

Määrittelyjoukot

Muista tutkia ihan aluksi määrittelyjoukot, kun törmäät seuraaviin funktioihin:

$$\frac{1}{x}, x \neq 0; \quad \log x, x > 0; \quad \sqrt{x}, x \geq 0 \text{ (parilliset juuret)};$$
$$\tan x, x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$$

Potenssisäännöt

Ole tarkkana kantaluvun kanssa

$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$
$$-3^2 = -3 \cdot 3 = -9$$
$$(-3)^2 = -3 \cdot (-3) = 9$$

Negatiivinen eksponentti

$$\frac{1}{3^2} = 3^{-2} \quad \text{yleisesti} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Juurifunktiot kannattaa yleensä muuttaa potenssimuotoon. Esim. derivoitaessa ja integroitaessa.

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \quad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Miinusmerkki

Miinusmerkin kanssa täytyy olla tarkkana

- käytä sulkuja (ylimääräiset sulut eivät haittaa, mutta niiden puute kyllä)

Esim.

$$\frac{2}{x} - \frac{x-3}{x} = \frac{2 - (x-3)}{x} = \frac{2-x+3}{x} = \frac{-x+5}{x}$$

Supistaminen

Tulo hyvä, summa huono eli näin,

$$\frac{x^2 + 2x}{x} = \frac{x(x+2)}{x} = x+2$$

(yhteisen tekijän avulla tulomuoto ja siitä supistus)
ei näin

$$\frac{x^2 + 2x}{x} = x^2 + 2$$

Prosenttilaskut

- Taulukoi tiedot
- Valitse jokin tiedoista X:ksi ja yritä esittää muut tiedot sen avulla.

Esim.

Rakennuksen kokonaisbudjetti on X

Materiaalikulut 70% = $0,7X$

Työkustannukset 30% = $0,3X$

- Monesti täytyy taulukoida sekä alkuperäinen tilanne ja muutoksen jälkeinen tilanne.

Esim. Materiaalikustannukset nousivat 6% jolloin uusi materiaalikustannus

$1,06 \cdot 0,7X$

	Alkuperäinen	Uusi (tilanne)
Materiaalikustannus	$0,7x$	$1,06 \cdot 0,7x$
Työkustannus	$0,3x$	

Binomikaavat

Binomikaavoja voi käyttää molempiin suuntiin (oikealta vasemmalle ja vasemmalta oikealle)

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad (\text{voidaan käyttää mm. neliöksi täydentämisessä ympyrän yhtälön ja käänteisfunktion yhteydessä})$$

$$\text{Esim. } x^2 + 2x = x^2 + 2x + 1 - 1 = (x + 1)^2 - 1$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \quad (\text{toimii erityisen hyvin neliöjuuren kanssa})$$

Esim.

$$\frac{2}{\sqrt{3} - 1} \quad | \text{ lavennus } \sqrt{3} + 1$$

$$= \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{3 - 1} = \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{2} = \sqrt{3} + 1$$

Yhtälönratkaiseminen

Muista neliönkorotuslause (maa2). Sitä saa käyttää aina, mutta lopputulos kannattaa tarkistaa sijoittamalla alkuperäiseen yhtälöön, sillä menetelmä voi antaa sellaisia ratkaisuja, jotka eivät kelpaakaan vastauksiksi. Menetelmä on erittäin toimiva neliöjuuri- ja itseisarvoyhtälöiden ratkaisussa.

Esim.

$$\sqrt{x + 1} = |2x - 1| \quad |(\)^2$$
$$x + 1 = (2x - 1)^2 \text{ jne.}$$

Vektorit

- Hahmottele kuvaaja
- Yksikäsitteisyyslause (erittäin tärkeä)
Esim. Onko pisteet $A=(2,2,2)$, $B=(10,12,18)$ ja $C=(120,110,118)$ samalla suoralla?

Jos ovat niin $\overline{AB} = r\overline{AC}$, missä $r \in \mathbb{R}$.

$$\text{Nyt } \overline{AB} = (10 - 2)\bar{i} + (12 - 2)\bar{j} + (18 - 2)\bar{k} = 8\bar{i} + 10\bar{j} + 16\bar{k}$$

$$\text{ja } \overline{AC} = (120 - 2)\bar{i} + (110 - 2)\bar{j} + (118 - 2)\bar{k} = 118\bar{i} + 108\bar{j} + 116\bar{k}$$

Siis

$$8\bar{i} + 10\bar{j} + 16\bar{k} = r(118\bar{i} + 108\bar{j} + 116\bar{k})$$

$$8\bar{i} + 10\bar{j} + 16\bar{k} = 118r\bar{i} + 108r\bar{j} + 116r\bar{k}$$

Koska vektorit $\bar{i}, \bar{j}$ ja $\bar{k}$ ovat kantavektoreita, käytetään kantavektoreiden yksikäsitteisyyslausetta (saadaan yhtälöryhmä)

$$\begin{cases} 8 = 118r \Rightarrow r = \frac{8}{118} = \frac{4}{59} \\ 10 = 108r \Rightarrow r = \frac{10}{108} = \frac{5}{54} \neq \frac{4}{59} \\ 16 = 116r \end{cases}$$

Koska saatiin eri r :n arvot, voidaan päätellä, että pisteet eivät ole samalla suoralla.

- Yksikkövektorin saat kun jaat vektorin omalla pituudellaan
- Tärppinä vielä suoran yhtälö vektoreiden avulla ja tason yhtälö (vaikeita)

Raja-arvo

Raja-arvoa pääsee harvoin ottamaan suoraan (nimittäjä menee nolllaksi) vaan lause on ensin supistettava. Keinot:

- Yhteinen tekijä (huom. voidaan ottaa useamman kerran)
- Binomikaavat
- Tekijöihin jako nollakohtien avulla, siis (x - nollakohta)

Esim. (Tässä suora sijoitus $x=-1$ antaa nimittäjäksi kielletyn tilanteen jako nolllalla)

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)^2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} x + 1 = -1 + 1 = 0$$

Derivaatta

Derivaatta ilmaisee funktion $f(x)$ **tangentin kulmakertoimen** kohdassa x_0 .

$$\text{Siis } f'(x_0) = k$$

Näin ollen suoran yhtälö $y - y_0 = k(x - x_0)$

voidaan muuttaa muotoon

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Muista lisäksi kulmakertoimen ja suuntakulman välinen yhteys $k = \tan \alpha$

Derivaatafunktion avulla tutkitaan mm.

- Funktion suurin / pienin arvo
- Funktion paikalliset maksimit/minimit
- Funktion kasvamista / vähenemistä (derivaatta positiivinen / negatiivinen)
- Funktion hetkellistä kasvunopeutta. Esim. $f'(2)$ antaa funktion f hetkellisen kasvunopeuden kohdassa $x=2$
- Kuinka monta nollakohtaa funktiolla on
- Onko funktiolla käänteisfunktio (funktion oltava aidosti kasvava / vähenevä)

Käytännön toteutus:

- Muodosta funktio f , jossa vain yksi muuttuja (jos sanallinen tehtävä)
- Derivoi funktio
- Laske derivaatan nollakohdat eli milloin $f'(x)=0$
- Laske testipisteet derivaatan nollakohtien molemmin puolin
- Tee kulkukaavio

$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	↗	↘	↗

- Loppuanalyysi

Trigonometriset yhtälöt

Muuta yhtälö ns. perusmuotoon käyttämällä yhtälönratkaisukeinoja tai taulukkokirjasta löytyviä muuntokaavoja. Perusmuotoja on kahta eri tyyppiä:

1^o $T(x) = a$
(, missä a on luku ja T sin, cos tai tan)

Esim.

$$2\sin x = 1 \quad |:2$$
$$\sin x = \frac{1}{2} \quad | \text{ taulukkokirja s.58}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$

Huom! Muista sin ja cos tapauksessa kaksi eri vaihtoehtoa

Huom! Muista jakso sin ja cos 2π ja tan π

2^o $T(x)=T(y)$

Esim.

$$\sin 2x - \sin 120^\circ = 0 \quad | \text{ perusmuotoon}$$
$$\sin 2x = \sin 120^\circ$$

$$2x = 120^\circ + n \cdot 360^\circ \vee 2x = 180^\circ - 120^\circ + n \cdot 360^\circ$$
$$x = 60^\circ + n \cdot 180^\circ \vee x = 30^\circ + n \cdot 180^\circ$$

Muista (tunnista) ainakin seuraavat kaavat:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

Huom! Kaavoja voidaan käyttää molempiin suuntiin.

Integraalilaskenta

Yleinen integraali

Esim.

$$\int 2x^2 + 5x - 6 \, dx = 2 \cdot \frac{1}{3}x^3 + 5 \cdot \frac{1}{2}x^2 - 6x + C = \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 6x + C = F(x)$$

Muistathan yleisessä integraalissa integroimisvakio C:n (Constant)

Tehtävässä voi olla jokin ehto, jonka avulla integroimisvakio C:n arvo voidaan ratkaista.

Esim. Määritä edelliselle funktiolle $f(x) = 2x^2 + 5x - 6 \, dx$ se integraalifunktio, joka kulkee pisteen (1, 5) kautta.

Tässä $x=1$ ja $y=F(x)=5$, joten saadaan

$$\frac{2}{3} \cdot 1^3 + \frac{5}{2} \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + C = 5$$

,mistä

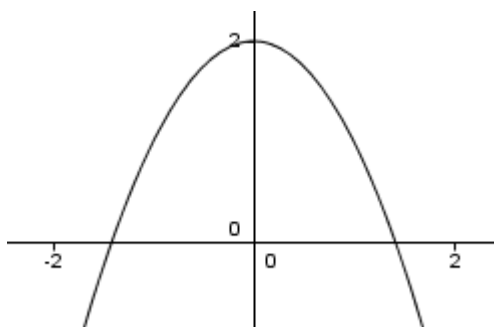
$$C = \frac{47}{6}.$$

Määrätty integraali

Määrätyn integraalin avulla voidaan laskea pinta-ala, joka jää funktion ja x/y -akselin väliin. Huom! Otettava huomioon onko funktio x-akselin ylä- vai alapuolella. Ks. Taulukkokirja s.50.

Esim1. Funktion $f(x) = -x^2 + 2$ ja x-akselin väliin jäävä ala saadaan seuraavasti

- piirrä kuva (tarkista ollaanko x-akselin ylä- vai alapuolella.)

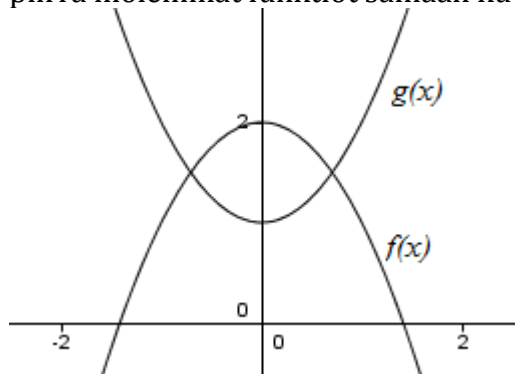


- ratkaise funktion $f(x)$ nollakohdat (saat integroimisrajat)
- $-x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$
- integroi

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} -x^2 + 2 \, x$$

Esim2. Kahden funktion väliin jäävä pinta-ala.

- piirrä molemmat funktiot samaan kuvaan.



Tässä $f(x) = -x^2 + 2$ ja $g(x) = x^2 + 1$

- laske funktioiden laikkauskohdat (x-arvot riittävät) yhtälöstä $f(x)=g(x)$ siis $-x^2 + 2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ saat integroimisrajat.
- varmista kuvasta tai laskemalla testipisteet kumpi funktioista on ylempänä
- integroi

$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \text{ylempi} - \text{alempi} \, dx = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^2 + 2 - (x^2 + 1) \, dx$$

Huom! Joskus voit joutua integroimaan osissa. Ks. taulukkokirja s.50 kuva 34.

Muut tärpit

Maa11

- jakoyhtälö
- kongruenssi
- eukleideen algoritmi

Maa12

- jakoalgoritmi
- Newtonin menetelmä tk. s.51
- numeerinen derivointi
- pinta-alan arviointi (puolisuunnikkasmenetelmä ja Simpsonin sääntö) tk. s.51

Maa13

- geometrinen sarja
- äärettömän käsitteleminen (yhteinen tekijä)