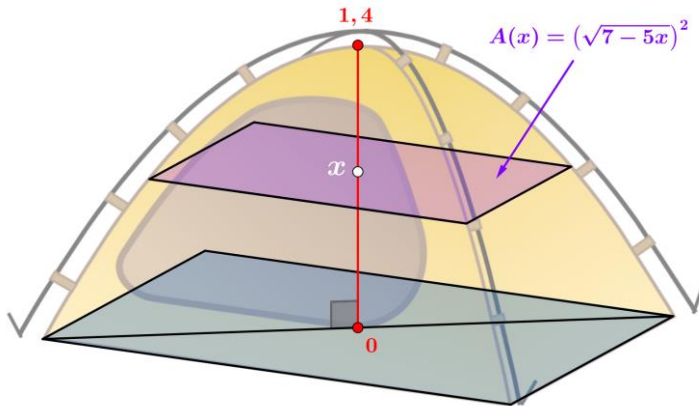


16.1

Sijoitetaan teltta koordinaatistoon niin, että x -akseli on kohtisuorassa yhdensuuntaisia pohjia vastaan.



Kohtisuoran poikkileikkauksen pinta-ala on
 $A(x) = (\sqrt{7 - 5x})^2 = 7 - 5x$, missä $0 \leq x \leq 1,4$.

Lasketaan teltan tilavuus.

$$V = \int_0^{1,4} A(x) dx$$

Kappale on kohtien
 $x = 0$ ja $x = 1,4$ välissä.

$$= \int_0^{1,4} (7 - 5x) dx$$

Lasketaan CAS-laskimella.

$$= 4,9 \text{ (m}^3\text{)}$$

Teltan tilavuus on $4,9 \text{ m}^3 = 4900 \text{ dm}^3 = 4900 \text{ L}$.

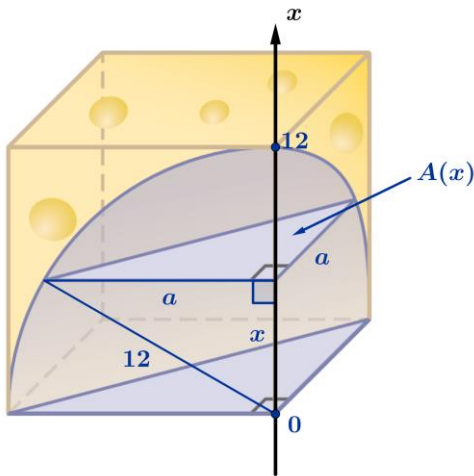
Vastaus

$$4,9 \text{ m}^3 = 4900 \text{ L}$$

16.2

Sijoitetaan kuutio koordinaatistoon niin, että kuutiosta pois leikattava kärki on origossa ja x -akseli kulkee pitkin pystysärmää.

Tarkastellaan poisleikattavaa kappaletta. Sen jokainen x -akselia vastaan kohtisuora poikkileikkaus on tasakylkinen suorakulmainen kolmio. Kun poikkileikkauskolmion kylkien pituutta merkitään kirjaimella a , niin kolmion pinta-ala on $A = \frac{1}{2}a^2$. Tämä pinta-ala pitää pystyä lausumaan muuttujan x avulla.



Tarkastellaan sivutahkoa, jolle ympyrän kaari on piirretty. Muodostetaan yhtälö Pythagoraan lauseen avulla ja ratkaistaan a .

$$x^2 + a^2 = 12^2$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$a = \sqrt{144 - x^2} \quad \text{tai} \quad a = -\sqrt{144 - x^2}$$

Koska $0 \leq a \leq 12$ kaikilla $0 \leq x \leq 12$, niin vain $a = \sqrt{144 - x^2}$ kelpaa ratkaisuksi.

Poikkileikkauksen pinta-ala on

$$A(x) = \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{144 - x^2})^2 = \frac{1}{2}(144 - x^2) = 72 - \frac{1}{2}x^2.$$

Lasketaan poikkileikattavan kappaleen tilavuus.

$$V = \int_0^{12} A(x) dx$$

$$= \int_0^{12} (72 - \frac{1}{2}x^2) dx$$

$$= 576 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Kappale on kohtien

$x = 0$ ja $x = 12$ välissä.

Lasketaan CAS-laskimella.

Vastaus

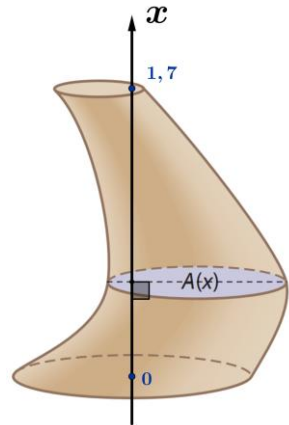
$$576 \text{ cm}^3$$

16.3

Sijoitetaan taideteos koordinaatistoon niin, että x -akseli on kohtisuorassa pohjan suuntaisia poikkileikkauksia vastaan.

Kohtisuoran poikkileikkauksen pinta-ala on $A(x) = 2\pi(1 - 0,4x)^2$, missä $0 \leq x \leq 1,7$.

Lasketaan taideteoksen tilavuus.



$$\begin{aligned} V &= \int_0^{1,7} A(x) dx \\ &= \int_0^{1,7} 2\pi(1 - 0,4x)^2 dx \\ &= 5,064... \text{ (m}^3\text{)} \end{aligned}$$

Kappale on kohtien
 $x = 0$ ja $x = 1,7$ välissä.

Lasketaan CAS-laskimella.

Taideteoksen tiheys on 680 kg/m^3 .

Taideteoksen massa on tilavuuden ja tiheyden tulo.

$$5,064... \text{ m}^3 \cdot 680 \text{ kg/m}^3 = 3443,802... \text{ kg} \approx 3400 \text{ kg}$$

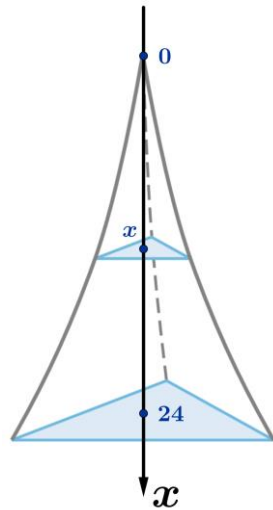
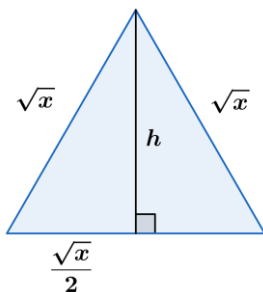
Vastaus

3400 kg

16.4

Sijoitetaan torni koordinaatistoon niin, että tornin huippu on origossa ja x -akseli on kohtisuorassa pohjan suuntaisia poikkileikkauksia vastaan.

Tasasivuisen poikkileikkauskolmion sivun pituus on \sqrt{x} . Määritetään poikkileikkauskolmion korkeus Pythagoraan lauseella.



$$h^2 + \left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2 = (\sqrt{x})^2$$

$$h = \frac{\sqrt{3x}}{2} \quad \text{tai} \quad h = -\frac{\sqrt{3x}}{2}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

Koska $h \geq 0$ kaikilla $0 \leq x \leq 24$, niin vain $h = \frac{\sqrt{3x}}{2}$ kelpaa ratkaisuksi.

Lasketaan poikkileikkauskolmion pinta-ala.

$$A(x) = \frac{h\sqrt{x}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3x}}{2}\sqrt{x}}{2} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{x}\sqrt{x}}{4} = \frac{x\sqrt{3}}{4}$$

Lasketaan tornin tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{24} A(x) dx \\ &= \int_0^{24} \frac{x\sqrt{3}}{4} dx \\ &= 124,707\dots \approx 125 \text{ (m}^3\text{)} \end{aligned}$$

Kappale on kohtien
 $x = 0$ ja $x = 24$ välissä.

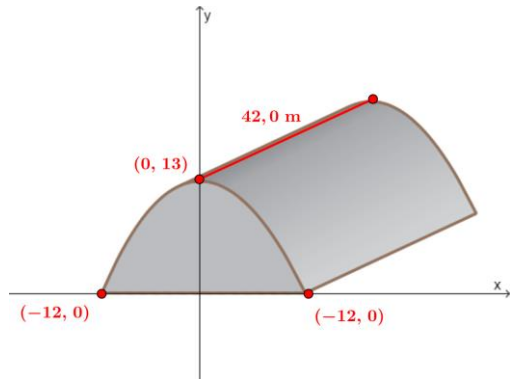
Lasketaan CAS-laskimella.

Vastaus

125 m³

16.5

Sijoitetaan hallin pääty koordinaatistoon niin, että tornin huippu on y -akselilla ja päädyn alareuna on x -akselilla.



Hallin poikkileikkaus on paraabeli, jonka yhtälö on muotoa $ax^2 + bx + c = 0$. Paraabelin yhtälön toteuttavat pisteet $(-12, 0)$, $(0, 13)$ ja $(12, 0)$. Muodostetaan yhtälöryhmä ja ratkaistaan vakiot a , b ja c .

$$\begin{cases} a \cdot (-12)^2 + b \cdot (-12) + c = 0 \\ a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 13 \\ a \cdot 12^2 + b \cdot 12 + c = 0 \end{cases}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$a = -\frac{13}{144}, \quad b = 0 \quad \text{ja} \quad c = 13$$

Paraabelin yhtälö on siis $y = -\frac{13}{144}x^2 + 13$.

Hallin kaikki päätyjen suuntaiset poikkileikkaukset ovat pinta-alaltaan yhtä suuria. Lasketaan päädyn pinta-ala.

$$\begin{aligned} A_p &= \int_{-12}^{12} \left(-\frac{13}{144}x^2 + 13\right) dx \\ &= 208 \text{ (m}^2\text{)} \end{aligned}$$

Integroidaan CAS-laskimella.

Halli on suora lieriö, jonka pohjan pinta-ala on $A_p = 208 \text{ m}^2$ ja korkeus 42,0 m. Lasketaan hallin tilavuus.

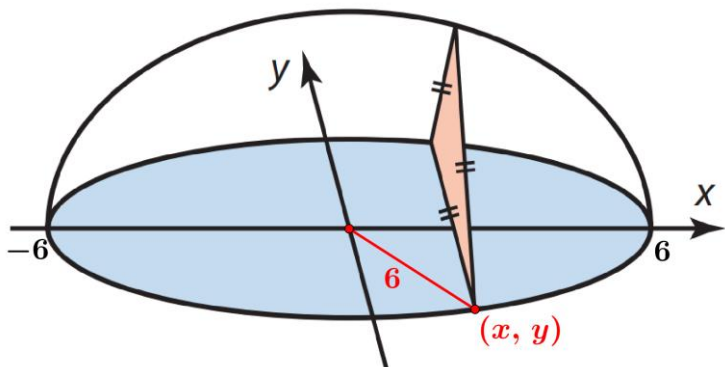
$$V = A_p h = 208 \text{ m}^2 \cdot 42,0 \text{ m} = 8736 \text{ m}^3 \approx 8740 \text{ m}^3$$

Vastaus

8740 m³

16.6

Sijoitetaan kappale koordinaatistoon niin, että sen pohja on xy -tason suuntainen ja sen pohjan keskipiste on origossa.



Kappaleen pohja on origokeskinen ympyrä, jonka yhtälö on $x^2 + y^2 = 6^2$.

Kappaleen poikkileikkaukset ovat tasasivuisia kolmioita, joiden sivun pituus on $2|y|$ ja kaikki kulmat ovat 60° . Määritetään poikkileikkauskolmion pinta-ala.

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{2} (2|y|)^2 \sin 60^\circ & A &= \frac{1}{2} ab \sin \gamma \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4y^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} & \sin 60^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \sqrt{3}y^2 \end{aligned}$$

Ympyrän yhtälöstä $x^2 + y^2 = 6^2$ saadaan, että $y^2 = 36 - x^2$.

Näin ollen $A(x) = \sqrt{3}y^2 = \sqrt{3}(36 - x^2)$.

Lasketaan kappaleen tilavuus.

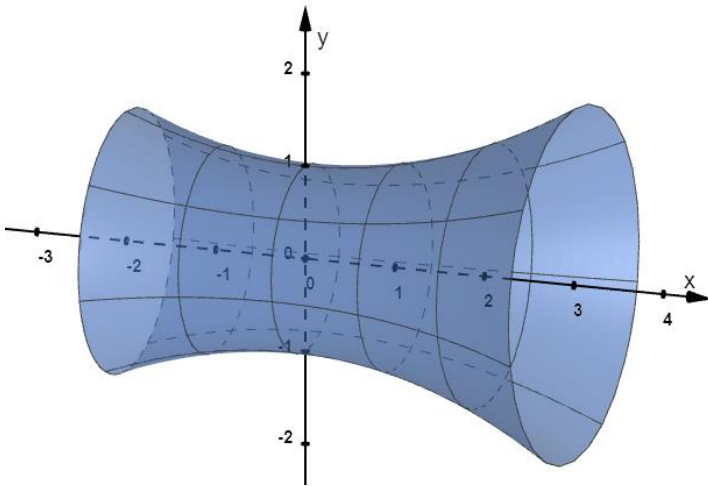
$$\begin{aligned} V &= \int_{-6}^6 A(x) dx \\ &= \int_{-6}^6 \sqrt{3}(36 - x^2) dx \\ &= 288\sqrt{3} \quad (\approx 498,8) \end{aligned}$$

Integroidaan CAS-laskimella.

Vastaus

$$288\sqrt{3}$$

16.7



Sorvaamisen jälkeen jokainen pohjan suuntainen poikkileikkaus on ympyrä, jonka säde on

$$r = 0,1x^2 + 1, \text{ missä } -2 \leq x \leq 3.$$

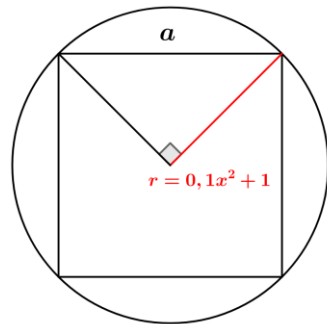
Kappaletta hiotaan niin, että jokaisen ympyrän sisään jää mahdollisimman suuri neliö.

Pythagoraan lauseen mukaan

$$a^2 = r^2 + r^2 = 2r^2.$$

Kohtisuoran poikkileikkauksen pinta-ala on siis

$$A(x) = 2(0,1x^2 + 1)^2, \text{ missä } -2 \leq x \leq 3.$$



Lasketaan kappaleen tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \int_{-2}^3 A(x) dx \\ &= \int_{-2}^3 2(0,1x^2+1)^2 dx \\ &= 15,766... \approx 15,8 \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

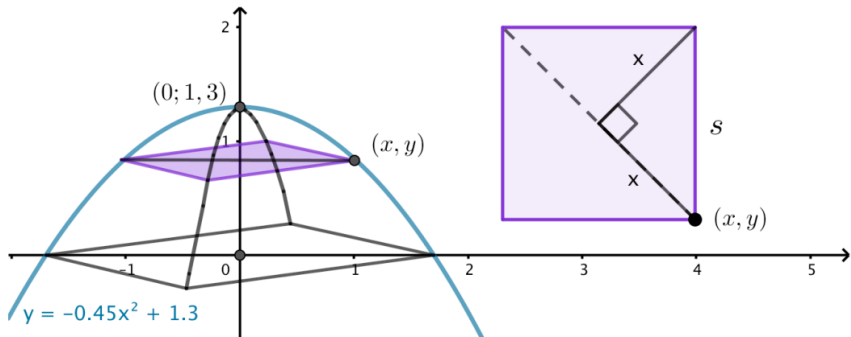
Integroidaan CAS-laskimella.

Vastaus

$$15,8 \text{ cm}^3$$

16.8

Sijoitetaan teltta koordinaatistoon niin, että pohjan keskipiste on origossa ja korkeusjana positiivisella y -akselilla.



Teltan korkein kohta on siis kohdassa $x = 0$. Lasketaan teltan korkeus.

$$y = -0,45 \cdot 0^2 + 1,3 = 1,3 \text{ (m)}$$

Korkeudella y piirretyn poikkileikkausneliön sivu on s ja lävistäjän puolikas on $2x$, missä $0 \leq y \leq 1,3$. Korkeudella y poikkileikkausneliön pinta-ala on $A(y) = s^2$.

Pythagoraan lauseen mukaan $x^2 + x^2 = s^2$ eli $s^2 = 2x^2$.

Paraabelin yhtälöstä $y = -0,45x^2 + 1,3$ saadaan, että $x^2 = \frac{y-1,3}{-0,45}$.

Näin ollen $A(y) = s^2 = 2x^2 = 2 \cdot \frac{y-1,3}{-0,45}$, missä $0 \leq y \leq 1,3$.

Lasketaan teltan tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{1,3} A(y) dy \\ &= \int_0^{1,3} 2 \cdot \frac{y-1,3}{-0,45} dy \\ &= 3,7555\dots \\ &\approx 3,8 \text{ (m}^2\text{)} \end{aligned}$$

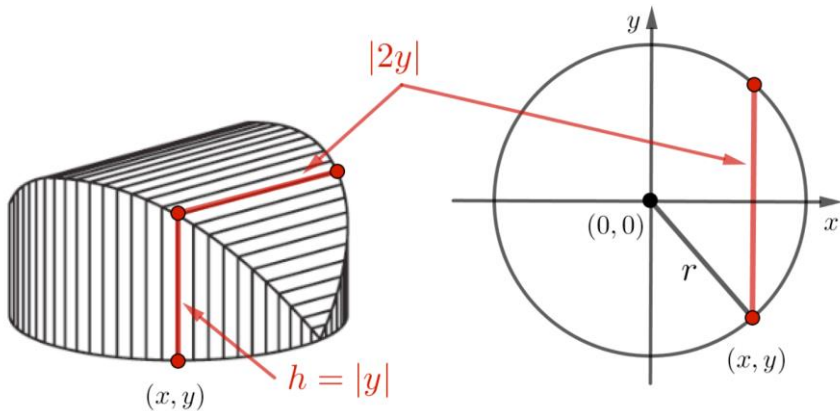
Integroidaan CAS-laskimella.

Vastaus

$$3,8 \text{ m}^2$$

16.9

Sijoitetaan museorakennuksen pohjajympyrä koordinaatiston xy -tasoon niin, että pohjan keskipiste on origossa ja poikkileikkaussuorakulmiot ovat y -akselin suuntaisia.



Pohjajympyrän säde on $r = \frac{19,7}{2} = 9,85$ (m).

Pohjajympyrän yhtälö on $x^2 + y^2 = 9,85^2$.

Poikkileikkaussuorakulmion kanta on $|2y|$ ja korkeus $\frac{1}{2} \cdot |2y| = |y|$.

Kohdassa x poikkileikkaussuorakulmion pinta-ala on siis

$$A(x) = |2y| \cdot |y| = 2y^2.$$

Pohjajympyrän yhtälöstä $x^2 + y^2 = 9,85^2$ saadaan, että

$$y^2 = 9,85^2 - x^2. \text{ Näin ollen } A(x) = 2y^2 = 2(9,85^2 - x^2), \text{ missä } -9,85 \leq x \leq 9,85.$$

Lasketaan rakennuksen tilavuus.

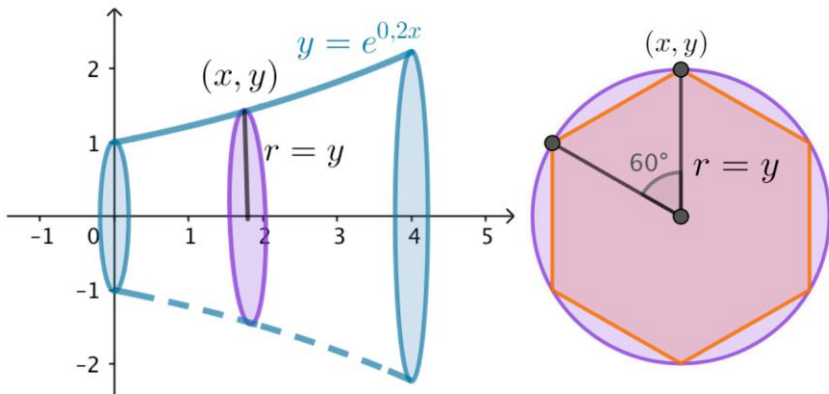
$$\begin{aligned} V &= \int_{-9,85}^{9,85} A(x) dx \\ &= \int_{-9,85}^{9,85} (2(9,85^2 - x^2)) dx \\ &= 2548,457... \\ &\approx 2550 \text{ (m}^3\text{)} \end{aligned}$$

Integroidaan CAS-laskimella.

Vastaus

2550 m³

16.10



Tyhjän sisäosan poikkileikkaus on ympyrä, jonka pinta-ala kohdassa x on

$$A_{\text{sisä}}(x) = \pi r^2 = \pi y^2 = \pi(e^{0,2x})^2 = \pi e^{0,4x}.$$

Puisen kappaleen poikkileikkaus on säännöllinen kuusikulmio, jonka pinta-ala kohdassa x on

$$\begin{aligned} A_{\text{puu}}(x) &= 6 \cdot \frac{1}{2} r \cdot r \cdot \sin 60^\circ \\ &= 3r^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} y^2 \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} (e^{0,2x})^2 \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} e^{0,4x} \end{aligned}$$

Lasketaan onton sisäosan tilavuus sekä sisäosan puukappaleen tilavuus.

$$\begin{aligned}V_{\text{sisä}} &= \int_0^4 A_{\text{sisä}}(x) dx \\ &= \int_0^4 \pi e^{0,4x} dx \\ &= \frac{5\pi}{2} (e^{\frac{8}{5}} - 1)\end{aligned}$$

Integroidaan CAS-laskimella.

$$\begin{aligned}V_{\text{puu}} &= \int_0^4 A_{\text{puu}}(x) dx \\ &= \int_0^4 \frac{3\sqrt{3}}{2} e^{0,4x} dx \\ &= \frac{15\sqrt{3}}{4} (e^{\frac{8}{5}} - 1)\end{aligned}$$

Integroidaan CAS-laskimella.

Lasketaan tyhjän tilan osuus taideteoksen sisäosasta.

$$\begin{aligned}&\frac{V_{\text{sisä}} - V_{\text{puu}}}{V_{\text{sisä}}} \cdot 100 \% \\ &= \frac{\frac{5\pi}{2} (e^{\frac{8}{5}} - 1) - \frac{15\sqrt{3}}{4} (e^{\frac{8}{5}} - 1)}{\frac{5\pi}{2} (e^{\frac{8}{5}} - 1)} \cdot 100 \% \\ &= 17,3006... \% \approx 17,3 \%\end{aligned}$$

Lasketaan CAS-laskimella.

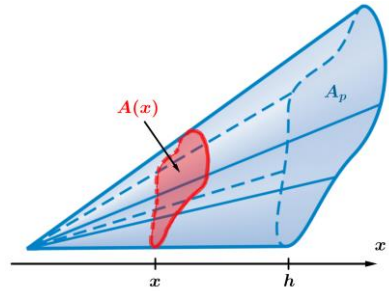
Vastaus

17,3 %

16.11

Kartio syntyy, kun huipusta alkava puolisuora rajaa avaruuskappaleen kiertämällä kartion pohjan reunaa pitkin. Kartion kaikki pohjain suuntaiset poikkileikkaukset ovat yhdenmuotoisia.

Sijoitetaan kartio koordinaatistoon niin, että kartion huippu on kohdassa $x = 0$ ja x -akseli on kohtisuorassa pohjaa A_p vastaan. Merkitään kartion korkeutta kirjaimella h ja kohtaan x piirretyn kohtisuoran poikkileikkauksen pinta-alaa $A(x)$.



Sisäkkäiset kartiot, joiden pohjat ovat $A(x)$ ja A_p ja korkeudet x ja h , ovat keskenään yhdenmuotoiset. Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan $A(x)$.

$$\frac{A(x)}{A_p} = \frac{x}{h}^2 \quad | \cdot A_p$$

$$A(x) = \frac{A_p}{h^2} x^2, \quad \text{missä } 0 \leq x \leq h$$

Lasketaan kartion tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h A(x) dx \\ &= \int_0^h \frac{A_p}{h^2} x^2 dx \\ &= \frac{A_p}{h^2} \int_0^h x^2 dx \\ &= \frac{A_p}{h^2} \cdot \frac{1}{3} h^3 \\ &= \frac{1}{3} A_p h \quad \square \end{aligned}$$

16.12

Sijoitetaan konserttilava koordinaatistoon niin, että pohjana olevan puolimpyrän keskipiste on origossa ja puolimpyrän halkaisija x -akselilla.

Pohjaa rajaavan puolimpyrän yhtälö on $x^2 + y^2 = 8^2$, missä $y \geq 0$.

Katon ja pohjan leikkaussuoraa vastaan kohtisuorat poikkileikkaukset ovat suorakulmaisia kolmioita, joiden toinen terävä kulma on 60° .

Kohtaan x piirretyn poikkileikkauskolmion kanta on $|y|$. Ratkaistaan poikkileikkauskolmion korkeus.

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{|y|}$$

$$h = \sqrt{3}|y|.$$

Kohdassa x poikkileikkauskolmion pinta-ala on siis

$$A(x) = \frac{|y|h}{2} = \frac{|y| \cdot \sqrt{3}|y|}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} y^2.$$

Pohjan yhtälöstä $x^2 + y^2 = 8^2$ saadaan, että $y^2 = 8^2 - x^2$. Näin ollen

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} y^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} (8^2 - x^2), \text{ missä } -8,0 \leq x \leq 8,0.$$

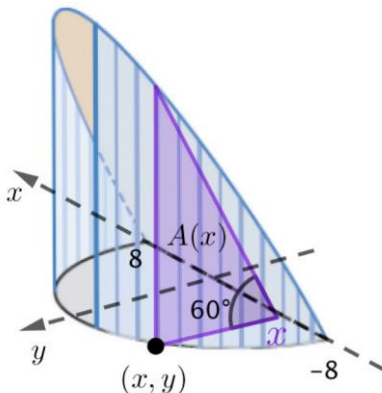
Lasketaan kappaleen tilavuus.

$$V = \int_{-8,0}^{8,0} A(x) dx$$

$$= \int_{-8,0}^{8,0} \frac{\sqrt{3}}{2} (8^2 - x^2) dx$$

$$= 591,206\dots$$

$$\approx 590 \text{ (m}^3\text{)}$$



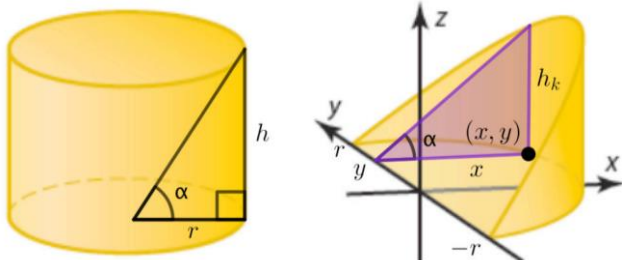
Ratkaistaan CAS-laskimella.

Integroidaan CAS-laskimella.

Vastaus

$$590 \text{ m}^3$$

16.13



Leikatun palan pohja on xy -tason puoliympyrä, jonka yhtälö on $x^2 + y^2 = r^2$, missä $x > 0$.

Pohjaa vastaan kohtaan x piirretty kohtisuora poikkileikkaus on suorakulmainen kolmio, jonka xy -tasossa olevan sivun pituus on x ja y -akselilla oleva terävä kulma on α . Lisäksi $\tan \alpha = \frac{h}{r}$ on vakio.

Ratkaistaan kohtaan y piirretyn poikkileikkauskolmion korkeus h_k .

$$\frac{h_k}{x} = \frac{h}{r} \quad | \cdot x > 0$$

$$h_k = \frac{h}{r} x$$

Kohtaan y piirretyn poikkileikkauskolmion pinta-ala on siis

$$A(y) = \frac{x \cdot h_k}{2} = \frac{x \cdot \frac{h}{r} x}{2} = \frac{h}{2r} x^2.$$

Pohjan yhtälöstä $x^2 + y^2 = r^2$ saadaan, että $x^2 = r^2 - y^2$. Näin ollen

$$A(y) = \frac{h}{2r} x^2 = \frac{h}{2r} (r^2 - y^2).$$

Lasketaan palan tilavuus.

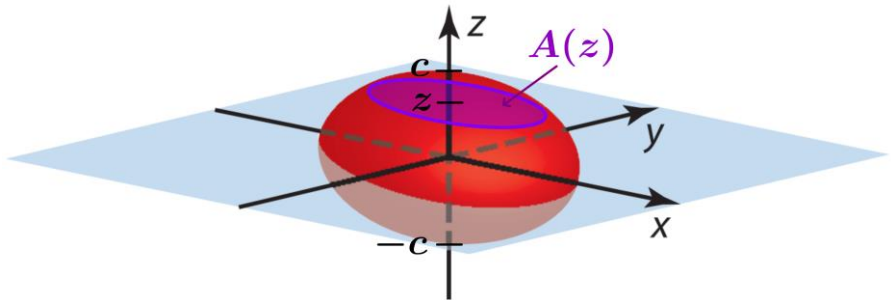
$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^r A(y) dy \\ &= \int_{-r}^r \frac{h}{2r} (r^2 - y^2) dy \\ &= \frac{2}{3} r^2 h \end{aligned}$$

Integroidaan CAS-laskimella.

Vastaus

$$\frac{2}{3} r^2 h$$

16.14



Leikataan ellipsoidi kohdassa z tasolla, joka on kohtisuorassa z -akselia vastaan. Syntynyt leikkauskäyrä on

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{c^2 - z^2}{c^2} \quad | \cdot \frac{c^2}{c^2 - z^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} \cdot \frac{c^2}{c^2 - z^2} + \frac{y^2}{b^2} \cdot \frac{c^2}{c^2 - z^2} = 1$$

$$\frac{\frac{x^2}{a^2 \cdot (c^2 - z^2)}}{\frac{c^2}{c^2}} + \frac{\frac{y^2}{a^2 \cdot (c^2 - z^2)}}{\frac{c^2}{c^2}} = 1$$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a \cdot \sqrt{c^2 - z^2}}{c}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{b \cdot \sqrt{c^2 - z^2}}{c}\right)^2} = 1.$$

Saadun ellipsin pinta-ala on $A(z) = \pi mn$, missä $m = \frac{a \cdot \sqrt{c^2 - z^2}}{c}$ ja $n = \frac{b \cdot \sqrt{c^2 - z^2}}{c}$. Sievennetään pinta-alan $A(z)$ lauseke.

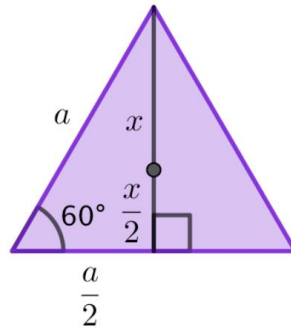
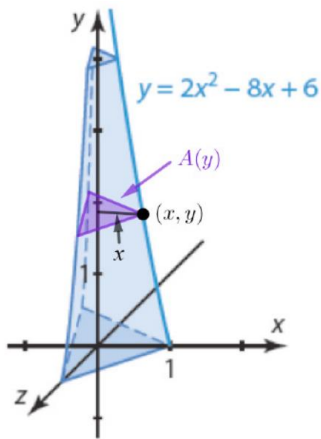
$$\begin{aligned} A(z) &= \pi mn \\ &= \pi \cdot \frac{a\sqrt{c^2 - z^2}}{c} \cdot \frac{b\sqrt{c^2 - z^2}}{c} \\ &= \pi \cdot \frac{ab(c^2 - z^2)}{c^2} \end{aligned}$$

Lasketaan ellipsoidin tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \int_{-c}^c A(z) dz \\ &= \int_{-c}^c \pi \cdot \frac{ab(c^2 - z^2)}{c^2} dz \\ &= \frac{4}{3} \pi abc \quad \square \end{aligned}$$

Integroidaan CAS-laskimella.

16.15



Poikkileikkaus korkeudella y on tasasivuinen kolmio, jonka kärjen etäisyys kolmion painopisteestä on x .

Kolmion painopiste on mediaanien leikkauspiste, joka jakaa mediaanit $2 : 1$ kärjestä lukien. Tasasivuisen kolmion kaikki kulmat ovat 60° . Merkitään kolmion sivua kirjaimella a .

Korkeudelle y piirretyn poikkileikkauskolmion pinta-ala on

$$\begin{aligned}
 A(y) &= \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin 60^\circ & \sin 60^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 &= \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2
 \end{aligned}$$

Ratkaistaan a^2 Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned}
 \frac{a}{2}^2 + x + \frac{x}{2}^2 &= a^2 \\
 a^2 &= 3x^2
 \end{aligned}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

Ratkaistaan x paraabelin yhtälöstä $y = 2x^2 - 8x + 6$, missä $x \leq 1$.

$$y = 2x^2 - 8x + 6$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{2y + 4}}{2}$$

Koska $x \leq 1$, vain ratkaisu $x = \frac{4 - \sqrt{2y + 4}}{2}$ kelpaa.

Näin ollen korkeudelle y piirretyn poikkileikkauskolmion pinta-ala on

$$\begin{aligned} A(y) &= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4} x^2 \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{4 - \sqrt{2y + 4}}{2} \right)^2, \text{ missä } 0 \leq y \leq 4. \end{aligned}$$

Lasketaan pylvään tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 A(y) dy \\ &= \int_0^4 \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{4 - \sqrt{2y + 4}}{2} \right)^2 dy \\ &= 2,105... \\ &\approx 2,1 \text{ (m}^3\text{)} \end{aligned}$$

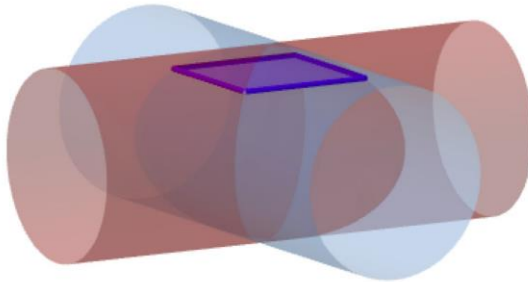
Integroidaan CAS-laskimella.

Vastaus

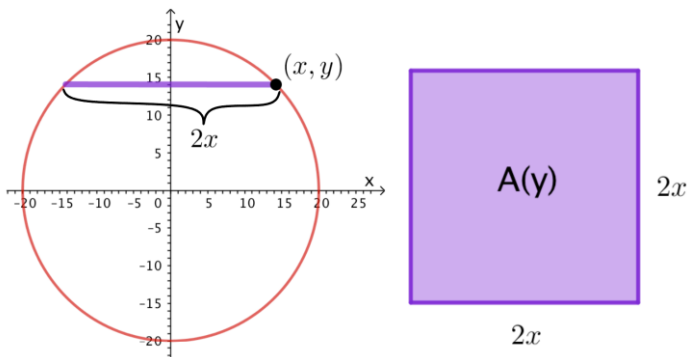
$$2,1 \text{ m}^3$$

16.16

Sijoitetaan putket xz -tasoon niin, että putkien poikkileikkausympyröiden keskipisteet ovat x - ja z -akseleilla.



Putkien risteävän alueen jokainen xz -tason (kuvassa vaakasuora taso) suuntainen poikkileikkaus on neliö. Leikataan putkien yhteinen osa xy -tasolla (kuvassa pystysuora taso), jolloin leikkauskuvio on sama kuin putken poikkileikkaus eli ympyrä $x^2 + y^2 = 20^2$.



Poikkileikkausneliön sivun pituus on $2x$. Neliön pinta-ala on $A(y) = (2x)^2 = 4x^2$.

Ympyrän yhtälöstä $x^2 + y^2 = 20^2$ saadaan, että $x^2 = 20^2 - y^2$. Näin ollen poikkileikkausneliön pinta-ala on $A(y) = 4x^2 = 4(20^2 - y^2)$.

Lasketaan putkien yhteisen osan tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \int_{-20}^{20} A(y)dy \\ &= \int_{-20}^{20} 4(20^2 - y^2)dy \\ &= 42\,666,66\dots \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

Integroidaan CAS-laskimella.

Yhteisen osan tilavuus on $42\,666,66\dots \text{ cm}^3 \approx 42\,700 \text{ cm}^3 = 42,7 \text{ L}$.

Vastaus

$$42\,700 \text{ cm}^3 = 42,7 \text{ L}$$