K1

a) $a-b$ $\qquad$ $a=-8$ ja $b=3$

$=-8-3$

$=-11$

b) $-(a+b)$

$=-(-8+3)$

$=-(-5)$

$=5$

c) $|ab|$

$=|-8\cdot 3|$

$=|-24|$

$=24$

Vastaus

a) $-8-3=-11$ **b)** $-(-8+3)=5$ **c)** $|-8\cdot 3|=24$

K2

a) $25:5-4\cdot 2$

$=5-4\cdot 2$

$=5-8$

$=-3$

b) $6-3\cdot(7-32:2)$

$=6-3\cdot(7-16)$

$=6-3\cdot(-9)$

$=6+27$

$=33$

Vastaus

a) –3 **b)** 33

K3

$^{3)}\ \dfrac{2}{3}=\dfrac{2\cdot 3}{3\cdot 3}=\ ^{5)}\ \dfrac{6}{9}=\dfrac{6\cdot 5}{9\cdot 5}=\dfrac{30}{45}$

Lavennetaan luvut samannimisiksi.

$^{5)}\ \dfrac{5}{9}=\dfrac{5\cdot 5}{9\cdot 5}=\dfrac{25}{45}$

Samannimisten murtolukujen suuruusjärjestys päätellään osoittajista.

$^{9)}\ \dfrac{3}{5}=\dfrac{3\cdot 9}{5\cdot 9}=\dfrac{27}{45}$

Asetetaan luvut suuruusjärjestykseen.

$$\frac{5}{9}<\frac{3}{5}<\frac{2}{3}$$

Vastaus

$$\frac{5}{9}<\frac{3}{5}<\frac{2}{3}$$

K4

a)

Ilmaistaan sekaluvut murtolukuina:

$$5\frac{1}{2}=\frac{5\cdot 2+1}{2}=\frac{11}{2}\ \text{ ja}$$

$$2\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 3+2}{3}=\frac{8}{3}\ .$$

$$5\frac{1}{2}-2\frac{2}{3}$$

$$=\frac{11}{2}-\frac{8}{3}$$

Lavennetaan luvut samannimisiksi.

$$= {}^{3)}\frac{11}{2}-{}^{2)}\frac{8}{3}$$

$$=\frac{33}{6}-\frac{16}{6}$$

$$=\frac{33-16}{6}$$

$$=\frac{17}{6}$$

Vastauksen voi antaa myös sekalukuna:

$$\frac{17}{6}=\frac{12+5}{6}=2\frac{5}{6}\ .$$

b)

Lasketaan ensin kertolasku.

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}-\frac{3}{5}+\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1\cdot \cancel{4}^{\,2}}{\cancel{2}_{\,1}\cdot 5}-\frac{3}{5}+\frac{1}{3}$$

Lasketaan yhteen- ja vähennyslaskut vasemmalta oikealle.

$$=\frac{2}{5}-\frac{3}{5}+\frac{1}{3}$$

$$=\frac{2-3}{5}+\frac{1}{3}$$

Lavennetaan luvut samannimisiksi.

$$=-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}$$

$$=-{}^{3)}\frac{1}{5}+{}^{5)}\frac{1}{3}$$

$$=-\frac{3}{15}+\frac{5}{15}$$

$$=\frac{2}{15}$$

c) $\frac{5}{9}:\left(-\frac{2}{3}\right)$

Päätellään ensin osamäärän merkki.

$=-\frac{5}{9}:\frac{2}{3}$

Jaettava $\frac{5}{9}$ kerrotaan jakajan $\frac{2}{3}$ käänteisluvulla $\frac{3}{2}$.

$=-\frac{5}{9}\cdot\frac{3}{2}$

$=-\frac{5\cdot\cancel{3}^{1}}{\cancel{9}_{3}\cdot 2}$

$=-\frac{5}{6}$

Vastaus

a) $\frac{17}{6}$ **b)** $\frac{2}{15}$ **c)** $-\frac{5}{6}$

K5

Kyselyyn vastanneita on yhteensä 140 henkilöä.

Vastaajista kaksi viidesosaa ilmoittaa suosikkirodukseen norjalaisen metsäkissan. Näitä vastaajia on yhteensä

$\frac{2}{5} \cdot 140 = 56$ henkilöä. Kertolasku voidaan laskea laskimella.

Vastaajista yksi neljäsosa ilmoittaa suosikkirodukseen siperian kissan. Näitä vastaajia on yhteensä

$\frac{1}{4} \cdot 140 = 35$ henkilöä.

Loput vastaajista ilmoittaa suosikkirodukseen siamilaisen. Näitä vastaajia on yhteensä $140 - 56 - 35 = 49$.

Vastaus

49 vastaajaa

K6

a) $2\frac{3}{4}-\frac{8}{9}:\frac{2}{3}$

$=\frac{17}{12}$

Laskutoimitus voidaan näppäillä CAS-laskimeen esimerkiksi seuraavasti:

$\left(2+\frac{3}{4}\right)-\frac{8}{9}/\left(\frac{2}{3}\right)$

b) Luvun -2 vastaluku on 2.

Luvun 6 käänteisluku on $\frac{1}{6}$.

Näiden keskiarvo on

$\frac{2+\frac{1}{6}}{2}$

$=\frac{13}{12}$

Laskutoimitus voidaan näppäillä CAS-laskimeen esimerkiksi seuraavasti:

$\left(2+\frac{1}{6}\right)/2$

c) Luvun $\frac{3}{5}$ käänteisluku on $\frac{5}{3}$.

Luvun $1\frac{5}{6}=\frac{11}{6}$ käänteisluku on $\frac{6}{11}$

Käänteislukujen osamäärä on

$\frac{5}{3}:\frac{6}{11}$

$=\frac{55}{18}$

Laskutoimitus voidaan näppäillä CAS-laskimeen esimerkiksi seuraavasti:

$\frac{5}{3}/\left(\frac{6}{11}\right)$

Vastaus

a) $\frac{17}{12}$ **b)** $\frac{13}{12}$ **c)** $\frac{55}{18}$

K7

a) $3x = 30 - 2x \quad \vert +2x$

$5x = 30 \quad \vert : 5$

$x = 6$

b) $3(x+2) - (5x+1) = 9$ Kerrotaan sulkeet auki.

$3x + 6 - 5x - 1 = 9$

$-2x + 5 = 9 \quad \vert -5$

$-2x = 4 \quad \vert : (-2)$

$x = -2$

Vastaus

a) $x = 6$ **b)** $x = -2$

K8

$$2x-\frac{3x}{4}=\frac{1}{8} \qquad \Big| \cdot 8$$

Poistetaan nimittäjät.

$$8\cdot 2x-\overset{2}{\cancel{8}}\cdot\frac{3x}{\underset{1}{\cancel{4}}}=\overset{1}{\cancel{8}}\cdot\frac{1}{\underset{1}{\cancel{8}}}$$

$$16x-6x=1$$

$$10x=1 \qquad \Big| :10$$

$$x=\frac{1}{10}$$

Vastaus

$$x=\frac{1}{10}$$

K9

$$\frac{6x-1}{5}=\frac{x}{2}+\frac{7x}{10} \qquad \Big| \cdot 10$$

Poistetaan nimittäjät.

$$\overset{2}{\cancel{10}}\cdot\frac{6x-1}{\underset{1}{\cancel{5}}}=\overset{5}{\cancel{10}}\cdot\frac{x}{\underset{1}{\cancel{2}}}+\overset{1}{\cancel{10}}\cdot\frac{7x}{\underset{1}{\cancel{10}}}$$

$$2(6x-1)=5x+7x$$

$$12x-2=12x \qquad \Big| -12x$$

$$-2=0$$

epätosi

Vastaus

Mikään luku ei toteuta yhtälöä.

K10

Yhtälöparin voi ratkaista yhteenlaskumenetelmällä tai sijoitusmenetelmällä. Malliratkaisussa on a-kohta ratkaistu yhteenlaskumenetelmällä ja b-kohta sijoitusmenetelmällä.

a)

$$\begin{cases} 3x+4y=6 \\ 6x-2y=-18 \end{cases} \quad \Big| \cdot 2$$

Kerrotaan yhtälöt sellaisilla luvuilla, että muuttujan y kertoimiksi saadaan vastaluvut.

$$+\begin{cases} 3x+4y=6 \\ 12x-4y=-36 \end{cases}$$

Lasketaan yhtälöiden samanmuotoiset termit yhteen.

$$\begin{aligned} 15x &= -30 \quad |:15 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $x=-2$ alkuperäisen yhtälöparin ensimmäiseen yhtälöön.

Sijoitetaan $x=-2$.

$$\begin{aligned} 3x+4y &= 6 \\ 3\cdot(-2)+4y &= 6 \\ -6+4y &= 6 \quad |+6 \\ 4y &= 12 \quad |:4 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Yhtälöparin ratkaisu on $x=-2$ ja $y=3$.

b) $\begin{cases} 2x+3y=16 \\ -3x+\ \ y=-13 \end{cases}$ $\quad \Big| +3x$

Ratkaistaan alemmasta yhtälöstä muuttuja y.

$\begin{cases} 2x+3y=16 \\ \qquad\ \ y=3x-13 \end{cases}$

Sijoitetaan $y = 3x - 13$ ylempään yhtälöön muuttujan y paikalle.

$$2x+3(3x-13)=16$$
$$2x+9x-39=16$$
$$11x-39=16 \quad \Big| +39$$
$$11x=55 \quad \Big| :11$$
$$x=5$$

Ratkaistaan muuttujan y arvo sijoittamalla saatu ratkaisu $x = 5$ yhtälöön $y=3x-13.$

$$y=3x-13$$
$$=3\cdot 5-13=2$$

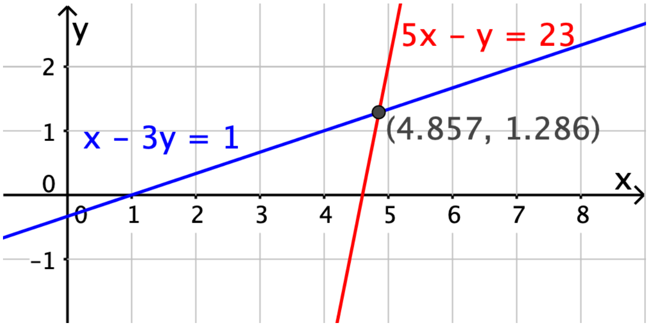
Sijoitetaan $x=5.$

Vastaus

a) $x = -2$ ja $y = 3$ **b)** $x = 5$ ja $y = 2$

K11

a) Piirretään yhtälöiden $x-3y=1$ ja $5x-y=23$ kuvaajat geometriaohjelmalla ja määritetään kuvaajien leikkauspiste.



Yhtälöparin ratkaisu on $x \approx 4{,}9$ ja $y \approx 1{,}3$.

b) Ratkaistaan yhtälöpari CAS-laskimella.

$$\begin{cases} x-3y=1 \\ 5x-y=23 \end{cases}$$

$$x=\frac{34}{7} \text{ ja } y=\frac{9}{7}$$

Yhtälöparin ratkaiseminen CAS-laskimella on neuvottu luvussa 4.

Vastaus

a) $x \approx 4{,}9$ ja $y \approx 1{,}3$ **b)** $x=\frac{34}{7}$ ja $y=\frac{9}{7}$

K12

Muodostetaan yhtälö merkitsemällä lausekkeet yhtä suuriksi. Ratkaistaan x.

$$900+30x=1100+25x$$ Ratkaistaan yhtälö CAS-laskimella.

$$x=40 \text{ (sopimusta)}$$

Virtanen ja Lahtinen möivät molemmat 40 vakuutussopimusta.

Vastaus

40

K13

Merkitään Earl Grey -laadun massaa kilogrammoina kirjaimella x.

Earl Grey -laadun hinta on tällöin $x \cdot 90$ € = $90x$ €.

Merkitään Lapsang Souchong -laadun massaa kilogrammoina kirjaimella y.

Lapsang Souchong -laadun hinta on tällöin $y \cdot 70$ € = $70y$ €.

Pakkauksen massa on oltava 500 g = 0,5 kg: $x + y = 0{,}5$.

Pakkauksen hinnan on oltava 38 €: $90x + 70y = 38$.

Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} x + \quad y = 0{,}5 \\ 90x + 70y = 38 \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöpari CAS-laskimella.

$x = 0{,}15$ ja $y = 0{,}35$

Earl Grey -laadun massa $x = 0{,}15$ kg = 150 g ja
Lapsang Souchong -laadun massa $y = 0{,}35$ kg = 350 g.

Vastaus

150 g Earl Grey -laatua ja 350 g Lapsang Souchong -laatua.

K14

a) $2^3 + 3^2$

$= 8 + 9$

$= 17$

b) $(-3)^2 + 3^2$

$= 9 + 9$

$= 18$

c) $(-1)^2 - 1^2 + (-1)^3 - 1^3$

$= 1 - 1 - 1 - 1$

$= -2$

Vastaus
a) 17
b) 18
c) –2

K15

a) $3+4^2$
$=3+16$
$=19$

b) $(3+4)^2$
$=7^2$
$=49$

c) $3\cdot 4^2$
$=3\cdot 16$
$=48$

d) $(3\cdot 4)^2$
$=12^2$
$=144$

Vastaus
a) 19
b) 49
c) 48
d) 144

K16

a) $\left(\frac{5}{7}\right)^0 + 0^5 - 0^7$

$= 1 + 0 - 0$

$= 1$

b)

$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$

$= \frac{2^2}{3^2} + \left(\frac{4}{3}\right)^2$

$= \frac{4}{9} + \frac{4^2}{3^2}$

$= \frac{4}{9} + \frac{16}{9}$

$= \frac{4+16}{9}$

$= \frac{20}{9}$

c) $5^0 - \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} + 5^2 + 4 \cdot 1^5$

$= 1 - \left(\frac{5}{1}\right)^1 + 25 + 4 \cdot 1$

$= 1 - 5 + 25 + 4$

$= 25$

Vastaus

a) 1 **b)** $\frac{20}{9}$ **c)** 25

K17

a) $2,35 \cdot 10^{7} = 23\ 500\ 000$

b) $1,587 \cdot 10^{-6} = 0,000\ 001\ 587$

c) $3,524 \cdot 10^{3} = 3524$

Vastaus
a) 23 500 000
b) 0,000 001 587
c) 3524

K18

a) $493\ 000\ 000\ 000 = 4{,}93 \cdot 10^{11}$

b) $0{,}000\ 000\ 000\ 000\ 94 = 9{,}4 \cdot 10^{-13}$

c) $-0{,}004\ 05 = -4{,}05 \cdot 10^{-3}$

Vastaus
a) $4{,}93 \cdot 10^{11}$
b) $9{,}4 \cdot 10^{-13}$
c) $-4{,}05 \cdot 10^{-3}$

K19

a) $\sqrt{49}=7$, koska $7>0$ ja $7^2=49$.

b) $\sqrt{8^2}=8$, koska $8>0$ ja $8^2=8^2$.

c) $\left(\sqrt[3]{13}\right)^3=13$ kuutiojuuren määritelmän perusteella.

d) $\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{9}=3$, koska $3>0$ ja $3^2=9=(-3)^2$.

Vastaus
a) 7
b) 8
c) 13
d) 3

K20

a) $\sqrt{2\cdot 8}+\sqrt{4+5}$

$=\sqrt{16}+\sqrt{9}$

$=4+3$

$=7$

b) $\sqrt[3]{2\cdot 4}+\sqrt[3]{-1}$

$=\sqrt[3]{8}-1$

$=2-1$

$=1$

c) $\sqrt{9+16}-(\sqrt{9}+\sqrt{16})$

$=\sqrt{25}-(3+4)$

$=5-3-4$

$=-2$

d) $\dfrac{10}{\sqrt{25}}+\sqrt[3]{19+8}$

$=\dfrac{10}{5}+\sqrt[3]{27}$

$=2+3$

$=5$

Vastaus
a) 7
b) 1
c) –2
d) 5

K21

a) $x^2 - 36 = 0$

$x^2 = 36$

$x = \sqrt{36} = 6$ tai $x = -\sqrt{36} = -6$

b) $\frac{x^3}{4} = 2 \quad \Big| \cdot 4$

$x^3 = 8$

$x = \sqrt[3]{8} = 2$

c) $3x(x+2) = 6x + 27$

$3x^2 + 6x = 6x + 27 \quad \Big| -6x$

$3x^2 = 27 \quad \Big| :3$

$x^2 = 9$

$x = \sqrt{9} = 3$ tai $x = -\sqrt{9} = -3$

d) $2x^3 + 54 = 0 \quad \Big| -54$

$2x^3 = -54 \quad \Big| :2$

$x^3 = -27$

$x = \sqrt[3]{-27} = -3$

Vastaus
a) $x = -6$ tai $x = 6$
b) $x = 2$
c) $x = -3$ tai $x = 3$
d) $x = -3$

K22

a) $x^2 \cdot 2x^2 \cdot 5x^2$

$= 2 \cdot 5 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot x^2$

$= 10 \cdot x^{2+2+2}$

$= 10x^6$

b) $\dfrac{x^5 \cdot x^4}{x^3 \cdot x^2}$

$= \dfrac{x^{5+4}}{x^{3+2}}$

$= \dfrac{x^9}{x^5}$

$= x^{9-5} = x^4$

c) $4 \cdot (x^2)^5$

$= 4 \cdot x^{2 \cdot 5}$

$= 4x^{10}$

Vastaus

a) $10x^6$

b) x^4

c) $4x^{10}$

K23

a) $(2x^4)^3$

$= 2^3 \cdot x^{4\cdot 3}$

$= 8x^{12}$

b)

$$\left(\frac{2x^3}{4x^2}\right)^2$$

$$= \frac{2^2 \cdot (x^3)^2}{4^2(x^2)^2}$$

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{4}} \cdot x^{3\cdot 2}}{\underset{4}{\cancel{16}} \cdot x^{2\cdot 2}}$$

$$= \frac{x^6}{4 \cdot x^4}$$

$$= \frac{x^{6-4}}{4}$$

$$= \frac{x^2}{4}$$

$$= \frac{1}{4}x^2$$

c)

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)^{-2}$$

$$=\left(\frac{3}{x^3}\right)^{2}$$

$$=\frac{3^2}{(x^3)^2}$$

$$=\frac{9}{x^{3\cdot 2}}$$

$$=\frac{9}{x^6}$$

Vastaus

a) $8x^{12}$

b) $\frac{x^2}{4}\quad\left(=\frac{1}{4}x^2\right)$

c) $\frac{9}{x^6}$

K24

a) $2^2 \cdot 2^3 - \dfrac{2^5}{2^4}$

$= 4 \cdot 8 - 2^{5-4}$

$= 32 - 2^1$

$= 32 - 2$

$= 30$

b) $(3^2)^4 - (3^4)^2$

$= 3^{2 \cdot 4} - 3^{4 \cdot 2}$

$= 3^8 - 3^8$

$= 0$

c)

$5 : 2^3 - 10 \cdot 2^{-4}$

$= \dfrac{5}{2^3} - 10 \cdot \dfrac{1}{2^4}$

$= \dfrac{5}{2^3} - \dfrac{10}{2^4}$

$= \dfrac{5}{2^3} - \dfrac{5 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot 2^3}$

$= \dfrac{5}{2^3} - \dfrac{5}{2^3}$

$= 0$

d) $2^3 \cdot 10 - 9 \cdot 3^2$

$= 8 \cdot 10 - 9 \cdot 9$

$= 80 - 81$

$= -1$

Vastaus

a) 31 **b)** 0

c) 0 **d)** –1

K25

Merkitään kuution sivusärmän pituutta kirjaimella x.
Kuution tilavuus on tällöin x^3 ja kokonaispinta-ala $6x^2$.

a) Kuution kokonaispinta-ala on $54\ \text{cm}^2$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$6x^2 = 54$$
$$x = -3 \text{ tai } x = 3$$

Sivusärmän pituus on positiivinen luku, joten $x = 3$ cm.

Kuution tilavuus on

$$x^3 = 3^3 = 27\ (\text{cm}^3)$$

b) Kuution tilavuus on $64\ \text{cm}^3$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$x^3 = 64$$
$$x = 4$$

Sivusärmän pituus $x = 4$ cm.

Kuution kokonaispinta-ala on

$$6x^2 = 6 \cdot 4^2 = 96\ (\text{cm}^2)$$

Vastaus
a) $27\ \text{cm}^3$
b) $96\ \text{cm}^2$

K26

Merkitään alkuperäisen kuution sivusärmän pituutta kirjaimella a.

Kuution sivusärmän pituus kaksinkertaistuu, uusi särmän pituus on $2a$.

a) Kuution kokonaispinta-ala on alussa $6a^2$ ja lopussa

$$6 \cdot (2a)^2 = 6 \cdot 2^2 \cdot a^2 = 24a^2 .$$

Lasketaan lopullisen pinta-alan suhde alkuperäiseen pinta-alaan.

$$\frac{24a^2}{6a^2} = 4$$

Kuution pinta-ala tulee 4-kertaiseksi.

b) Kuution tilavuus on alussa a^3 ja lopussa $(2a)^3 = 2^3 \cdot a^3 = 8a^3$.

Lasketaan lopullisen tilavuuden suhde alkuperäiseen tilavuuteen.

$$\frac{8a^3}{a^3} = 8$$

Kuution tilavuus tulee 8-kertaiseksi.

Vastaus
a) 4-kertaiseksi
b) 8-kertaiseksi

K27

a) Lukujen 2 ja 8 geometrinen keskiarvo on

$$\sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4 .$$

b) Lukujen 4, 6 ja 9 geometrinen keskiarvo on

$$\sqrt[3]{4 \cdot 6 \cdot 9} = \sqrt[3]{216} = 6 .$$

c) Neliön sivun pituus a saadaan laskemalla lukujen 2 m ja 8 m geometrinen keskiarvo.

$$\sqrt{2 \text{ m} \cdot 8 \text{ m}} = \sqrt{16 \text{ m}^2} = 4 \text{ m} .$$

Ratkaisu toisin: Neliön sivun pituus saadaan ratkaisemalla yhtälö.

$$a^2 = 2 \text{ m} \cdot 8 \text{ m}$$
$$a^2 = 16 \text{ m}^2$$
$$a = 4 \text{ m}$$

d) Kuution sivun pituus a saadaan laskemalla lukujen 4 dm, 6 dm ja 8 dm geometrinen keskiarvo.

$$\sqrt[3]{4 \text{ dm} \cdot 6 \text{ dm} \cdot 9 \text{ dm}} = \sqrt[3]{216 \text{ dm}^3} = 6 \text{ dm} .$$

Ratkaisu toisin: Kuution sivun pituus saadaan ratkaisemalla yhtälö.

$$a^3 = 4 \text{ m} \cdot 6 \text{ m} \cdot 9 \text{ m}$$
$$a^3 = 216 \text{ m}^3$$
$$a = 6 \text{ m}$$

Vastaus
a) 4 **b)** 6 **c)** 4 m **d)** 6 dm

K28

Neliöjuuren määritelmän mukaan $\sqrt{a} = b$, kun **1)** $b \geq 0$ ja **2)** $b^2 = a$.

a) Väite: $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

On osoitettava, että **1)** $3\sqrt{2} \geq 0$ ja **2)** $\left(3\sqrt{2}\right)^2 = 18$.

1) Luku $3\sqrt{2}$ on kahden positiivisen luvun tulona positiivinen, joten $3\sqrt{2} \geq 0$.

2) $\left(3\sqrt{2}\right)^2 = 3^2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 = 9 \cdot 2 = 18$

Väite on siis tosi. □

b) Väite: $\sqrt{\dfrac{2}{5}} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$

On osoitettava, että **1)** $\dfrac{\sqrt{10}}{5} \geq 0$ ja **2)** $\left(\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)^2 = \dfrac{2}{5}$.

1) Luku $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ on kahden positiivisen luvun osamääränä positiivinen, joten $\dfrac{\sqrt{10}}{5} \geq 0$.

2) $\left(\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)^2 = \dfrac{\left(\sqrt{10}\right)^2}{5^2} = \dfrac{\overset{2}{\cancel{10}}}{\underset{5}{\cancel{25}}} = \dfrac{2}{5}$

Väite on siis tosi. □

K29

a) Lasketaan muuttujan arvoa $x = 3$ vastaava funktion arvo.

$$\begin{aligned} f(3) &= 13 - 2 \cdot 3 \\ &= 13 - 6 \\ &= 7 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $x = 3$ funktioon $f(x) = 13 - 2x$.

b) Lasketaan muuttujan arvoa $x = -4$ vastaava funktion arvo.

$$\begin{aligned} f(-4) &= 13 - 2 \cdot (-4) \\ &= 13 + 8 \\ &= 21 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $x = -4$ funktioon $f(x) = 13 - 2x$.

c) Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan, millä muuttujan x arvoilla funktion arvo $f(x)$ on 8.

$$\begin{aligned} f(x) &= 8 && \\ 13 - 2x &= 8 && \mid -13 \\ -2x &= -5 && \mid : (-2) \\ x &= \frac{5}{2} && \end{aligned}$$

Sijoitetaan $f(x) = 13 - 2x$

Ratkaistaan muuttuja x.

Vastaus

a) $f(3) = 7$ **b)** $f(-4) = 21$ **c)** $x = \frac{5}{2}$

K30

a) Lasketaan muuttujan arvoa $x = 0$ vastaava funktion arvo.

$$f(0) = 0^2 - 25$$
$$= -25$$

Sijoitetaan $x = 0$ funktioon $f(x) = x^2 - 25$.

b) Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan, millä muuttujan x arvoilla funktion arvo $f(x)$ on 0.

$$f(x) = 0$$

Sijoitetaan $f(x) = x^2 - 25$.

$$x^2 - 25 = 0 \quad |+25$$
$$x^2 = 25$$
$$x = \sqrt{25} = 5 \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{25} = -5$$

Yhtälön ratkaisu on luvun 25 neliöjuuri ja sen vastaluku.

Vastaus

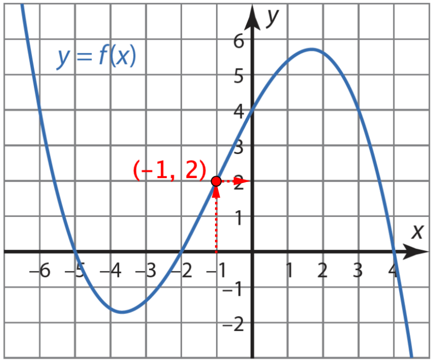
a) $f(0) = -25$ **b)** $x = -5$ ja $x = 5$

K31

a) Etsitään se kuvaajan piste, jonka x-koordinaatti on -1.

Kohdassa $x=-1$ kuvaajalla on piste, jossa $y \approx 2$.

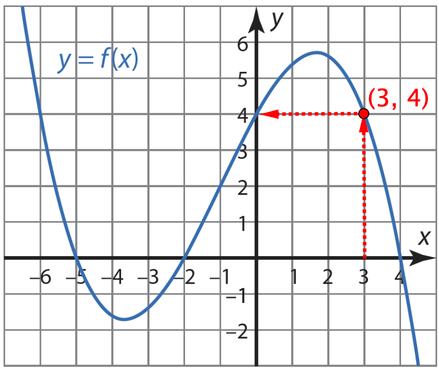
Siis $f(-1) \approx 2$.



b) Etsitään se kuvaajan piste, jonka x-koordinaatti on 3.

Kohdassa $x=3$ kuvaajalla on piste, jossa $y \approx 4$.

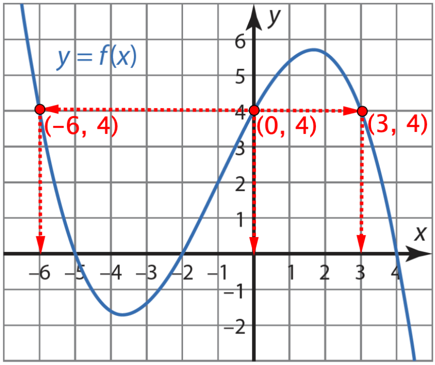
Siis $f(3) \approx 4$.



c) Etsitään ne kuvaajan pisteet, joiden y-koordinaatti on 4.

Pisteitä löytyy kolme kappaletta, ja niissä $x \approx -6$, $x \approx 0$ ja $x \approx 3$.

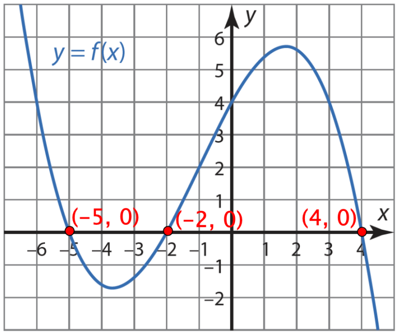
Siis $f(x) = 4$,
kun $x \approx -6$, $x \approx 0$ tai $x \approx 3$.



d) Funktion f arvo on nolla niissä kohdissa, joissa funktion kuvaaja leikkaa x-akselin.

Funktion f nollakohdat ovat

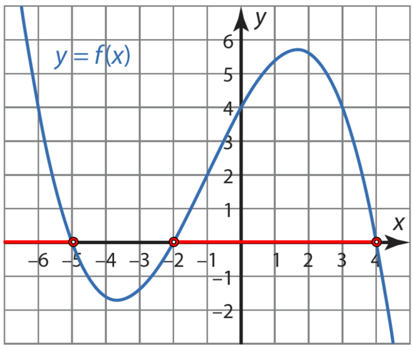
$x \approx -5$, $x \approx -2$ ja $x \approx 4$.



e) Funktion f arvo on positiivinen niissä kohdissa, joissa funktion kuvaaja on x-akselin yläpuolella.

Funktion f arvo on positiivinen, kun

$x < -5$ tai $-2 < x < 4$.



Vastaus

a) $f(-1) \approx 2$ **b)** $f(3) \approx 4$
c) $x \approx -6$, $x \approx 0$ ja $x \approx 3$ **d)** $x \approx -5$, $x \approx -2$ ja $x \approx 4$
e) $x < -5$ tai $-2 < x < 4$

K32

Lasketaan muuttujan arvoa $x = 4$ vastaavat funktioiden arvot.

$$\begin{aligned} f(4) &= 4^2 - 5 \\ &= 16 - 5 \\ &= 11 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $x = 4$ funktioon $f(x) = x^2 - 5$.

$$\begin{aligned} g(4) &= 3 \cdot 4 + 1 \\ &= 12 + 1 \\ &= 13 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $x = 4$ funktioon $g(x) = 3x + 1$.

$$\begin{aligned} h(4) &= f(4) + g(4) \\ &= 11 + 13 \\ &= 24 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $f(x) = 11$ ja $g(x) = 13$.

Vastaus

$f(4) = 11$, $g(4) = 13$ ja $h(4) = 24$

K33

a) Laskussa veloitetaan yhden kerran perusmaksu 400 €.

Kun työaikaa kuluu x tuntia, on työtunneista perittävä veloitus $x \cdot 68\ € = 68x\ €$.

Laskun suuruuden euroina ilmaisee funktio

$f(x) = 400 + 68x.$

Tallennetaan funktion lauseke CAS-laskimeen b- ja c-kohtien laskuja varten.

b) Muuttujan x arvo on 6,5 (h). Lasketaan funktion arvo $f(6{,}5)$.

$f(6{,}5) = 842\ \ (€)$

Lasketaan funktion arvo laskimella.

Laskun suuruus oli 842 euroa.

c) Funktion f arvo on 1012 (€). Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muuttujan x arvo.

$$f(x) = 1012$$

Ratkaistaan yhtälö CAS-laskimella.

$$x = 9\ \ (\text{h})$$

Töihin kului aikaa 9 tuntia.

Vastaus

a) $f(x) = 400 + 68x$ **b)** 842 € **c)** 9 h

K34

Piirretään funktion $f(x) = x^2$ kuvaaja.

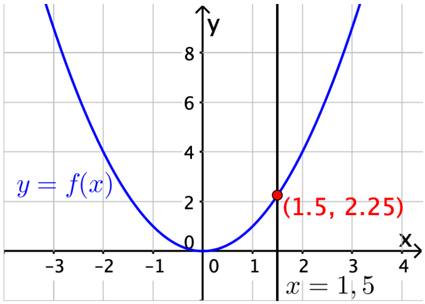
a) Etsitään se kuvaajan piste, jonka x-koordinaatti on 1,5.

Piirretään suora $x = 1{,}5$.

Määritetään funktion f kuvaajan ja suoran leikkauspiste.

Leikkauspisteen y-koordinaatti on 2,25

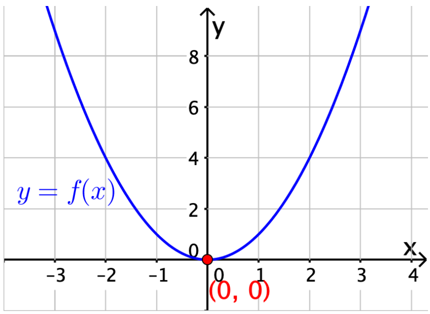
Siis $f(1{,}5) = 2{,}25$.



b) Funktion f arvo on nolla niissä kohdissa, joissa funktion kuvaaja leikkaa x-akselin.

Määritetään funktion f kuvaajan ja x-akselin leikkauspiste.

Funktion f nollakohta on $x = 0$.



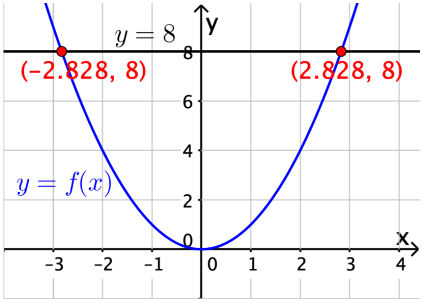
c) Etsitään kuvaajalta ne pisteet, joiden y-koordinaatti on 8.

Piirretään suora $y = 8$.

Määritetään funktion f kuvaajan ja suoran leikkauspisteet.

Leikkauspisteiden x-koordinaatit ovat likimain $-2{,}8$ ja $2{,}8$.

Siis $x^2 = 8$,
kun $x \approx -2{,}8$ tai $x \approx 2{,}8$.



Vastaus
a) $f(1{,}5) = 2{,}25$ **b)** $x = 0$ **c)** $x \approx -2{,}8$ tai $x \approx 2{,}8$

K35

Tutkitaan funktiota $h(t) = 1,7 + 14,7t - 4,9t^2$.

a) Pallon korkeus lyöntihetkellä on funktion h arvo ajanhetkellä $t = 0$.

$$h(0) = 1,7 + 14,7 \cdot 0 - 4,9 \cdot 0^2 = 1,7 \text{ (m)}$$

Pallo on lyöntihetkellä 1,7 m:n korkeudella.

b) Pallon korkeus yhden sekunnin kuluttua lyöntihetkestä on funktion h arvo ajanhetkellä $t = 1$.

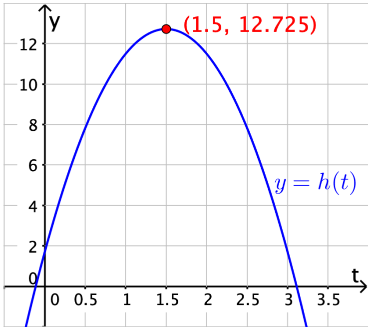
$$h(1) = 1,7 + 14,7 \cdot 1 - 4,9 \cdot 1^2 = 11,5 \text{ (m)}$$

Pallo on yhden sekunnin kuluttua lyöntihetkestä 11,5 m:n korkeudella.

c) Piirretään funktion h kuvaaja.

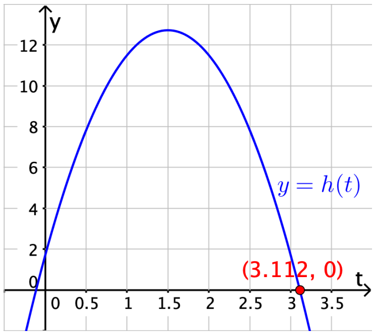
Määritetään funktion suurin arvo GeoGebran **Ääriarvot**-työkalulla (tai muun käytettävän ohjelman vastaavalla toiminnolla).

Kuvaajan perusteella funktion h suurin arvo on likimain 12,7 m.



Pallo osuu maahan, kun korkeusfunktion arvo on nolla. Määritetään funktion kuvaajan ja t-akselin se leikkauspiste, jossa t-koordinaatti on positiivinen.

Kuvaajan perusteella pallo on ilmassa likimain 3,1 s.



Huomaa, että piirrettäessä funktion h kuvaaja geometriaohjelmalla, käytetään muuttujana kirjainta x.

Vastaus
a) 1,7 m
b) 11,5 m
c) Pallo käy korkeimmillaan 12,7 m:n korkeudella ja pallo on ilmassa 3,1 s.

K36.

a) Lasketaan, kuinka monta prosenttia luku 51 on luvusta 84.

$$\frac{51}{84} = 0,60714... = 60,714...\,\% \approx 61\,\%$$

Opiskelijoista siirtyi lukioon 61 %.

b) Lasketaan, kuinka monta prosenttia luku 29 on luvusta 84.

$$\frac{29}{84} = 0,34523... = 34,523...\,\% \approx 35\,\%$$

Opiskelijoista siirtyi ammatillisiin oppilaitoksiin 35 %.

Vastaus
a) 61 %
b) 35 %

K37.

a) Muodostetaan prosenttikerroin.

14 % = 0,14

Lasketaan 14 % luvusta 200 g.

$$0{,}14 \cdot 200 = 28 \quad \text{(g)}$$

Sokeria on 28 g.

b) Lasketaan mehun paino.

200 g + 1 kg = 200 g + 1000 g = 1200 g

Mehussa on sokeria 28 g. Lasketaan, kuinka monta prosenttia luku 28 g on luvusta 1200 g.

$$\frac{28}{1200} = 0{,}02333... = 2{,}333...\,\% \approx 2{,}3\,\%$$

Mehun sokeripitoisuus on 2,3 %.

Vastaus
a) 28 g
b) 2,3 %

K38.

Merkitään alkuperäistä hintaa kirjaimella x.

30 % hinnasta x on 24 euroa.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$\begin{aligned} 0{,}30x &= 24 \quad \vert :0{,}30 \\ x &= 80 \quad (€) \end{aligned}$$

Voidaan ratkaista myös CAS-laskimella.

Alkuperäinen hinta oli 80 €.

Vastaus
80 €

K39.

a) **Tapa 1** Lasketaan, kuinka monta prosenttia vertailuarvo on perusarvosta.

Lasketaan, kuinka monta prosenttia uusi hinta 16,90 € on alkuperäisestä hinnasta 13,40 €.

$$\frac{16,90}{13,40} = 1,26119... = 126,119...\,\% \approx 126\,\%$$

Alkuperäinen hinta vastaa 100 %.
Hinta nousi 126 % – 100 % = 26 %.

Tapa 2 Lasketaan, kuinka monta prosenttia lukujen erotus on perusarvosta.

Lasketaan hinnan muutos.
16,90 – 13,40 = 3,50 (€)
Lasketaan, kuinka monta prosenttia hinnan korotus 3,50 € on alkuperäisestä hinnasta 13,40 €.

$$\frac{3,50}{13,40} = 0,26119... = 26,119...\,\% \approx 26\,\%$$

Hinta nousi 26 %.

b) Lasketaan alkuperäinen hinta.

21,30 + 4,90 = 26,20 (€)

Lasketaan, kuinka monta prosenttia hinnan alennus 4,90 € on alkuperäisestä hinnasta 26,20 €.

$$\frac{4,90}{26,20} = 0,18702... = 18,702...\,\% \approx 19\,\%$$

Hinta aleni 19 %.

Vastaus
a) 26 %
b) 19 %

K40.

Tapa 1 Lasketaan, kuinka monta prosenttia vertailuarvo on perusarvosta.

a) Lasketaan, kuinka monta prosenttia aika 221 min on ajasta 153 min.

$$\frac{221}{153}=1,44444...=144,444...\,\%\approx 144\,\%$$

Miesten kotitöihin käyttämä aika vastaa 100 %.
Naisten kotitöihin käyttämä aika oli 144 % – 100 % = 44 % suurempi.

b) Lasketaan, kuinka monta prosenttia aika 153 min on ajasta 221 min.

$$\frac{153}{221}=0,69230...=69,230...\,\%\approx 69\,\%$$

Naisten kotitöihin käyttämä aika vastaa 100 %.
Miesten kotitöihin käyttämä aika oli 100 % – 69 % = 31 % pienempi.

Tapa 2 Lasketaan, kuinka monta prosenttia lukujen erotus on perusarvosta.

a) Lasketaan aikojen erotus.

221 – 153 = 68 (min)

Lasketaan, kuinka monta prosenttia aikojen erotus 68 min on ajasta 153 min.

$$\frac{68}{153}=0,44444...=44,444...\,\%\approx 44\,\%$$

Naisten kotitöihin käyttämä aika oli 44 % suurempi.

b) Lasketaan, kuinka monta prosenttia aikojen erotus 68 min on ajasta 221 min.

$$\frac{68}{221}=0,30769...=30,769...\,\%\approx 31\,\%$$

Miesten kotitöihin käyttämä aika oli 31 % pienempi.

Vastaus
a) 44 % **b)** 31 %

K41.

Alkuperäinen arvo: 3200 €

a) Prosenttikerroin: 100 % + 6 % = 106 % = 1,06

Noussut arvo: $1,06 \cdot 3200 = 3392 \quad (€)$

b) Prosenttikerroin: 100 % – 13 % = 87 % = 0,87

Laskenut arvo: $0,87 \cdot 3200 = 2784 \quad (€)$

c) Prosenttikertoimet: 100 % – 3 % = 97 % = 0,97
100 % + 9 % = 109 % = 1,09

Lopullinen arvo: $1,09 \cdot 0,97 \cdot 3200 = 3383,36 \quad (€)$

Vastaus
a) 3392 €
b) 2784 €
c) 3383,36 €

K42.

a) Merkitään alkuperäistä vuokraa kirjaimella x.

Vuokraa korotettiin 6 %. Muodostetaan prosenttikerroin.

100 % + 6 % = 106 % = 1,06

Korotuksen jälkeen vuokra oli 741 €. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$\begin{aligned} 1{,}06x &= 741 \quad \vert :1{,}06 \\ x &= 699{,}056... \\ &\approx 699 \text{ (€)} \end{aligned}$$

Voidaan ratkaista myös CAS-laskimella.

Vuokra oli ennen 699 €.

b) Merkitään alkuperäistä vuokraa kirjaimella x.

Vuokraa alennettiin 4 %. Muodostetaan prosenttikerroin.

100 % – 4 % = 96 % = 0,96

Alennuksen jälkeen vuokra oli 1208 €. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$\begin{aligned} 0{,}96x &= 1208 \quad \vert :0{,}96 \\ x &= 1258{,}333... \\ &\approx 1258 \text{ (€)} \end{aligned}$$

Voidaan ratkaista myös CAS-laskimella.

Vuokra oli ennen 1208 €.

Vastaus
a) 699 €
b) 1208 €

K43.

a) Merkitään alkuperäistä vuosipalkkaa kirjaimella a.

	Vaihtoehto A	**Vaihtoehto B**
palkka 1. vuotena	$1{,}18a$	$1{,}06a$
palkka 2. vuotena	$1{,}18a$	$1{,}06 \cdot 1{,}06a$
palkka 3. vuotena	$1{,}18a$	$1{,}06 \cdot 1{,}06 \cdot 1{,}06a$

Vaihtoehdossa A lopullinen vuosipalkka on $1{,}18a$.
Vaihtoehdossa B lopullinen vuosipalkka on $1{,}06 \cdot 1{,}06 \cdot 1{,}06a = 1{,}191016a$.

Lopullinen palkka on suurempi vaihtoehdossa B.

Lasketaan, kuinka monta prosenttia luku $1{,}191016a$ on luvusta $1{,}18a$.

$$\frac{1{,}191016a}{1{,}18a} = 1{,}009335... = 100{,}9335...\ \% \approx 100{,}9\ \%$$

Vaihtoehdon A palkka vastaa $100\ \%$.
Vaihtoehdon B palkka on $100{,}9\ \% - 100\ \% = 0{,}9\ \%$ suurempi.

b) Vaihtoehdossa A kokonaispalkka on $3 \cdot 1{,}18a = 3{,}54a$.

Vaihtoehdossa B kokonaispalkka on

$1{,}06a + 1{,}06 \cdot 1{,}06a + 1{,}06 \cdot 1{,}06 \cdot 1{,}06a = 3{,}374616a$.

Kokonaispalkka on suurempi vaihtoehdossa A.

Lasketaan, kuinka monta prosenttia luku $3{,}54a$ on luvusta $3{,}374616a$.

$$\frac{3{,}54a}{3{,}374616a} = 1{,}049008... = 104{,}9008...\ \% \approx 104{,}9\ \%$$

Vaihtoehdon B palkka vastaa $100\ \%$.
Vaihtoehdon A palkka on $104{,}9\ \% - 100\ \% = 4{,}9\ \%$ suurempi.

Vastaus
a) vaihtoehdossa B; $0{,}9\ \%$ suurempi
b) vaihtoehdossa A; $4{,}9\ \%$ suurempi

K44.

a)

	Pakkauksen massa (kg)	**Pakkauksen hinta** (€)	**Tuotteen kilohinta** (€/kg)
Alkuperäinen	a	b	$\frac{b}{a}$
Muuttunut	$1,12a$	$1,08b$	$\frac{1,08b}{1,12a}$

Sievennetään muuttuneen kilohinnan lauseke.

$$\frac{1,08b}{1,12a} = 0,96428... \cdot \frac{b}{a} \approx 0,96 \cdot \frac{b}{a}$$

Kilohinta $0,96 \cdot \frac{b}{a}$ on 0,96-kertainen kilohintaan $\frac{b}{a}$ verrattuna.
Muuttunut kilohinta on siis 96 % alkuperäisestä kilohinnasta.

Kilohinta laskee 100 % – 96 % = 4 %.

b)

	Pakkauksen massa (kg)	**Pakkauksen hinta** (€)	**Tuotteen kilohinta** (€/kg)
Alkuperäinen	a	b	$\frac{b}{a}$
Muuttunut	$0{,}88a$	$0{,}92b$	$\frac{0{,}92b}{0{,}88a}$

Sievennetään muuttuneen kilohinnan lauseke.

$$\frac{0{,}92b}{0{,}88a} = 1{,}04545... \cdot \frac{b}{a} \approx 1{,}05 \cdot \frac{b}{a}$$

Kilohinta $1{,}05 \cdot \frac{b}{a}$ on 1,05-kertainen kilohintaan $\frac{b}{a}$ verrattuna.
Muuttunut kilohinta on siis 105 % alkuperäisestä kilohinnasta.

Kilohinta nousee 105 % – 100 % = 5 %.

Vastaus
a) laskee 4 %
b) nousee 5 %

K45.

Kun sieniä kuvataan, veden määrä pienenee, mutta kuiva-aineiden määrä säilyy ennallaan.

	Tuoreet sienet	**Kuivatut sienet**
Massa (kg)	a	b
Veden massa (kg)	0,90a	0,40b
Kuiva-aineiden massa (kg)	0,10a	0,60b

Kuiva-aineiden määrä pysyy samana. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan a.

$$\begin{aligned} 0{,}10a &= 0{,}60b \quad \Big| : 0{,}10 \\ a &= 6b \end{aligned}$$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia luku 0,04b on luvusta 0,90a.

$$\frac{0{,}40b}{0{,}90a} = \frac{0{,}40b}{0{,}90 \cdot 6b} = \frac{0{,}40b}{5{,}4b} = 0{,}07407... = 7{,}407...\,\% \approx 7\ \%$$

Veden massa tuoreissa sienissä vastaa 100 %.
Veden massa kuivatuissa sienissä on 100 % – 7 % = 93 % pienempi.

Vettä on haihdutettava 93 %.

Vastaus
93 %

L1

a) $|-17|+|8|-(-5)$

$=17+8+5$

$=25+5=30$

b)

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3}-\frac{5}{6}$$

$$=\frac{1\cdot \cancel{8}^{4}}{\cancel{2}_{1}\cdot 3}-\frac{5}{6}$$

$$={}^{2)}\frac{4}{3}-\frac{5}{6}$$

$$=\frac{8}{6}-\frac{5}{6}$$

$$=\frac{8-5}{6}$$

$$=\frac{3}{6}^{(2}$$

$$=\frac{1}{2}$$

c)

$$(1+\frac{2}{5}):(1-\frac{2}{5})$$

$$=(\frac{5}{5}+\frac{2}{5}):(\frac{5}{5}-\frac{2}{5})$$

$$=\frac{7}{5}:\frac{3}{5}$$

$$=\frac{7}{\cancel{5}_{1}}\cdot\frac{\cancel{5}^{1}}{3}$$

$$=\frac{7}{3}$$

Vastaus

a) 30 **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{7}{3}$

L2

a) $6+3(x-2)=7+2x$

$$6+3x-6=7+2x$$

$$3x=7+2x \qquad |-2x$$

$$x=7$$

b)

$$x-\frac{1}{8}=\frac{x}{2} \qquad |\cdot 8$$

$$8\cdot x-\overset{1}{\cancel{8}}\cdot\frac{1}{\underset{1}{\cancel{8}}}=\overset{4}{\cancel{8}}\cdot\frac{x}{\underset{1}{\cancel{2}}}$$

$$8x-1=4x \qquad |-4x$$

$$4x-1=0 \qquad |+1$$

$$4x=1 \qquad |:4$$

$$x=\frac{1}{4}$$

c) $x^2-9=0 \qquad |+9$

$$x^2=9$$

$$x=\sqrt{9}=3 \quad \text{tai} \quad x=-\sqrt{9}=-3$$

Vastaus

a) $x=7$ **b)** $x=\frac{1}{4}$ **c)** $x=-3$ tai $x=3$

L3

Yhtälöparin voi ratkaista yhteenlaskumenetelmällä tai sijoitusmenetelmällä. Malliratkaisussa yhtälöpari on ratkaistu yhteenlaskumenetelmällä.

$$\begin{cases} 2x+5y=0 & \big| \cdot 3 \\ 3x+7y=1 & \big| \cdot(-2) \end{cases}$$

Valitaan poistettavaksi muuttujaksi x.

$$\begin{array}{r} + \begin{cases} 6x+15y=0 \\ -6x-14y=-2 \end{cases} \\ \hline y=-2 \end{array}$$

Sijoitetaan $y=-2$ alkuperäisen yhtälöparin ensimmäiseen yhtälöön.

$$\begin{aligned} 2x+5y&=0 && \text{Sijoitetaan } y=-2. \\ 2x+5\cdot(-2)&=0 \\ 2x-10&=0 && |+10 \\ 2x&=10 && |:2 \\ x&=5 \end{aligned}$$

Yhtälöparin ratkaisu on $x=5$ ja $y=-2$.

Vastaus

$x=5$ ja $y=-2$

L4

$$-4^2 = -(4 \cdot 4) = -16$$

a) $-4^2 + (-4)^2 + 4^0$

$$(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 16$$

$$4^0 = 1$$

$$= -16 + 16 + 1$$

$$= 1$$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$= \frac{2^2}{3^2} - \frac{4^2}{3^2}$$

$$= \frac{4}{9} - \frac{16}{9}$$

$$= \frac{4-16}{9}$$

$$= \frac{-12}{9}^{(3} = -\frac{4}{3}$$

c)

$$\frac{8^5}{16^5}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$= \left(\frac{8}{16}\right)^5$$

$$\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$= \frac{1^5}{2^5}$$

$$= \frac{1}{32}$$

Vastaus

a) $x = 1$ **b)** $x = -\frac{4}{3}$ **c)** $x = \frac{1}{32}$

L5

Tapa 1 Lasketaan, kuinka monta prosenttia vertailuarvo on perusarvosta.

a) Savon Sanomien levikki 57 429 on vertailuarvo ja Keskisuomalaisen levikki 71 282 on perusarvo.

$$\frac{57\,429}{71\,282} = 0,80565... = 80,565...\,\% \approx 81\,\%$$

Savon Sanomien levikki oli 100 % – 81 % = 19 % Keskisuomalaisen levikkiä pienempi.

b) Keskisuomalaisen levikki 71 282 on vertailuarvo ja Savon Sanomien levikki 57 429 on perusarvo.

$$\frac{71\,282}{57\,429} = 1,2412... = 124,12...\,\% \approx 124\,\%$$

Keskisuomalaisen levikki oli 124 % – 100 % = 24 % Savon Sanomien levikkiä suurempi.

Tapa 2 Lasketaan, kuinka monta prosenttia erotus on perusarvosta.

a) Keskisuomalaisen levikki 71 282 on perusarvo.

Lasketaan levikkien erotus.

71 282 – 57 429 = 13 853

Lasketaan, kuinka monta prosenttia erotus on Keskisuomalaisen levikistä.

$$\frac{13\,853}{71\,282} = 0{,}19434... = 19{,}434...\,\% \approx 19\,\%$$

Savon Sanomien levikki oli 19 % Keskisuomalaisen levikkiä pienempi.

b) Savon Sanomien levikki 57 429 on perusarvo.

Levikkien erotus on 13 853.

Lasketaan, kuinka monta prosenttia erotus on Savon Sanomien levikistä.

$$\frac{13\,853}{57\,429} = 0{,}24121... = 24{,}121...\,\% \approx 24\,\%$$

Keskisuomalaisen levikki oli 24 % Savon Sanomien levikkiä suurempi.

Vastaus

a) 19 % **b)** 24 %

L6

a) Lasketaan muuttujan arvoa $x = 3$ vastaava funktion arvo.

$$\begin{aligned} f(3) &= 8\cdot 3 - 7\cdot(3+3) \\ &= 24 - 7\cdot 6 \\ &= 24 - 42 \\ &= -18 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $x = 3$ funktioon $f(x) = 8x - 7(x+3)$.

b) Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan, millä muuttujan x arvoilla funktion arvo $f(x)$ on 3.

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 \\ 8x - 7(x+3) &= 3 \\ 8x - 7x - 21 &= 3 \\ x - 21 &= 3 \quad \Big| +21 \\ x &= 24 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $f(x) = 8x - 7(x+3)$.

c) Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan, millä muuttujan x arvoilla funktion arvo $f(x)$ on 0.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 8x - 7(x+3) &= 0 \\ 8x - 7x - 21 &= 0 \\ x - 21 &= 0 \quad \Big| +21 \\ x &= 21 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $f(x) = 8x - 7(x+3)$.

Vastaus

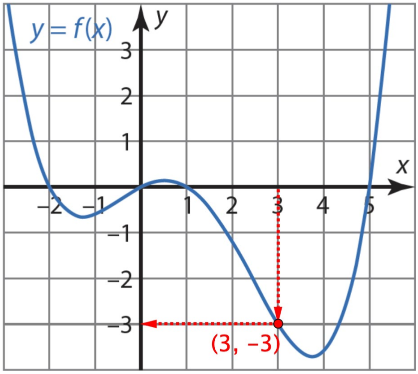
a) $f(3) = -18$ **b)** $x = 24$ **c)** $x = 21$

L7

a) Etsitään se kuvaajan piste, jonka x-koordinaatti on 3.

Kohdassa $x = 3$ kuvaajalla on piste, jossa $y \approx -3$.

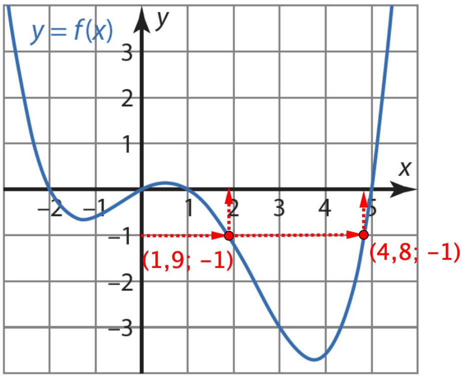
Siis $f(3) \approx -3$.



b) Etsitään ne kuvaajan pisteet, joiden y-koordinaatti on -1.

Pisteitä löytyy kaksi kappaletta, ja niissä $x \approx 1{,}9$ ja $x \approx 4{,}8$.

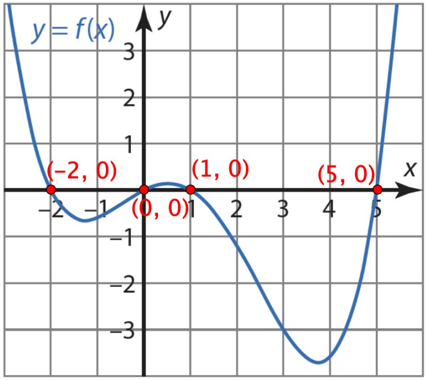
Siis $f(x) = 3$,
kun $x \approx 1{,}9$ tai $x \approx 4{,}8$.



c) Funktion f arvo on nolla niissä kohdissa, joissa funktion kuvaaja leikkaa x-akselin.

Funktion f nollakohdat ovat

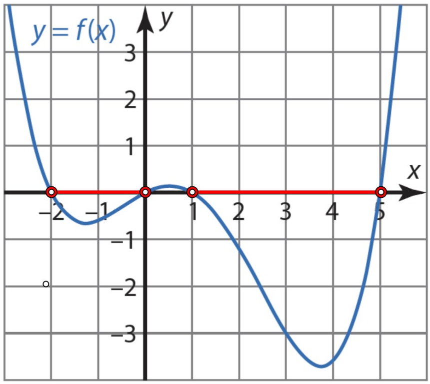
$x \approx -2$, $x \approx 0$, $x \approx 1$ ja $x \approx 5$.



d) Funktion f arvo on negatiivinen niissä kohdissa, joissa funktion kuvaaja on x-akselin alapuolella.

Funktion f arvo on negatiivinen, kun

$-2 < x < 0$ tai $1 < x < 5$.



Vastaus

a) $f(3) \approx -3$
b) $x \approx 1{,}9$ ja $x \approx 4{,}8$
c) $x \approx -2$, $x \approx 0$, $x \approx 1$ ja $x \approx 5$
d) $-2 < x < 0$ tai $1 < x < 5$

L8

Muutetaan kuvan mitta metreiksi, jotta molemmat halkaisijat ovat samassa yksikössä.

3,8 cm = 0,038 m

Lasketaan, kuinka moninkertainen kuvan halkaisija on verrattuna punasolun halkaisijaan.

$$\frac{0,038}{7,2 \cdot 10^{-6}}$$
$$= 5293,93...$$
$$\approx 5300$$

Kuvan halkaisija on noin 5300-kertainen punasolun halkaisijaan verrattuna. Kuva on siis 5300-kertainen suurennos.

Vastaus

5300-kertainen suurennos

L9

Määritetään ensin lottovoiton suuruus. Merkitään lottovoiton suuruutta kirjaimella x.

Ilmaistaan 15 % desimaalilukuna.

$15\ \% = 0,15$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$0,15x = 217,50 \quad |:0,15$$
$$x = 1450 \quad (€)$$

15 % luvusta x on 217,50.

Yhtälön voi ratkaista myös CAS-laskimella.

Lottovoiton suuruus oli 1450 €.

Määritetään seuraavaksi Jutan osuus voitosta. Muodostetaan prosenttikerroin.

$$100\ \% + 16\ \% = 116\ \% = 1,16$$

Jutta sai 16 % enemmän kuin Suvi.

Lasketaan Jutan osuus.

$$1,16 \cdot 217,50 = 252,30 \quad (€)$$

Perusarvo kerrotaan prosenttikertoimella.

Perusarvo on Suvin osuus 217,50 €.

Jutan osuus oli 252,30 €.

Vastaus

lottovoitto 1450 €, Jutan osuus 252,30 €

L10

Lasketaan osallistujien määrä, jos osallistujia olisi ollut 50 % enemmän.

Prosenttikerroin: 100 % + 50 % = 150 % = 1,50.

Talkoisiin osallistuneiden lukumäärä: $1{,}50 \cdot 6 = 9$.

Lasketaan talkoisiin kuluva aika. Merkitään kirjaimella x talkoisiin kuluvaa aikaa, kun talkoolaisia on 9.

Osallistujien lukumäärä	Aika (h)
6	4,5
9	x

Talkoisiin kuluva aika on **kääntäen verrannollinen** talkoisiin osallistujien lukumäärään. Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x.

$$\frac{6}{9} = \frac{x}{4{,}5}$$

Ratkaistaan yhtälö CAS-laskimella.

$$x = 3 \text{ (h)}$$

Talkoisiin kuluisi 3 tuntia.

Lasketaan, kuinka monta prosenttia vähemmän aikaa kuluisi.

Tapa 1 Lasketaan, kuinka monta prosenttia vertailuarvo on perusarvosta.

Uusi aika 3 h on vertailuarvo ja alkuperäinen aika 4,5 h on perusarvo.

$$\frac{3}{4{,}5} = 0{,}6666\ldots = 66{,}66\ldots\ \% \approx 67\ \%$$

Aika pieneni 100 % – 67 % = 33 %.

Tapa 2 Lasketaan, kuinka monta prosenttia lukujen erotus on perusarvosta.

Aikojen erotus on 4,5 h – 3 h = 1,5h.

Lasketaan, kuinka monta prosenttia aika muuttui.

$$\frac{1,5}{4,5} = 0,3333... = 33,33\ \% \approx 33\ \%$$

Aika pieneni 33 %.

Vastaus

33 %

P1

a)

$$\left|\frac{10}{3}:(-\frac{5}{6})\right|$$

$$=\frac{10}{3}\cdot(-\frac{6}{5})$$

$$=\frac{\overset{2}{\cancel{10}}\cdot\overset{2}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{3}}\cdot\underset{1}{\cancel{5}}}$$

$$=-4$$

$$=4$$

b) Lasketaan ensin laskutoimitus $2\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{3}+\frac{1}{5})$.

$$2\frac{1}{2}\cdot({}^{5)}\frac{1}{3}+{}^{3)}\frac{1}{5})$$

$$=\frac{5}{2}\cdot(\frac{5}{15}+\frac{3}{15})$$

$$=\frac{5}{2}\cdot\frac{8}{15}$$

$$=\frac{\overset{1}{\cancel{5}}\cdot\overset{4}{\cancel{8}}}{\underset{1}{\cancel{2}}\cdot\underset{3}{\cancel{15}}}$$

$$=\frac{4}{3}$$

Luvun käänteisluku on $\frac{3}{4}$.

Vastaus

a) 4 **b)** $\frac{3}{4}$

P2

a) $3(x-2)-2(3x-1)=x$

$$3x-6-6x+2=x$$

$$-3x-4=x \qquad \vert -x$$

$$-4x-4=0 \qquad \vert +4$$

$$-4x=4 \qquad \vert :(-4)$$

$$x=-1$$

b)

$$6-\frac{2x}{3}-x=1+\frac{5x}{2} \qquad \vert \cdot 6$$

$$6\cdot 6-\overset{2}{\cancel{6}}\cdot\frac{2x}{\underset{1}{\cancel{3}}}-6\cdot x=6\cdot 1+\overset{3}{\cancel{6}}\cdot\frac{5x}{\underset{1}{\cancel{2}}}$$

$$36-4x-6x=6+15x$$

$$36-10x=6+15x \qquad \vert -15x$$

$$36-25x=6 \qquad \vert -36$$

$$-25x=-30 \qquad \vert :(-25)$$

$$x=\frac{30}{25}^{(5}=\frac{6}{5}$$

c) $5x^2-45=0 \qquad \vert +45$

$$5x^2=45 \qquad \vert :5$$

$$x=9$$

$$x=\sqrt{9}=3 \quad \text{tai} \quad x=-\sqrt{9}=-3$$

Vastaus

a) $x=-1$ **b)** $x=\frac{6}{5}$ **c)** $x=-3$ tai $x=3$

P3

a) $\dfrac{\left(3x^4\right)^3}{9x^3}$ $\qquad (ab)^n = a^n b^n$

$= \dfrac{3^3 \cdot \left(x^4\right)^3}{9x^3}$ $\qquad (a^n)^m = a^{nm}$

$= \dfrac{27 \cdot x^{12}}{9x^3}$

$= \dfrac{27}{9} \cdot \dfrac{x^{12}}{x^3}$ $\qquad \dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$= 3 \cdot x^{12-3}$

$= 3x^9$

b) $-3x^{-2}(-x^4)$

$= 3 \cdot x^{-2} \cdot x^4$ $\qquad a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$= 3 \cdot x^{-2+4}$

$= 3x^2$

c) $\left(\dfrac{2x^3}{(2x)^3}\right)^{-2}$ $\qquad \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$

$= \left(\dfrac{(2x)^3}{2x^3}\right)^2$ $\qquad (ab)^n = a^n b^n$

$= \left(\dfrac{2^3\ \cancel{x^3}^{\,1}}{2\ \cancel{x^3}_{\,1}}\right)^2$

$= (4)^2 = 16$

Vastaus

a) $3x^9$ **b)** $3x^2$ **c)** 16

P4

a) $\sqrt{3+x^2}$ Sijoitetaan $x=1$.

$= \sqrt{3+1^2}$

$= \sqrt{3+1}$

$= \sqrt{4} = 2$

b) $\sqrt{3+x^2}$ Sijoitetaan $x=-3$.

$= \sqrt{3+(-3)^2}$

$= \sqrt{3+9}$

$= \sqrt{12}$

c) $\sqrt{3+x^2}$ Sijoitetaan $x=\sqrt{6}$.

$= \sqrt{3+\left(\sqrt{6}\right)^2}$

$= \sqrt{3+6}$

$= \sqrt{9} = 3$

Vastaus

a) 2 **b)** $\sqrt{12}$ **c)** 3

P5

Piirretään funktion $f(x) = -4x^2 + 25$ kuvaaja.

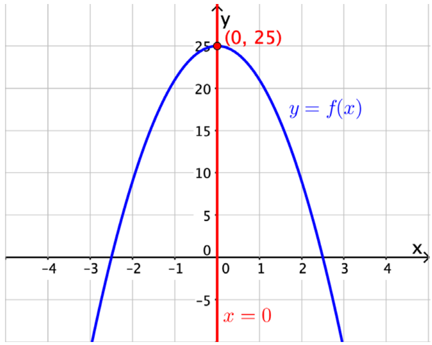
a) Etsitään se kuvaajan piste, jonka x-koordinaatti on 0

Piirretään suora $x = 0$.

Määritetään funktion f kuvaajan ja suoran leikkauspiste.

Leikkauspisteen y-koordinaatti on 25

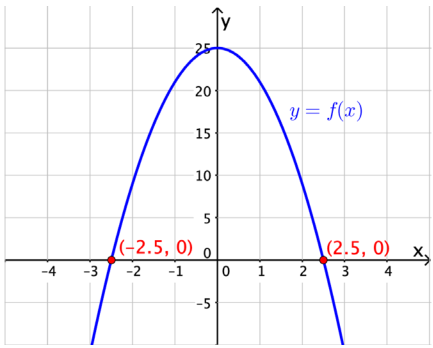
Siis $f(0) = 25$.



b) Funktion f arvo on nolla niissä kohdissa, joissa funktion kuvaaja leikkaa x-akselin.

Määritetään funktion f kuvaajan ja x-akselin leikkauspisteet.

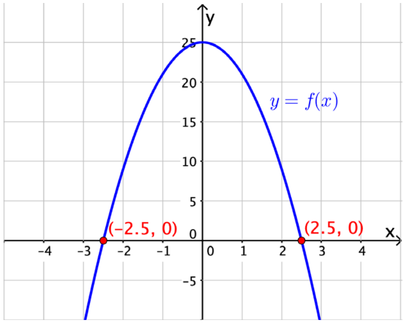
Funktion f nollakohdat ovat $x = -2{,}5$ ja $x = 2{,}5$.



c) Funktion arvo on epänegatiivinen niissä kohdissa, joissa sen kuvaaja on x-akselilla tai x-akselin yläpuolella.

Funktion f arvo on epänegatiivinen, kun

$-2,5 \leq x \leq 2,5.$



Vastaus

a) $f(0) = 25$ **b)** $x = -2,5$ ja $x = 2,5$ **c)** $-2,5 \leq x \leq 2,5$

P6

a) Laskussa veloitetaan yhden kerran perusmaksu 100 €.

Kun työaikaa kuluu x tuntia, on työtunneista perittävä veloitus
$x \cdot 58$ € = $58x$ €.

Laskun suuruuden euroina ilmaisee funktio

$$f(x) = 100 + 58x.$$

Tallennetaan funktion lauseke CAS-laskimeen b- ja c-kohtien laskuja varten.

b) Funktion f arvo on 448 (€). Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muuttujan x arvo.

$$f(x) = 448$$
$$x = 6 \ \ (\mathrm{h})$$

Ratkaistaan yhtälö CAS-laskimella.

Aidan kunnostukseen kului aikaa 6 tuntia.

c) Lasketaan laskun suuruus, kun työhön kului aikaa 15 tuntia ja 19 tuntia.

$$f(15) = 970 \ \ (€)$$
$$f(19) = 1202 \ \ (€)$$

Lasketaan funktion arvot laskimella.

Lasketaan, kuinka monta prosenttia arvioitua suurempi lasku oli.

Tapa 1 Lasketaan, kuinka monta prosenttia vertailuarvo on perusarvosta.

$$\frac{1202}{970}$$
$$= 1{,}2391...$$
$$= 123{,}91...\,\% \approx 124\,\%$$

Vertailuarvo on 1202 € ja perusarvo 970 €.

Lasku oli 124 % – 100 % = 24 % arvioitua suurempi.

Tapa 2 Lasketaan, kuinka monta prosenttia lukujen erotus on perusarvosta.

Laskun suuruuksien erotus on 1202 € – 970 € = 232 €.

Lasketaan, kuinka monta prosenttia erotus on perusarvosta.

$$\frac{232}{970}$$

Erotus on 232 € ja perusarvo 970 €.

$$= 0,23917...$$
$$= 23,917...\,\% \approx 24\,\%$$

Lasku oli 24 % arvioitua suurempi.

Vastaus

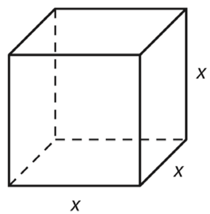
a) $f(x) = 100 + 58x$ **b)** 6 h **c)** 24 %

P7

Muutetaan tilavuus kuutiomillimetreiksi.

$$4{,}58\ \text{L} \qquad 1\ \text{L} = 1\ \text{dm}^3$$
$$= 4{,}58\ \text{dm}^3 \qquad 1\ \text{dm}^3 = 1000\ \text{cm}^3 = 1\,000\,000\ \text{mm}^3$$
$$= 4\,580\,000\ \text{mm}^3$$

Merkitään kuution särmän pituutta kirjaimella x.



Kuution tilavuus on $x \cdot x \cdot x = x^3$. Toisaalta kuution tilavuuden tulee olla 4 580 000 mm^3.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$x^3 = 4\,580\,000 \qquad \text{Yhtälön voi ratkaista myös CAS-laskimella.}$$
$$x = \sqrt[3]{4\,580\,000}$$
$$= 166{,}068...$$
$$\approx 166\ \ (\text{mm})$$

Mitta-astian sisäpuolen särmän pituus on 166 mm.

Vastaus

166 mm

P8

Merkitään kanelipullan alkuperäistä hintaa kirjaimella h.

Hintaa nostetaan 15 %. Prosenttikerroin on 100 % = 15 % = 115 % = 1,15.
Korotettu hinta on $1{,}15h$.

Hintaa alennetaan 8 %. Prosenttikerroin on 100 % – 8 % = 92 % = 0,92.
Alennettu hinta on $0{,}92 \cdot 1{,}15h = 1{,}058h$.

Hintaa alennetaan 7 %. Prosenttikerroin on 100 % – 7 % = 93 % = 0,93.
Alennettu hinta on $0{,}93 \cdot 1{,}058h = 0{,}98394h$.

Hinta $0{,}98394h$ on 0,98394-kertainen hintaan h verrattuna. Lopullinen hinta on siis 98,394 % ≈ 98,4 % alkuperäisestä hinnasta.

Hinta aleni 100 % – 98,4 % = 1,6 %.

Huomaa, että uuden hinnan voi laskea myös yhdellä laskutoimituksella:

$0{,}93 \cdot 0{,}92 \cdot 1{,}15 \cdot h = 0{,}98394h.$

Vastaus

1,6 %

P9

Merkitään myytyjen aikuisten lippujen lukumäärää kirjaimella x.

Aikuista lipuista saadut lipputulot ovat tällöin $x \cdot 5$ € $= 5x$ €.

Merkitään myytyjen lastenlippujen lukumäärää kirjaimella y.

Lastenlipuista saadut lipputulot ovat tällöin $y \cdot 2$ € $= 2y$ €.

Lippuja myytiin yhteensä 421: $x + y = 421$.

Lipputulot olivat yhteensä 1760 €: $5x + 2y = 1760$.

Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} x + y = 421 \\ 5x + 2y = 1760 \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöpari CAS-laskimella.

$x = 306$ ja $y = 115$

Aikuisten lippujen lukumäärä $x = 306$ ja
lastenlippujen lukumäärä $y = 115$.

Vastaus

306 aikuisten lippua ja 115 lastenlippua

P10

Merkitään kirjaimella x aallon nopeutta, kun meren syvyys on $200\text{ m} = 0{,}2\text{ km}$.

Nopeus (km/h)	**Syvyyden neliöjuuri ($\sqrt{\text{km}}$)**
500	2,0
x	0,2

Verrannolliset suureet ovat nopeus ja syvyyden neliöjuuri.

Aallon nopeus on **kääntäen verrannollinen** meren syvyyden neliöjuureen. Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x.

$$\frac{500}{x} = \frac{\sqrt{0{,}2}}{\sqrt{2}}$$

$$x = 1581{,}13\ldots$$

$$\approx 1600 \text{ (km/h)}$$

Ratkaistaan yhtälö CAS-laskimella.

Aallon nopeus on 1600 km/h, kun meren syvyys on 200 m.

Vastaus

1600 km/h