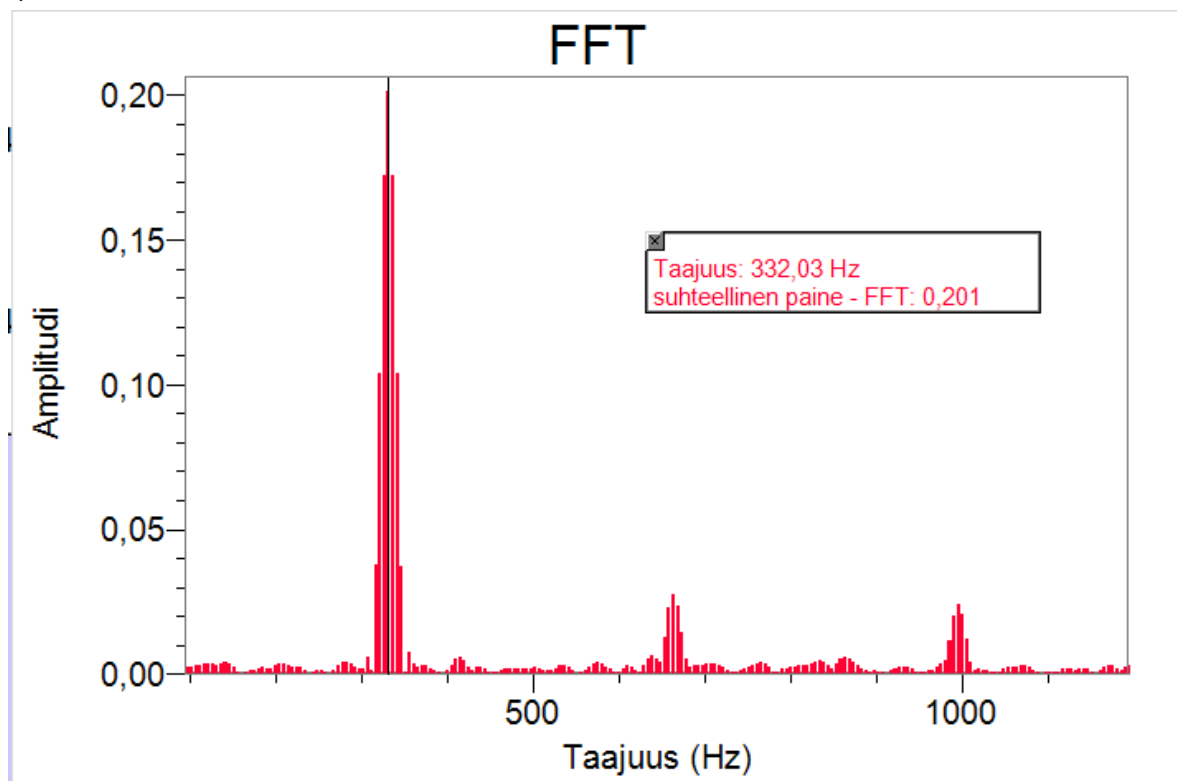
- Mykäksi toinen, soita.
- Sitten yhdessä. (...)
- Raidat -> Miksaa (... kuin äsken, amplitudi ...)
- Efekti -> Vastaaäni (... - superpositio ... aallon)
- Luo ääni 440, toinen 443 (...)
- Miksaa (summa-aallossa näkyy ...)

ESIM2 (aineisto-7.2-esim2)

Kitaran e-kielen tuottamaa ääntä mitattiin tietokoneeseen liitettyllä mikrofonilla. Oheisessa mittausaineistossa on kielen synnyttämän äänen suhteellinen paine eri ajanhetkillä.

- Tee mittausaineistolle taajuusanalyysi FFT-analyysin avulla ja esitä äänen spektri.
- Mitä taajuuksia kitaran kieli tuotti?
Minkä taajuuden suhteellinen amplitudi oli suurin?
- Mitä voit havaita kielen tuottaman äänen taajuuksista?
- Kokeile Sound Analyzeria ja katso, millaisia taajuuksia eri soittimet tai äänet (kopautus, puhe...) tuottavat

a)



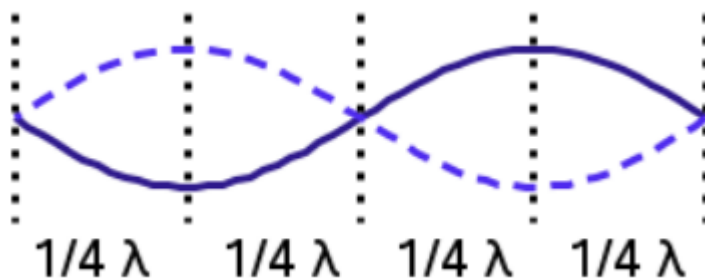
- Kuvaajasta voidaan lukea, että taajuudet olivat 332 Hz, 664 Hz ja 996 Hz.
- Toinen taajuus on $2 \times$ eka, kolmas on $3 \times$ eka.
- Kännykällä.

7.3 Seisova aalto

7.3 Seisova aalto

- Kun kaksi vastakkaisesti suuntiin etenevää aaltoa kohtaa, aaltojen interferenssin seurauksena syntyy seisova aalto, jos aalloilla on sama taajuus ja sama aallonpituus.
 - Seisovan aallon paikallaan pysyvät kohdat ovat seisovan aallon **solmuja**.
 - Kohdat, joissa värähtelijöiden liike on laajinta, ovat seisovan aallon **kupuja**.
- Perustaajuus on pienin seisovan aallon *ominaistaajuus*, joka värähtelijään voi syntyä.
- Soittimien äänissä kuuluu perustaajuuksien lisäksi ylävärähtelyjen taajuuksia, jotka muodostavat *harmonisen sarjan*.

huom, aallon voi jakaa neljäsosiin näin:



ESIM1

Molemmista päistä jännitetyn kielen (molemmista päistä avoimen putken) perustaajuus on f_1 . Mitkä ovat ylätaajuuudet?

Kielen pituus on L , joten perustaajuudessa aalto on puolikas kielestä (tai kokonaiseen aaltoon tarvittaisiin kaksi kielen pituutta)

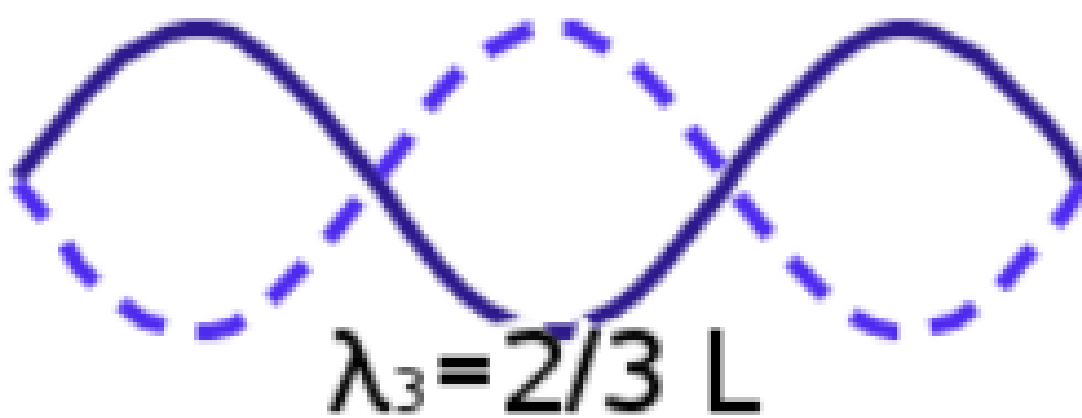
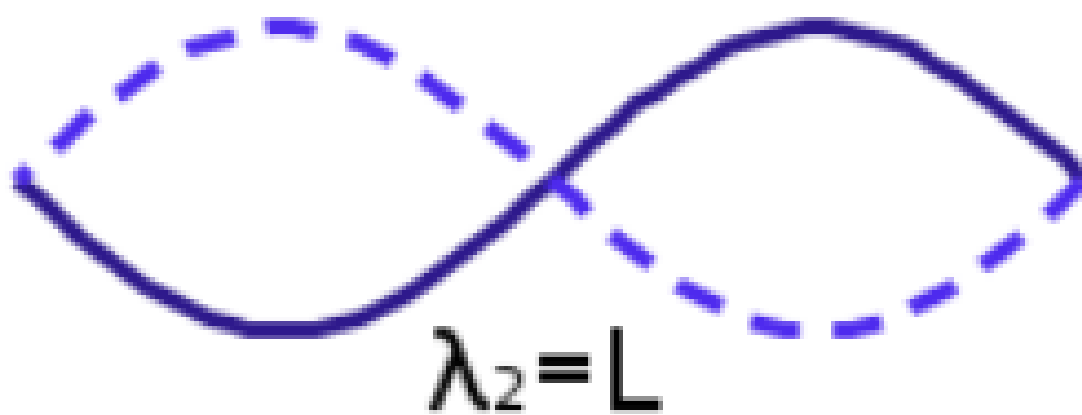
$$L = \frac{1}{2} \lambda_1 \quad \text{eli} \quad \lambda_1 = 2L$$

Perustaajuus on siis aaltoliikkeen perusyhtälön $v = \lambda f$ mukaan:

$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2L}$$

Toinen taajuus (1. ylätaajuus) tulee, kun on kaksi kupua eli kielessä yksi aalto:


L



$$\lambda_2 = L = \frac{1}{2} \cdot 2L$$

$$f_2 = \frac{v}{\lambda_2} = \frac{v}{\frac{1}{2} \cdot 2L} = 2 \cdot \frac{v}{2L} = 2f_1$$

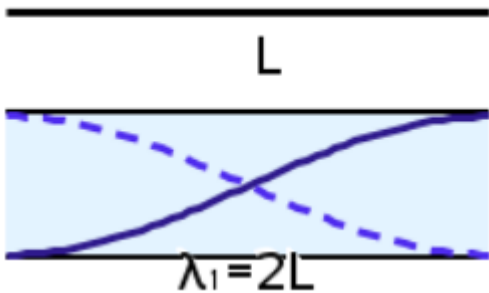
Kolmas taajuus on, kun on kolme kupua eli kielessä 3/2 aaltoa:

$$L = \frac{3}{2} \lambda_3 \quad \text{eli} \quad \lambda_3 = \frac{2}{3} L = \frac{1}{3} \cdot 2L$$

$$f_3 = \frac{v}{\lambda_3} = \frac{v}{\frac{1}{3} \cdot 2L} = 3 \cdot \frac{v}{2L} = 3f_1$$

Siis: taajuudet noudattaa kaavaa $f_1, 2f_1, 3f_1, \dots$ ($f_n = n f_1$)

Molemmista päistä avoin putki noudattaa samaa kaavaa.



(putkessa on kaksi neljäsosa-aaltoa)

ESIM2

Toisesta päästä avoimen putken perustaajuus on f_1 . Mitkä ovat ylätaajuudet?

Putkessa syntyy kupu avoimeen päähän ja solmu suljettuun päähän.
Ylätaajuudet kuten kuvassa, aina tulee yksi kupu lisää.

Kielen pituus on L, joten perustaajuudessa:

$$L = \frac{1}{4} \lambda_1 \quad \text{eli} \quad \lambda_1 = 4L$$

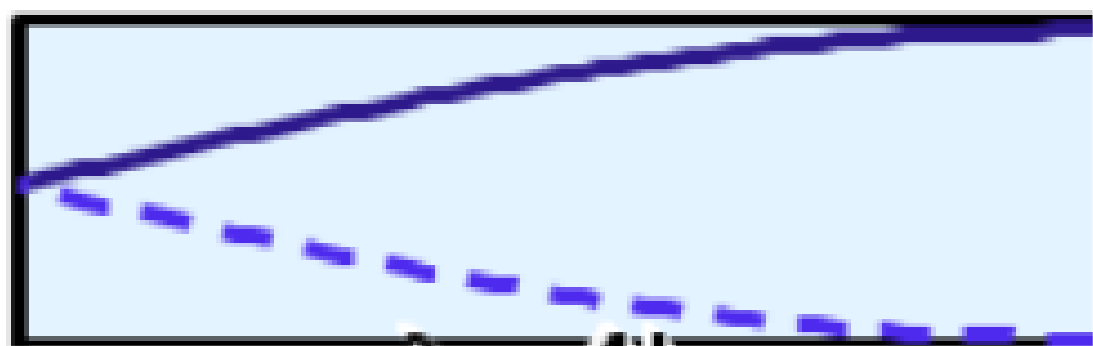
Perustaajuus on siis aaltoliikkeen perusyhtälön $v = \lambda f$ mukaan:

$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{4L}$$

Toinen taajuus (1. ylätaajuus) tulee, kun on kaksi kupua:

$$\lambda_2 = \frac{4}{3} L = \frac{1}{3} \cdot 4L$$

L



$$\lambda_1 = 4L$$



$$\lambda_2 = \frac{4}{3}L$$



$$\lambda_3 = \frac{4}{5}L$$

$$f_2 = \frac{v}{\lambda_2} = \frac{v}{\frac{1}{3} \cdot 4L} = 3 \cdot \frac{v}{4L} = 3f_1$$

Kolmas taajuus on, kun on kolme kupua:

$$L = \frac{5}{4} \lambda_3 \quad \text{eli} \quad \lambda_3 = \frac{4}{5} L = \frac{1}{5} \cdot 4L$$

$$f_3 = \frac{v}{\lambda_3} = \frac{v}{\frac{1}{5} \cdot 4L} = 5 \cdot \frac{v}{4L} = 5f_1$$

Siis: taajuudet noudattaa kaavaa $f_1, 3f_1, 5f_1, \dots$ ($f_n = (2n - 1) f_1$)

ESIM3

Onko nokkahuilu molemmista päistä avoin putki vai toisesta päästä suljettu?
FFT-muunnos

Soitetaan nokkahuilulla G.

Alin taajuus eli perustaajuus oli 790 Hz.

Toinen taajuus oli 1580 Hz

Tämä sopii sarjaan $f_1, 2f_1$ (sarja johdettu yllä)

Joten nokkahuilu on molemmista päistä avoin putki.

8 Äänen ominaisuuksia

8 Äänen ominaisuuksia

- Ääni on mekaanista **pitkittäistä** aaltoliikettä, joka noudattaa aaltoliikkeen perusyhtälöä.
- Huojunnassa kaksi lähes samantaajuista ääniaaltoa interferoi ja aiheuttaa äänen voimakkuuden jaksollisen vaihtelun.
 - voimakkuus vaihtelee **huojuntataajudella** $f_H = |f_1 - f_2|$
- Dopplerin ilmiössä havaittavan äänen taajuus muuttuu, kun äänilähde tai havaitsija ovat liikkeessä toistensa suhteen.
 - Äänilähde liikkuu: $f = f_0 \frac{v}{v \pm v_l}$
 - Havaitsija liikkuu: $f = f_0 \frac{v \pm v_h}{v}$
 - **MAFYTAULUKOT**
- Äänen taajuus kuvaa äänen **korkeutta** .
- Äänen amplitudi liittyy äänen **voimakkuutta** .

ESIM1.

Äänirauta värähtelee taajuudella 440 Hz. Äänen nopeus ilmassa on 343 m/s. Kuinka suuri on ilmassa etenevän ääniaallon aallonpituus?

Aaltoliikkeen perusyhtälö $v = \lambda f$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{343 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{440 \frac{1}{\text{s}}} = 0,7795... \text{ m} \approx 0,780 \text{ m}$$

ESIM2.

Juna kulkee nopeudella $150 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Se lähestyy tunnelia ja viheltää taajuudella 1000 Hz.

a) Kuinka korkean äänen kuulee tunnelin suulla oleva havaitsija?

$$v = 343 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad , \quad v_l = \left(\frac{150}{3,6} \right) \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad , \quad f_0 = 1000 \text{ Hz}$$

Dopplerin ilmiö, äänilähde liikkuu, joten kuullaan taajuus:

$$f = f_0 \cdot \frac{v}{v - v_l} = 1000 \text{ Hz} \cdot \frac{343 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{343 \frac{\text{m}}{\text{s}} - \left(\frac{150}{3,6}\right) \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

$$f = 1138,27... \text{ Hz} \approx 1140 \text{ Hz}$$

$$1000 * 343 / (343 - 150 / 3,6) \\ = 1138,27433628318584070$$

b) Ääni heijastuu vuoren seinämästä. Kuinka korkean äänen kuulee kuljettaja?
Dopplerin ilmiö, havaitsija liikkuu, joten kuullaan taajuus:

$$f_2 = f_{02} \cdot \frac{v + v_h}{v} \quad , \quad f_{02} = f = 1138,27433... \text{ Hz}$$

$$v_h = \left(\frac{150}{3,6}\right) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$f = 1276,548... \text{ Hz} \approx 1280 \text{ Hz}$$

$$\text{ans} * (343 + 150 / 3,6) / 343 \\ = 1276,548672566371681415$$

8.1 Äänen voimakkuus

8.1 Äänen voimakkuus

- Äänen **intensiteetti** on äänen teho pinta-alaa kohden, $I = \frac{P}{A}$.
- Intensiteetin yksikkö on $[I] = \frac{[P]}{[A]} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$.
- **Äänekkyystaso** kuvaa kuuloaistimuksen voimakkuutta. Äänekkyystason yksikkö on **foni**.
- Äänen **intensiteettitaso** L kuvaa äänen voimakkuutta logaritmisella asteikolla. Intensiteettitaso on yksikkö on **desibeli, dB**.

$$L = 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right) \text{ dB} \quad , \text{ missä } I_0 \text{ on intensiteettitasovertailuarvo}$$

- (MAOL: $I_0 = 1 \cdot 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$)
- Aina kun intensiteetti kymmenkertaistuu, kasvaa intensiteettitaso 10 desibelillä
(jos intensiteetti kaksinkertaistuu, intensiteettitaso kasvaa 3 dB)
- **Infra-** ja **ultraääni** ovat ääntä, joiden taajuus on ihmisen kuuloalueen ulkopuolella. Infraäänin taajuus on alle 20 Hz , ja ultraäänin taajuus on yli 20 kHz .

ESIM1

a) Auton äänentoistojärjestelmän tuottaman äänen intensiteetti on $3,9 \cdot 10^{-4} \text{ W/m}^2$. Kuinka suuri on äänen intensiteettitaso autossa?

$$I = 3,9 \cdot 10^{-4} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$L = 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right) \text{ dB} = 10 \cdot \lg\left(\frac{3,9 \cdot 10^{-4} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}{1 \cdot 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}\right) \text{ dB}$$

$$L \approx 86 \text{ dB}$$

$$10 \cdot \log(10; 3.9e-4 / 1e-12) = 85,910646070264992065$$

b) Koulun ruokalassa mitataan äänen intensiteettitasoksi 78 dB.
Kuinka suuri on äänen intensiteetti?

$$L = 78 \text{ dB} \quad I = ?$$

$$L = 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right) \text{ dB}$$

$$L = 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right), I$$

$$\text{Ratkaise: } \{I = I_0 \cdot 10^{\frac{1}{10}L}\}$$

$$\{I = I_0 \cdot 10^{\frac{1}{10}L}\}$$

Sijoita, $I_0 = 1 \cdot 10^{-12}$, $L = 78$:

$$\{I = 1 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{\frac{1}{10} \cdot 78}\}$$

\$2

$$\approx \{I = 0.000063095734448\}$$

$$I \approx 6,3 \cdot 10^{-5} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

"Käsin"

$$L = 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right) \text{ dB} \quad || \quad 10 \text{ dB}$$

$$\frac{L}{10 \text{ dB}} = \lg\left(\frac{I}{I_0}\right) \quad || \quad 10^{(\quad)}$$

(potenssiinkorotus ja logaritmi kumoaa toisensa, kun sama kanta)

$$10^{\left(\frac{L}{10 \text{ dB}}\right)} = \frac{I}{I_0}$$

$$I = I_0 \cdot 10^{\left(\frac{L}{10 \text{ dB}}\right)} = 1 \cdot 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 10^{\left(\frac{78 \text{ dB}}{10 \text{ dB}}\right)}$$

$$I \approx 6,3 \cdot 10^{-5} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$1\text{e-}12 * 10^{(78/10)} \\ = 6,30957344480193249434\text{e-}5$$

Intensiteetti pienenee, kun etäännytään äänen lähteestä.

Intensiteetti pienenee kääntäen verrannollisesti etäisyyden neliöön: $I \sim \frac{1}{r^2}$

$$\text{eli } I_1 \cdot r_1^2 = I_2 \cdot r_2^2$$

$$(\text{tai } \frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2})$$

Esim. Katuporan intensiteettitaso on metrin etäisyydellä 120 dB. Kuinka kaukana voi olla ilman kuulosuojaimia (eli äänen voimakkuus on 85 dB)?

$$L = 120 \text{ dB}$$

$$L = 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right) \text{ dB}$$

(ratkaistaan kaavasta I vaikka Geogebraalla)

$$I_1 = I_0 \cdot 10^{\left(\frac{L}{10 \text{ dB}}\right)} = 1 \cdot 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 10^{\left(\frac{120 \text{ dB}}{10 \text{ dB}}\right)}$$

$$= 1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$I_2 = I_0 \cdot 10^{\left(\frac{L}{10 \text{ dB}}\right)} = 1 \cdot 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 10^{\left(\frac{85 \text{ dB}}{10 \text{ dB}}\right)}$$

$$= 0,000316... \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$1\text{e-}12 * 10^{(120/10)}$$

$$= 1$$

$$1\text{e-}12 * 10^{(85/10)}$$

$$= 0,00031622776601683793$$

Intensiteetti on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön:

$$I_1 \cdot r_1^2 = I_2 \cdot r_2^2 \quad \parallel \quad r_1 = 1 \text{ m}$$

$$r_2^2 = \frac{I_1 \cdot r_1^2}{I_2}$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{I_1 \cdot r_1^2}{I_2}}$$

$$r_2 \approx 56 \text{ m}$$

$$\text{sqrt}(1 * 1^2 / 0,00031622776601683793)$$

$$= 56,23413251903490832401$$

8.2 Ääni ympäristössämme

8.2. Ääni ympäristössämme

- Akustiikka on tieteenala, jossa tutkitaan ääntä.
- Akustiikan huomioiminen on oleellinen osa rakennusten, tilojen ja koneiden suunnittelua.
- Kaikuluotaus ja ultraäänitutkimus perustuvat äänen heijastumiseen rajapinnoista.
- Melua voidaan vähentää pienentämällä melunlähteen tuottamaa ääntä tai käyttämällä melua absorboivia ja heijastavia materiaaleja.