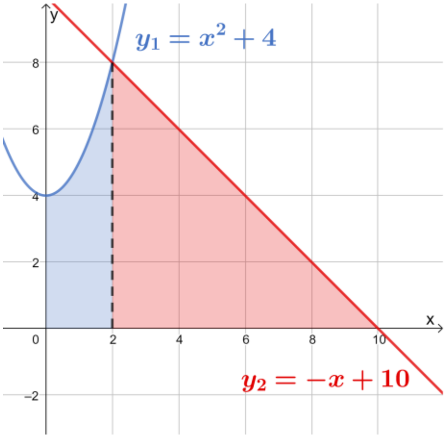
15.1

Käyrien $y_1 = x^2 + 4$ ja $y_2 = -x + 10$ sekä koordinaattiakselien rajaama alue pyörähtää x-akselin ympäri. Hahmotellaan tilannetta piirtämällä käyrät ja pyörähtävä alue.



Tilavuus on laskettava kahdessa osassa, koska pyörähdyskappaleen rajaava käyrä vaihtuu.

Ratkaistaan integroimisrajoja varten käyrien leikkauskohta.

$$y_1 = y_2$$
$$x^2 + 4 = -x + 10$$
$$x = 2 \quad \text{tai} \quad x = -3$$

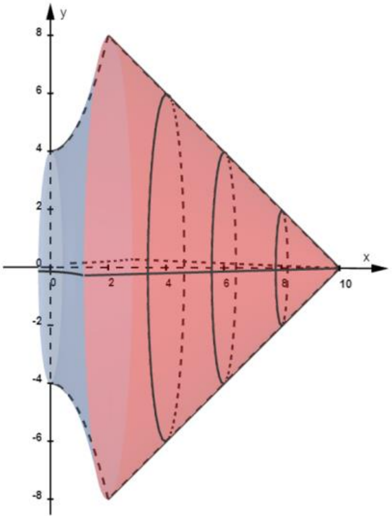
Ratkaistaan CAS-laskimella.

Koska alue sijaitsee y-akselin oikealla puolella, niin $x = 2$.

Ratkaistaan integroimisrajoja varten käyrän y_2 ja x-akselin leikkauskohta

$$y_2 = 0$$
$$-x + 10 = 0$$
$$x = 10$$

Piirretään pyörähdyskappale geometriaohjelmalla.



Rajataan käyrä

$y_1 = x^2 + 4$ välille $0 \le x \le 2$

ja käyrä

$y_2 = -x + 10$ välille $2 \le x \le 10.$

Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 \\ &= \pi \int_0^2 (y_1(x))^2 \, dx + \pi \int_2^{10} (y_2(x))^2 \, dx \\ &= \pi \int_0^2 (x^2 + 4)^2 \, dx + \pi \int_2^{10} (-x + 10)^2 \, dx \\ &= \frac{1152}{5}\pi \quad (\approx 723{,}82) \end{aligned}$$

Välillä $[0, 2]$ pyörähtää käyrä $y_1(x) = x^2 + 4$ ja välillä $[2, 10]$ pyörähtää käyrä $y_2(x) = -x + 10.$

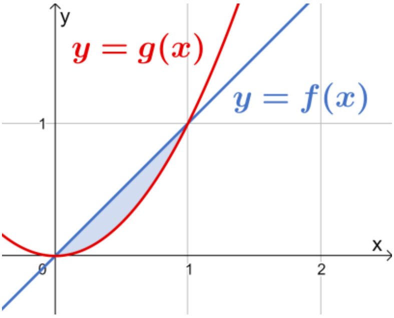
Lasketaan CAS-laskimella.

Vastaus

$\frac{1152}{5}\pi$

15.2

Funktioiden $f(x) = x$ ja $g(x) = x^2$ kuvaajien rajaama alue pyörähtää x-akselin ympäri. Hahmotellaan tilannetta piirtämällä funktioiden f ja g kuvaajat ja pyörähtävä alue.



Integroimisrajat saadaan selville ratkaisemalla käyrien leikkauskohdat.

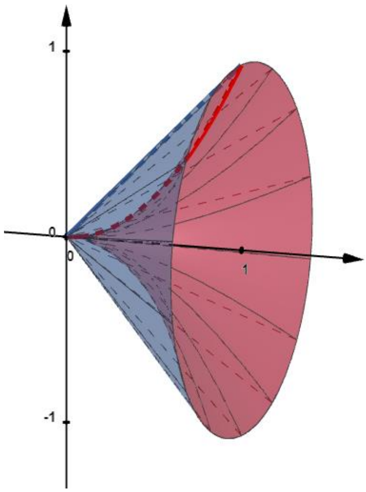
$$f(x) = g(x)$$

$$x = x^2 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 1$$

Kuvaajien rajaaman alueen pyörähtäessä muodostuu kappale, jonka ulkopinta muodostuu käyrän $y = f(x)$ ja sisäpinta käyrän $y = g(x)$ pyörähtäessä x-akselin ympäri välillä $[0, 1]$.

Piirretään pyörähdyskappale geometriaohjelmalla.



Rajataan funktioiden $f(x)$ ja $g(x)$ kuvaajat välille $0 \le x \le 1$.

Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$
\begin{aligned}
V &= V_{\text{ulko}} - V_{\text{sisä}} \\
&= \pi \int_0^1 (f(x))^2 \,\mathrm{d}x - \pi \int_0^1 (g(x))^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \pi \int_0^1 (x)^2 \,\mathrm{d}x + \pi \int_0^1 (x^2)^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{15}\pi \quad (\approx 0{,}419)
\end{aligned}
$$

Ulkokuori muodostuu käyrän $y = f(x)$ pyörähtäessä ja sisäosa käyrän $y = g(x)$ pyörähtäessä.

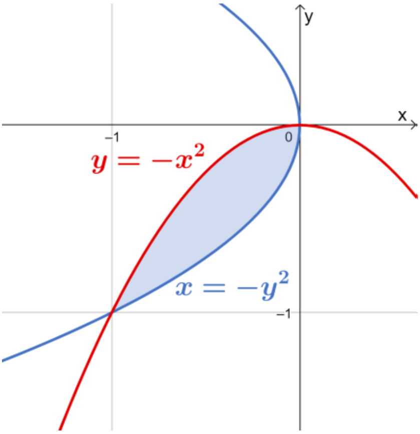
Lasketaan CAS-laskimella.

Vastaus

$\frac{2}{15}\pi$

15.3

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä käyrät ja pyörähtävä alue.



Ratkaistaan käyrien leikkauspisteet.

$$\begin{cases} x = -y^2 \\ y = -x^2 \end{cases}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

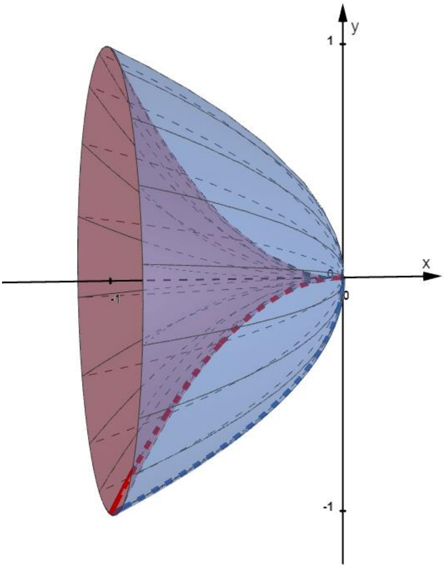
$x = 0$ ja $y = 0$ tai $x = -1$ ja $y = -1$

Leikkauspisteet ovat $(-1, -1)$ ja $(0,\ 0)$.

a) Käyrien rajaama alue pyörähtää x-akselin ympäri.

Kuvaajien rajaaman alueen pyörähtäessä muodostuu kappale, jonka ulkopinta muodostuu käyrän $x = -y^2$ ja sisäpinta käyrän $y = -x^2$ pyörähtäessä x-akselin ympäri välillä $-1 \leq x \leq 0$.

Piirretään pyörähdyskappale geometriaohjelmalla.



f(x) = Jos(-1 ≤ x ≤ 0, -x²)

g(x) = Jos(-1 ≤ x ≤ 0, -√(-x))

Pinta(f, 2π, xAkseli)

Pinta(g, 2π, xAkseli)

Pyörähdyskappaleen tilavuutta laskettaessa integroitava funktio on poikkileikkausympyrän säteen neliö. $V = \pi \int_a^b r^2 \mathrm{d}x = \pi \int_a^b (f(x))^2 \mathrm{d}x$

Kohdassa x poikkileikkausympyrän säde on käyrän pisteen y -koordinaatin itseisarvo. Ratkaistaan poikkileikkausympyröiden säteen neliöt.

$$x = -y^2$$
$$y^2 = -x$$

$$r_{ulko}^2 = y^2 = -x$$

$$y = -x^2$$

$$r_{sisä}^2 = y^2 = (-x^2)^2 = x^4$$

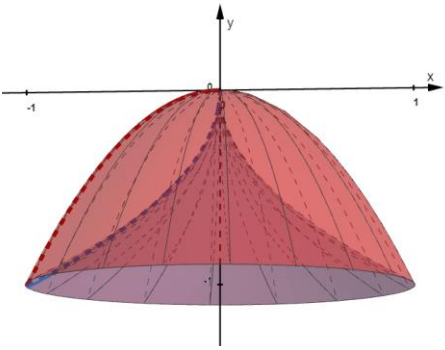
Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= V_{\text{ulko}} - V_{\text{sisä}} \\ &= \pi \int_{-1}^{0} r_{ulko}^2 \, \mathrm{d}x - \pi \int_{-1}^{0} r_{sisä}^2 \, \mathrm{d}x \\ &= \pi \int_{-1}^{0} -x \, \mathrm{d}x - \pi \int_{-1}^{0} x^4 \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{3}{10}\pi \end{aligned}$$

Ulkopinta muodostuu käyrän $x = -y^2$ pyörähtäessä ja sisäpinta käyrän $y = -x^2$ pyörähtäessä.

Lasketaan CAS-laskimella.

b) Käyrien rajaama alue pyörähtää y -akselin ympäri.



Kuvaajien rajaaman alueen pyörähtäessä muodostuu kappale, jonka ulkopinta muodostuu käyrän $y = -x^2$ ja sisäpinta käyrän $x = -y^2$ pyörähtäessä y -akselin ympäri välillä $-1 \leq y \leq 0$.

Käyrien rajaaman alueen symmetrian vuoksi pyörähdyskappale on yhtä suuri kuin kappale, joka muodostuu alueen pyörähtäessä x -akselin ympäri. Siis kappaleen tilavuus $V = \frac{3}{10}\pi$.

Vastaus

a) $\frac{3}{10}\pi$

b) $\frac{3}{10}\pi$

15.4

Käyrät $y = x^2 + 3$ ja $y = \frac{1}{4}x^2 + 6$ ovat ylöspäin aukeavia paraabeleja.

Käyrä $y = x^2 + 3$ leikkaa y -akselin kohdassa $y = 3$ ja käyrä $y = \frac{1}{4}x^2 + 6$ kohdassa $y = 6$.

Ratkaistaan käyrien leikkauskohdat muodostamalla yhtälöpari ja ratkaisemalla muuttuja x.

$$\begin{cases} y = x^2 + 3 \\ y = \frac{1}{4}x^2 + 6 \end{cases}$$

$$x^2 + 3 = \frac{1}{4}x^2 + 6 \mid -\frac{1}{4}x^2 - 3$$

$$\frac{3}{4}x^2 = 3 \qquad \mid \cdot \frac{4}{3}$$

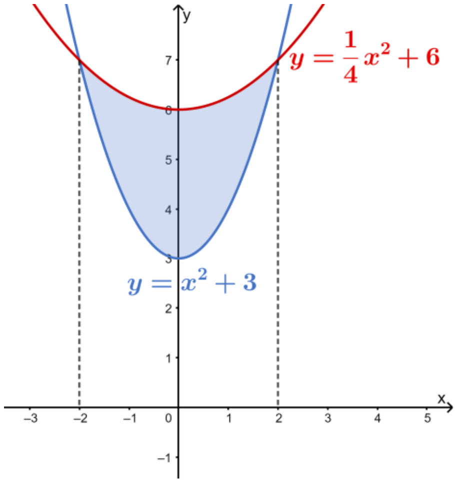
$$x^2 = \cancel{3} \cdot \frac{4}{\cancel{3}}$$

$$x^2 = 4$$

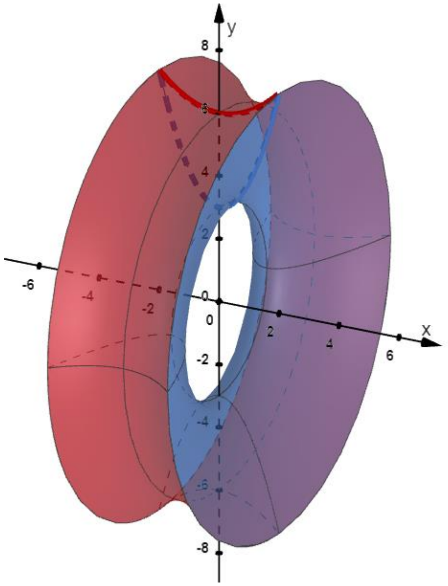
$$x = -\sqrt{4} \quad \text{tai} \quad x = \sqrt{4}$$

$$x = -2 \qquad\qquad x = 2$$

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä kuva.



Käyrien rajaaman alueen pyörähtäessä muodostuu kappale, jonka ulkopinta muodostuu käyrän $y = \frac{1}{4}x^2 + 6$ ja sisäpinta käyrän $y = x^2 + 3$ pyörähtäessä x-akselin ympäri välillä $-2 \le x \le 2$.



Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

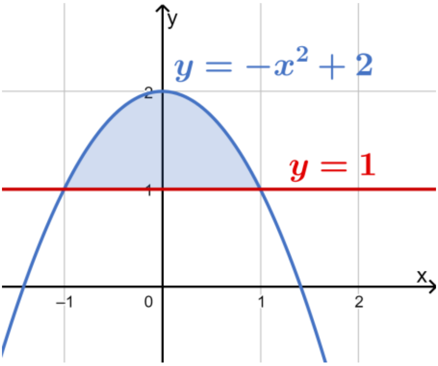
$$
\begin{aligned}
V &= V_{\text{ulko}} - V_{\text{sisä}} \\
&= \pi\int_{-2}^{2}(\frac{1}{4}x^2+6)^2\mathrm{d}x - \pi\int_{-2}^{2}(x^2+3)^2\,\mathrm{d}x \\
&= \pi\int_{-2}^{2}(\frac{1}{4}x^2+6)^2\mathrm{d}x - \pi\int_{-2}^{2}(x^2+3)^2\,\mathrm{d}x && \text{Yhteinen tekijä } \pi. \\
&= \pi\left(\int_{-2}^{2}(\frac{1}{4}x^2+6)^2\mathrm{d}x - \int_{-2}^{2}(x^2+3)^2\,\mathrm{d}x\right) && \text{Potenssiin korotus.} \\
&= \pi\left(\int_{-2}^{2}(\frac{1}{16}x^4+3x^2+36)\mathrm{d}x - \int_{-2}^{2}(x^4+6x^2+9)\mathrm{d}x\right) && \text{Yhdistetään integraalit.} \\
&= \pi\left(\int_{-2}^{2}(\frac{1}{16}x^4+3x^2+36-(x^4+6x^2+9))\mathrm{d}x\right) && \text{Avataan sulut.} \\
&= \pi\left(\int_{-2}^{2}(\frac{1}{16}x^4+3x^2+36-x^4-6x^2-9)\mathrm{d}x\right) \\
&= \pi\left(\int_{-2}^{2}(-\frac{15}{16}x^4-3x^2+27)\mathrm{d}x\right) && \text{Integroidaan termit erikseen.} \\
&= \pi\left(\Big/_{-2}^{2}(-\frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{16}\cdot\frac{1}{\cancel{5}}x^5-\cancel{3}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}x^3+27x)\right) \\
&= \pi\left(\Big/_{-2}^{2}(-\frac{3}{16}x^5-x^3+27x)\right) \\
&= \pi\left((-\frac{3}{16}\cdot 2^5-2^3+27\cdot 2)-(-\frac{3}{16}\cdot(-2)^5-(-2)^3+27\cdot(-2))\right) \\
&= \pi\left(40-(-40)\right) \\
&= 80\pi
\end{aligned}
$$

Vastaus

80π

15.5

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä paraabeli $y=-x^2+2$, suora $y=1$ sekä niiden rajaama alue.



Ratkaistaan paraabelin ja suoran leikkauskohdat muodostamalla yhtälöpari.

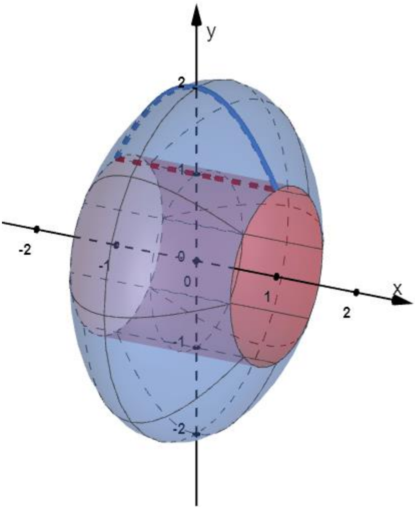
$$\begin{cases} y=-x^2+2 \\ y=1 \end{cases}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$x=-1$ tai $x=1$

Käyrien rajaaman alueen pyörähtäessä muodostuu kappale, jonka ulkopinta muodostuu käyrän $y=-x^2+2$ ja sisäpinta käyrän $y=1$ pyörähtäessä x-akselin ympäri välillä $-1\leq x\leq 1$.

Piirretään pyörähdyskappale geometriaohjelmalla.



Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

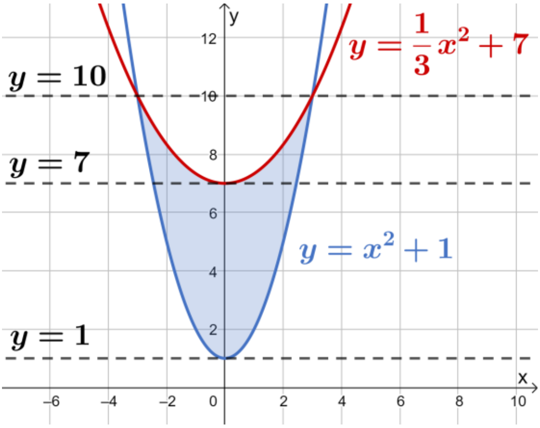
$$
\begin{aligned}
V &= V_{\text{ulko}} - V_{\text{sisä}} \\
&= \pi \int_{-1}^{1} (-x^2 + 2)^2 \mathrm{d}x - \pi \int_{-1}^{1} 1^2 \, \mathrm{d}x \qquad \text{Lasketaan CAS-laskimella.} \\
&= \frac{56}{15}\pi
\end{aligned}
$$

Vastaus

$\frac{56}{15}\pi$

15.6

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä paraabelit $y = x^2 + 1$ ja $y = \frac{1}{3}x^2 + 7$ sekä niiden rajaama alue.



Integroidaan muuttujan y suhteen.

Paraabeli $y = x^2 + 1$ leikkaa y-akselin kohdassa $y = 1$.

Paraabeli $y = \frac{1}{3}x^2 + 7$ leikkaa y-akselin kohdassa $y = 7$.

Integroinnin yläraja saadaan selville ratkaisemalla paraabelien leikkauspisteet.

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = \frac{1}{3}x^2 + 7 \end{cases}$$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$x = -3$ ja $y = 10$ tai $x = 3$ ja $y = 10$

Poikkileikkausympyrän säde kohdassa y on paraabelin pisteen etäisyys y-akselista, eli pisteen x-koordinaatin itseisarvo.

Koska integroidaan muuttujan y suhteen, on säde r ilmaistava muuttujan y avulla. Ratkaistaan CAS-laskimella paraabelien yhtälöistä muuttujat x.

$$y = x^2 + 1$$

$$\underbrace{x = -\sqrt{y-1}}_{\text{paraabelin vasen puoli}} \quad \text{tai} \quad \underbrace{x = \sqrt{y-1}}_{\text{paraabelin oikea puoli}}$$

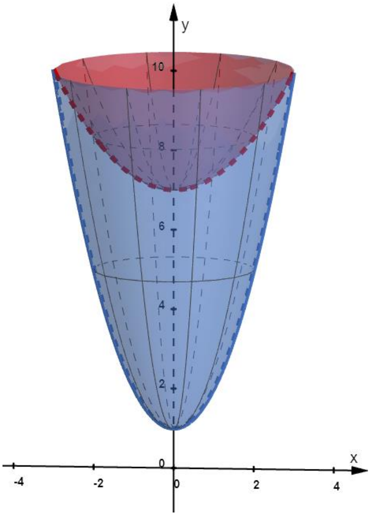
$$y = \frac{1}{3}x^2 + 7$$

$$\underbrace{x = -\sqrt{3y-21}}_{\text{paraabelin vasen puoli}} \quad \text{tai} \quad \underbrace{x = \sqrt{3y-21}}_{\text{paraabelin oikea puoli}}$$

Pyörähdyskappaleen ulkopinta muodostuu, kun paraabelin $y = x^2 + 1$ oikea puoli, eli käyrä $x = \sqrt{y-1}$ pyörähtää y -akselin ympäri välillä $1 \leq y \leq 10$.

Sisäpinta muodostuu, kun paraabelin $y = \frac{1}{3}x^2 + 7$ oikea puoli, eli käyrä $x = \sqrt{3y-21}$ pyörähtää y -akselin ympäri välillä $7 \leq y \leq 10$.

Piirretään pyörähdyskappale geometriaohjelmalla.



Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$V = V_{\text{ulko}} - V_{\text{sisä}}$$

$$= \pi \int_1^{10} \sqrt{y-1}^{\,2}\, dy - \pi \int_7^{10} \sqrt{3y-21}^{\,2}\, dy$$

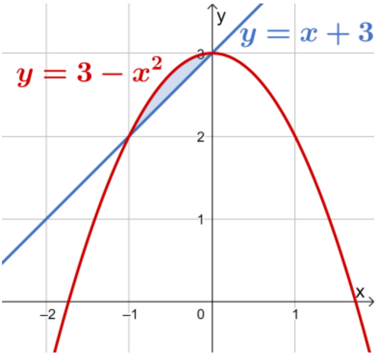
$$= 27\pi$$

Vastaus

27π

15.7

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä suora $y = x + 3$, käyrä $y = 3 - x^2$ ja niiden rajaama alue.



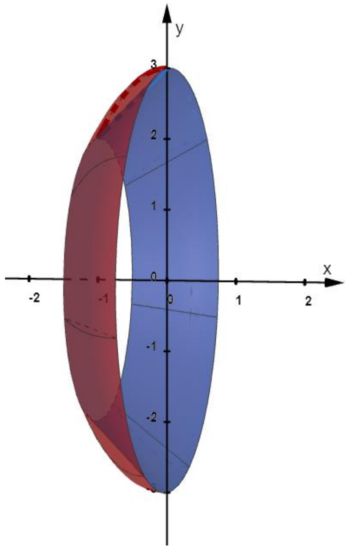
Integroimisrajat saadaan selville ratkaisemalla käyrien leikkauskohdat.

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ y = 3 - x^2 \end{cases}$$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$x = -1$ tai $x = 0$

Käyrien rajaaman alueen pyörähtäessä muodostuu kappale, jonka ulkopinta muodostuu käyrän $y = 3 - x^2$ ja sisäpinta suoran $y = x + 3$ pyörähtäessä x-akselin ympäri välillä $-1 \leq x \leq 0$.

Piirretään pyörähdyskappale geometriaohjelmalla.



Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= V_{\text{ulko}} - V_{\text{sisä}} \\ &= \pi \int_{-1}^{0} (3 - x^2)^2 \, dx - \pi \int_{-1}^{0} (x + 3)^2 \, dx \\ &= \frac{13}{15}\pi \end{aligned}$$

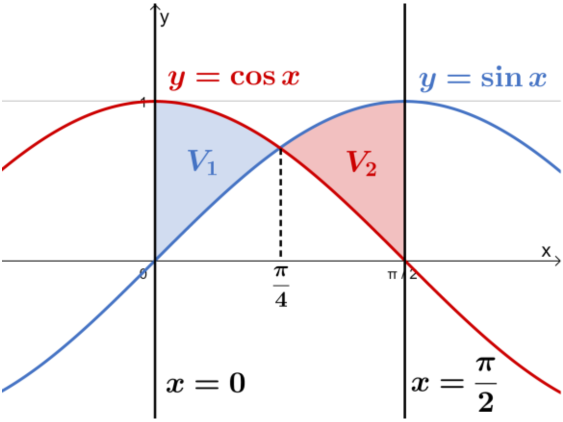
Vastaus

$\frac{13}{15}\pi$

15.8

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä käyrät $y = \sin x$, $y = \cos x$,

$x = 0$ ja $x = \frac{\pi}{2}$ sekä niiden rajaama alue.



Käyrien rajaaman alueen pyörähtäessä muodostuu kaksiosainen ontto kappale.

Ratkaistaan käyrien leikkauskohta.

$$\begin{cases} y = \sin x \\ y = \cos x \end{cases}$$

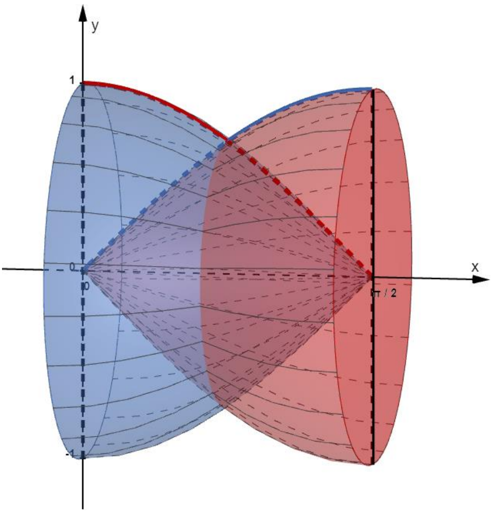
Ratkaistaan CAS-laskimella.

Rajataan ratkaisut välille $[0, \frac{\pi}{2}]$.

$$x = \frac{\pi}{4}$$

Kappaleen vasemmanpuoleisen osan V_1 ulkopinta muodostuu käyrän $y = \cos x$ ja sisäpinta käyrän $y = \sin x$ pyörähtäessä x-akselin ympäri välillä $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$. Alue on symmetrinen, joten $V_1 = V_2$.

Piirretään pyörähdyskappale geometriaohjelmalla.



Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 \\ &= 2 \cdot V_1 \\ &= 2 \cdot \left(\underbrace{\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x)^2 \, dx}_{\text{ulkopinta}} - \underbrace{\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x)^2 \, dx}_{\text{sisäpinta}} \right) \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx \\ &= \pi \end{aligned}$$

$V_1 = V_2$

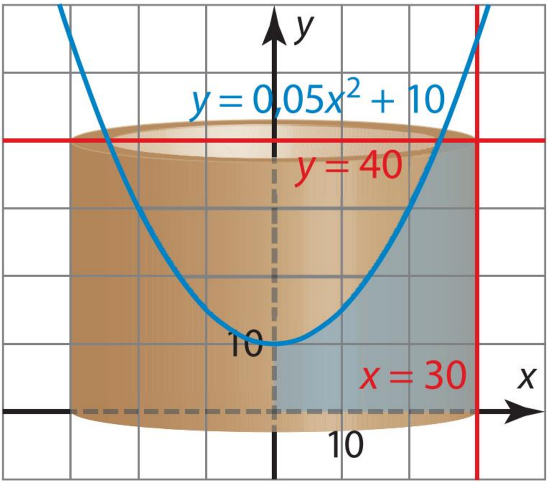
Integraalia voi muokata ennen laskemista CAS-laskimella.

Lasketaan CAS-laskimella.

Vastaus

π

15.9



Paraabeli $y = 0{,}05x^2 + 10$ leikkaa y-akselin kohdassa $y = 10$.

Integroidaan muuttujan y suhteen, joten ratkaistaan paraabelin yhtälöstä muuttuja x.

$y = 0{,}05x^2 + 10$

$\underbrace{x = -\sqrt{20y - 200}}_{\text{paraabelin vasen puoli}}$ tai $\underbrace{x = \sqrt{20y - 200}}_{\text{paraabelin oikea puoli}}$

Ratkaistaan CAS-laskimella. Huom. Laskin voi antaa tuloksen eri muodossa.

Pyörähdyskappaleen ulkopinta muodostuu, kun suora $x = 30$ pyörähtää y-akselin ympäri välillä $0 \leq y \leq 40$.

Pyörähdyskappaleen sisäpinta muodostuu paraabelin $y = 0{,}05x^2 + 10$ oikeanpuoleisen osan eli käyrän $x = \sqrt{20y - 200}$ pyörähtäessä y-akselin ympäri välillä $10 \leq y \leq 40$.

Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$
\begin{aligned}
V &= V_{\text{ulko}} - V_{\text{sisä}} \\
&= \pi \int_0^{40} 30^2 \mathrm{d}y - \pi \int_{10}^{40} \sqrt{20y - 200}\ \mathrm{d}y \qquad \text{Lasketaan CAS-laskimella.} \\
&= 36\,000\pi - 9\,000\pi \\
&= 27\,000\pi \quad (\mathrm{mm}^3)
\end{aligned}
$$

Munakupin tilavuus on

$$27\,000\pi\ \mathrm{mm}^3 \approx 8{,}42... \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^3.$$

Lasketaan munakupin massa kertomalla koivuvanerin tiheys pyörähdyskappaleen tilavuudella.

$$
\begin{aligned}
m &= 680\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 8{,}42... \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^3 \\
&= 680 \cdot \frac{1000\ g}{\mathrm{m}^3} \cdot 8{,}42... \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^3 \\
&= 57{,}679...\ \mathrm{g} \\
&\approx 58\ \mathrm{g}
\end{aligned}
$$

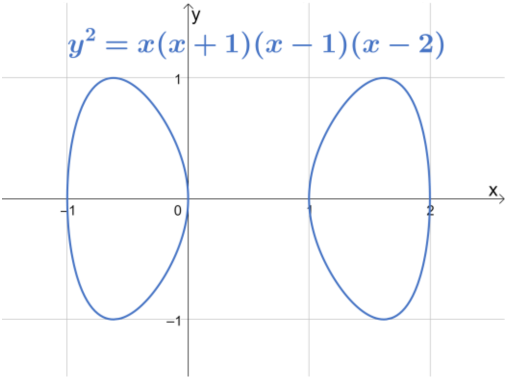
Yhden munakupin massa on 58 g.

Vastaus

58 g

15.10

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä käyrä $y^2 = x(x+1)(x-1)(2-x)$.



Ratkaistaan integroimisrajoja varten käyrän ja x-akselin leikkauskohdat.

$y^2 = x(x+1)(x-1)(2-x)$ Sijoitetaan $y = 0$.

$0 = x(x+1)(x-1)(2-x)$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$x = 0$ tai $x = -1$ tai $x = 1$ tai $x = 2$

Vasemmanpuoleinen pyörähdyskappale muodostuu, kun käyrä pyörähtää x-akselin ympäri välillä $-1 \leq x \leq 0$.

Oikeanpuoleinen pyörähdyskappale muodostuu, kun käyrä pyörähtää x-akselin ympäri välillä $1 \leq x \leq 2$.

Lasketaan syntyvien pyörähdyskappaleiden tilavuudet.

$$V_1 = \pi \int_{-1}^{0} y^2 \mathrm{d}x = \pi \int_{-1}^{0} x(x+1)(x-1)(x-2)\mathrm{d}x = \frac{19}{30}\pi$$

$$V_2 = \pi \int_{1}^{2} y^2 \mathrm{d}x = \pi \int_{1}^{2} x(x+1)(x-1)(x-2)\mathrm{d}x = \frac{19}{30}\pi$$

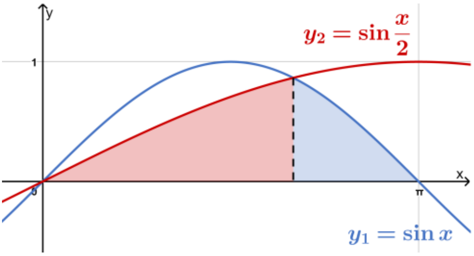
Kummankin kappaleen tilavuus on $\frac{19}{30}\pi$. Kappaleet ovat siis yhtä suuret.

Vastaus

Kappaleet ovat yhtä suuret.

15.11

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä käyrät $y_1 = \sin x$ ja $y_2 = \sin\dfrac{x}{2}$ sekä niiden ja x-akselin välillä $[0,\ \pi]$ rajaama alue.



Ratkaistaan integroimisrajoja varten käyrien leikkauskohta.

$$y_1 = y_2$$

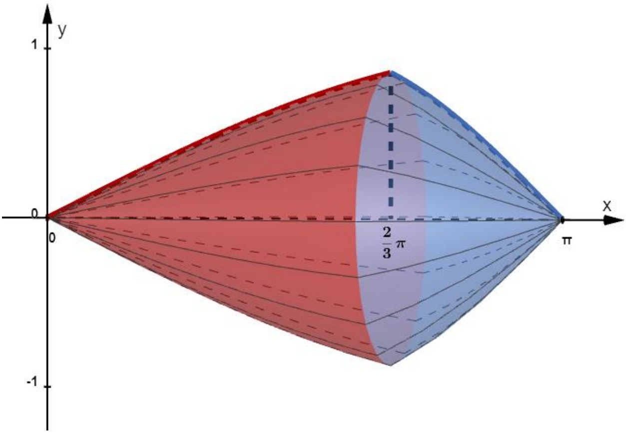
$$\sin x = \sin\frac{x}{2}$$

$$x = \frac{2}{3}\pi$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

Rajataan ratkaisut välille $[0,\ \pi]$

Piirretään pyörähdyskappale geometriaohjelmalla.



Rajataan käyrä

$y_1 = \sin x$ välille

$\frac{2}{3}\pi \le x \le \pi$

ja käyrä

$y_2 = \sin\frac{x}{2}$ välille

$0 \le x \le \frac{2}{3}\pi.$

Lasketaan syntyvän pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$V = V_1 + V_2$$

$$= \pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi} (y_2(x))^2\,dx + \pi\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} (y_1(x))^2\,dx$$

$$= \pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi} (\sin\frac{x}{2})^2\,dx + \pi\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} (\sin x)^2\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\pi^2 - \frac{3\sqrt{3}}{8}\pi \approx 2{,}89$$

Välillä $[0, \frac{2}{3}\pi]$ pyörähtää

käyrä $y_2(x) = \sin\frac{x}{2}$ ja

välillä $[\frac{2}{3}\pi, \pi]$ pyörähtää

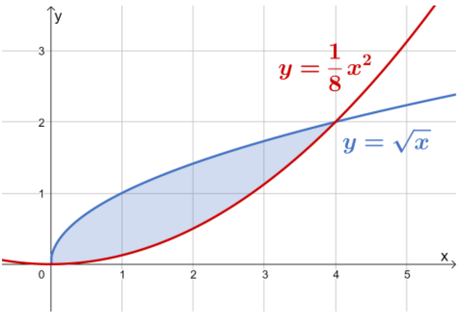
käyrä $y_1(x) = \sin x$.

Vastaus

$\frac{1}{2}\pi^2 - \frac{3\sqrt{3}}{8}\pi \approx 2{,}89$

15.12

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä käyrät $y = \sqrt{x}$ ja $y = \frac{1}{8}x^2$ sekä niiden rajaama alue.



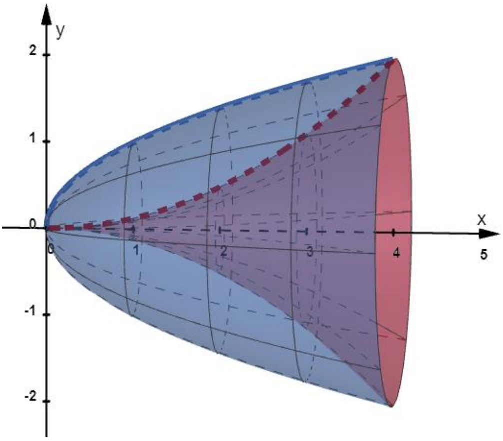
Ratkaistaan integroimisrajoja varten käyrien leikkauskohdat.

$$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = \dfrac{1}{8}x^2 \end{cases}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$x = 0$ tai $x = 4$

Piirretään pyörähdyskappale geometriaohjelmalla.



Käyrien rajaaman alueen pyörähtäessä muodostuu kappale, jonka ulkopinta muodostuu käyrän $y=\sqrt{x}$ ja sisäpinta käyrän $y=\frac{1}{8}x^2$ pyörähtäessä x-akselin ympäri välillä $0 \leq x \leq 4$.

Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

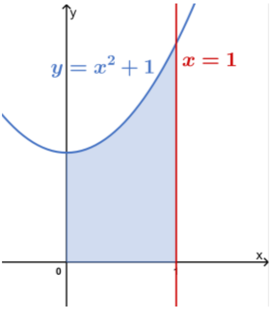
$$
\begin{aligned}
V &= V_{\text{ulko}} - V_{\text{sisä}} \\
&= \pi \int_0^4 \sqrt{x}^{\,2}\,\mathrm{d}x - \pi \int_0^4 \left(\frac{1}{8}x^2\right)^2 \mathrm{d}x \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\
&= \frac{24}{5}\pi \quad (\approx 15{,}08)
\end{aligned}
$$

Vastaus

$\frac{24}{5}\pi$

15.13

Käyrä $y = x^2 + 1$ on ylöspäin aukeava paraabeli.



Pyörähdyskappale muodostuu, kun käyrä $y = x^2 + 1$ pyörähtää x-akselin ympäri välillä $0 \leq x \leq 1$.

Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$V = \pi \int_0^1 (x^2 + 1)^2 \mathrm{d}x$$ Avataan sulut.

$$= \pi \int_0^1 (x^4 + 2x^2 + 1)\mathrm{d}x$$

$$= \pi \Big/_0^1 (\frac{1}{5}x^5 + 2 \cdot \frac{1}{3}x^3 + x)$$

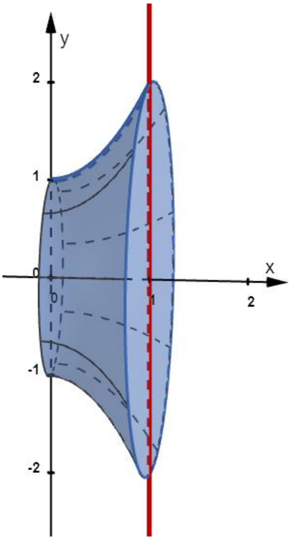
$$= \pi \Big/_0^1 (\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + x)$$

$$= \pi \quad \frac{1}{5} \cdot 1^5 + \frac{2}{3} \cdot 1^3 + 1 - (\frac{1}{5} \cdot 0^5 + \frac{2}{3} \cdot 0^3 + 0)$$

$$= \pi(\frac{1}{5}^{(3} + \frac{2}{3}^{(5} + 1 - 0)$$

$$= \pi(\frac{3}{15} + \frac{10}{15} + 1)$$

$$= \frac{28}{15}\pi$$

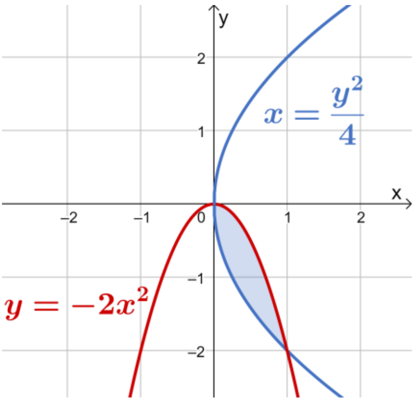


Vastaus

$\frac{28}{15}\pi$

15.14

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä käyrät $x = \frac{y^2}{4}$ ja $y = -2x^2$ sekä niiden rajaama alue.



Ratkaistaan integroimisrajoja varten käyrien leikkauspisteet.

$$\begin{cases} x = \frac{y^2}{4} \\ y = -2x^2 \end{cases}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$x = 0$ ja $y = 0$ tai $x = 1$ ja $y = -2$

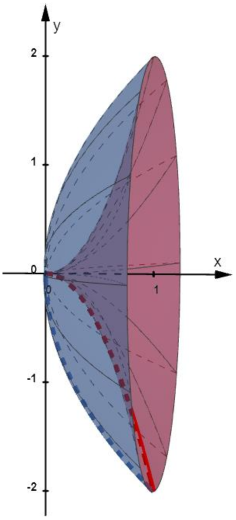
a) Käyrien rajaama alue pyörähtää x-akselin ympäri. Integroidaan muuttujan x suhteen, joten ratkaistaan käyrän $x = \frac{y^2}{4}$ yhtälöstä muuttuja y.

$$x = \frac{y^2}{4}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$\underbrace{y = -\sqrt{4x}}_{x\text{-akselin alapuolella}} \quad \text{tai} \quad \underbrace{y = \sqrt{4x}}_{x\text{-akselin yläpuolella}}$$

Pyörähdyskappaleen ulkopinta muodostuu käyrän $x = \frac{y^2}{4}$ alaosan, eli käyrän $y = -\sqrt{4x}$ pyörähtäessä x-akselin ympäri välillä $0 \leq x \leq 1$.



Pyörähdyskappaleen sisäpinta muodostuu käyrän $y = -2x^2$ pyörähtäessä x-akselin ympäri samalla välillä.

Piirretään pyörähdyskappale geometriaohjelmalla.

Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$V = V_{\text{ulko}} - V_{\text{sisä}}$$

$$= \pi \int_0^1 -\sqrt{4x}\;^{2}\,\mathrm{d}x - \pi \int_0^1 (-2x^2)^2\,\mathrm{d}x$$

Lasketaan CAS-laskimella.

$$= \frac{6}{5}\pi$$

b) Käyrien rajaama alue pyörähtää y-akselin ympäri. Integroidaan muuttujan y suhteen, joten ratkaistaan käyrän $y=-2x^2$ yhtälöstä muuttuja x.

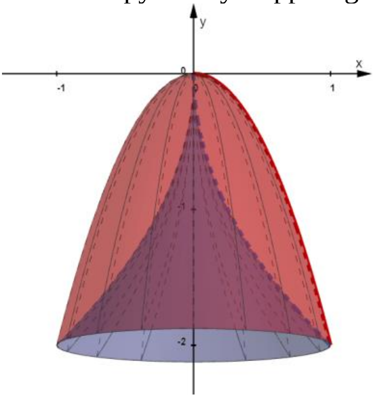
$y=-2x^2$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$\underbrace{x=-\sqrt{\frac{y}{-2}}}_{\substack{y\text{-akselin}\\ \text{vasen puoli}}} \quad \text{tai} \quad \underbrace{x=\sqrt{\frac{y}{-2}}}_{\substack{y\text{-akselin}\\ \text{oikea puoli}}}$$

Pyörähdyskappaleen ulkopinta muodostuu käyrän $y=-2x^2$ oikeanpuoleisen osan, eli käyrän $x=\sqrt{\frac{y}{-2}}$ pyörähtäessä y-akselin ympäri välillä $-2\le y\le 0$.

Pyörähdyskappaleen sisäpinta muodostuu käyrän $x=\frac{y^2}{4}$ pyörähtäessä y-akselin ympäri samalla välillä.

Piirretään pyörähdyskappale geometriaohjelmalla.



Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$V=V_{\text{ulko}}-V_{\text{sisä}}$$

$$=\pi\int_{-2}^{0}\left(\sqrt{\frac{y}{-2}}\right)^2 \mathrm{d}y-\pi\int_{-2}^{0}\left(\frac{y^2}{4}\right)^2 \mathrm{d}y$$

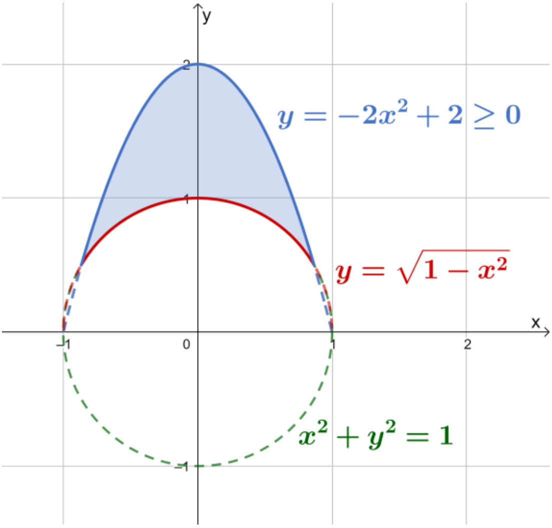
$$=\frac{3}{5}\pi$$

Vastaus

a) $\frac{6}{5}\pi$ **b)** $\frac{3}{5}\pi$

15.15

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä kuva.



Käyrä $y = \sqrt{1 - x^2}$ on ympyrän $x^2 + y^2 = 1$ ylempi puolikas.
Paraabelista $y = -2x^2 + 2$ tutkitaan vain osaa, jossa $y \geq 0$.

Ratkaistaan integroimisrajoja varten käyrien leikkauspisteet.

$$\begin{cases} y = -2x^2 + 2 \\ y = \sqrt{1 - x^2} \end{cases}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

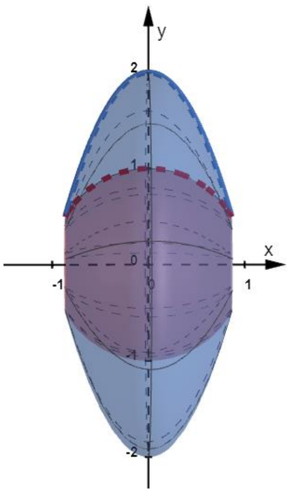
$$x = -1, \quad x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{tai} \quad x = 1$$

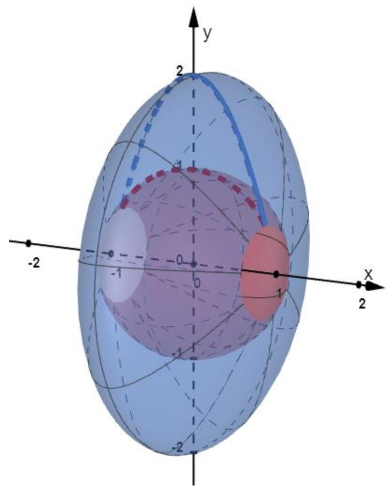
Koska $y = -2x^2 + 2 \geq 0$, niin leikkauskohdat ovat $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ja $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Käyrien rajaama alue muodostaa pyörähdyskappaleen, jonka ulkopinta muodostuu käyrän $y = -2x^2 + 2$ ja sisäpinta käyrän $y = \sqrt{1 - x^2}$

pyörähtäessä x-akselin ympäri välillä $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Piirretään pyörähdyskappale geometriaohjelmalla.





Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$V = V_{\text{ulko}} - V_{\text{sisä}}$$

$$= \pi \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (-2x^2+2)^2 \,dx - \pi \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x}\ ^{2} \,dx \quad \text{Lasketaan CAS-laskimella.}$$

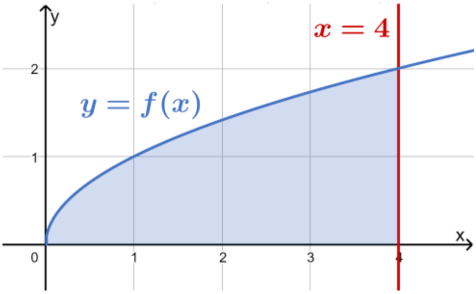
$$= \frac{17\sqrt{3}}{10}\pi \approx 9,3$$

Vastaus

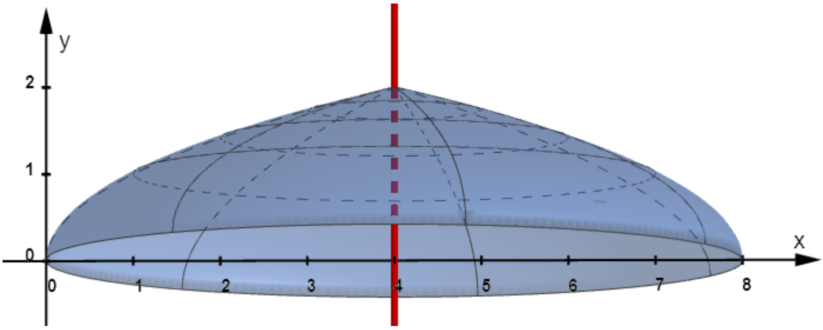
$\frac{17\sqrt{3}}{10}\pi \approx 9,3$

15.16

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä funktion $f(x) = \sqrt{x}$ kuvaaja, suora $x = 4$ ja pyörähtävä alue.



Piirretään pyörähdyskappale geometriaohjelmalla.



f(x) = Jos(0 ≤ x ≤ 2, $\sqrt{x}$)
Pinta(f, 2π, x = 4)

Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ kuvaaja ja suora $x = 4$ leikkaavat pisteessä $(4,\ f(4)) = (4,\ 2)$. Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus integroimalla muuttujan y suhteen. Integroimisrajat ovat $y = 0$ ja $y = 2$.

Poikkileikkausympyrän säde kohdassa y on funktion f kuvaajan pisteen (x, y) etäisyys suorasta $x = 4$ eli $r = |4 - x|$. Koska integroidaan muuttujan y suhteen, on säde r ilmaistava muuttujan y avulla. Ratkaistaan käyrän $y = \sqrt{x}$ yhtälöstä muuttuja x.

$$y = \sqrt{x} \qquad |\,(\ )^2$$
$$x = y^2$$

Siis poikkileikkausympyrän säteen neliö on

$$r^2 = |4 - x|^2 = (4 - x)^2 = (4 - y^2)^2.$$

Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$V = \pi \int_0^2 (4 - y^2)^2 \, \mathrm{d}y$$

Lasketaan CAS-laskimella.

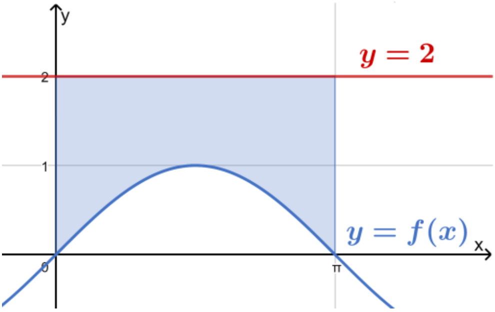
$$= \frac{256}{15}\pi \quad (\approx 53{,}6)$$

Vastaus

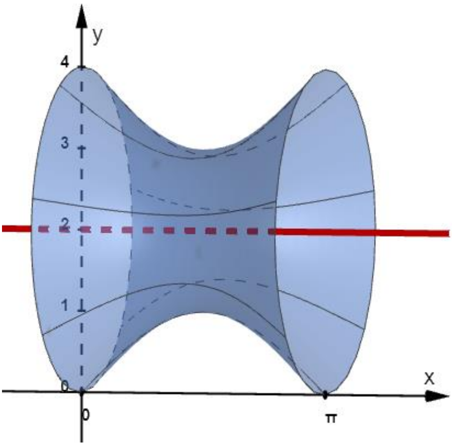
$\frac{256}{15}\pi$

15.17

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä funktion $f(x) = \sin x$ kuvaaja, suora $y = 2$ ja pyörähtävä alue.



Piirretään pyörähdyskappale geometriaohjelmalla.




```
f(x)=Jos(0≤x≤π, sin(x))
Pinta(f,2π,y=2)
```

Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus integroimalla muuttujan x suhteen. Integroimisrajat ovat $x = 0$ ja $x = \pi$.

Poikkileikkausympyrän säde kohdassa x on funktion f kuvaajan pisteen $(x,\ y)$ etäisyys suorasta $y = 2$ eli $r = |2 - y|$.

Poikkileikkausympyrän säteen neliö on

$$r^2 = |2 - y|^2 = (2 - y)^2 = (2 - \sin x)^2.$$

Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$V = \pi \int_0^{\pi} (2 - \sin x)^2 \, dx$$

Lasketaan CAS-laskimella.

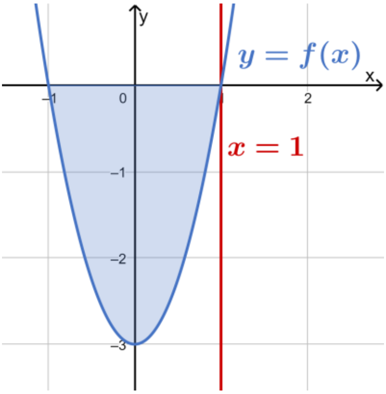
$$= \frac{9}{2}\pi^2 - 8\pi \quad (\approx 19{,}3)$$

Vastaus

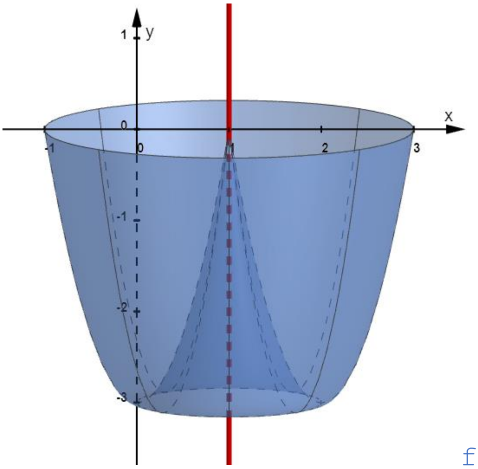
$$\frac{9}{2}\pi^2 - 8\pi$$

15.18

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä funktion $f(x) = 3x^2 - 3$ kuvaaja, suora $x = 1$ ja pyörähtävä alue.



Piirretään pyörähdyskappale geometriaohjelmalla.



`f(x)=Jos(-1 ≤ x ≤ 1, 3x^2 - 3)`

`Pinta(f, 2π, x = 1)`

Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus integroimalla muuttujan y suhteen, joten ratkaistaan käyrän $y = 3x^2 - 3$ yhtälöstä muuttuja x.

$y = 3x^2 - 3$

Ratkaistaan muuttuja x CAS-laskimella.

$\underbrace{x = -\sqrt{\frac{y}{3}+1}}_{\text{Paraabelin vasen puoli}}$ tai $\underbrace{x = \sqrt{\frac{y}{3}+1}}_{\text{Paraabelin oikea puoli}}$

Paraabelin $y = 3x^2 - 3$ huippu sijaitsee kohdassa $y = -3$.

Pyörähdyskappaleen ulkopinta muodostuu käyrän $x = -\sqrt{\frac{y}{3}+1}$ ja

sisäpinta käyrän $x = \sqrt{\frac{y}{3}+1}$ pyörähtäessä suoran $x = 1$ ympäri

välillä $-3 \le y \le 0$.

Poikkileikkausympyrän säde kohdassa y on funktion f kuvaajan pisteen (x, y) etäisyys suorasta $x = 1$ eli $r = |1 - x|$.

Ulkopinnan poikkileikkausympyrän säteen neliö on

$$r_u{}^2 = |1-x|^2 = (1-x)^2 = \left(1-\left(-\sqrt{\frac{y}{3}+1}\right)\right)^2 = \left(1+\sqrt{\frac{y}{3}+1}\right)^2.$$

Sisäpinnan poikkileikkausympyrän säteen neliö on

$$r_s{}^2 = |1-x|^2 = (1-x)^2 = \left(1-\sqrt{\frac{y}{3}+1}\right)^2.$$

Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$\begin{aligned}
V &= V_{\text{ulko}} - V_{\text{sisä}} \\
&= \pi\int_{-3}^{0} r_u{}^2 \mathrm{d}y - \pi\int_{-3}^{0} r_s{}^2 \mathrm{d}y \\
&= \pi\int_{-3}^{0}\left(1+\sqrt{\frac{y}{3}+1}\right)^2 \mathrm{d}y - \pi\int_{-3}^{0}\left(1-\sqrt{\frac{y}{3}+1}\right)^2 \mathrm{d}y \\
&= 8\pi
\end{aligned}$$

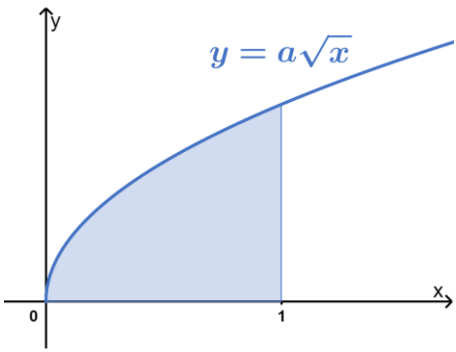
Lasketaan CAS-laskimella.

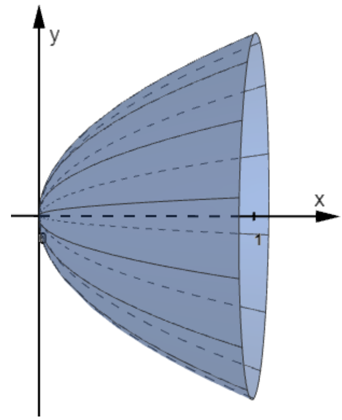
Vastaus

8π

15.19

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä kuvat.





Määritetään pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$V = \pi \int_0^1 (f(x))^2 \, dx$$ Sijoitetaan $f(x) = a\sqrt{x}$.

$$= \pi \int_0^1 a\sqrt{x}\;^{2} \, dx$$ Lasketaan CAS-laskimella.

$$= \frac{1}{2}\pi a^2$$

Tiedetään, että pyörähdyskappaleen tilavuus on 2π. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakio a.

$$V = 2\pi$$ Sijoitetaan $V = \frac{1}{2}\pi a^2$.

$$\frac{1}{2}\pi a^2 = 2\pi$$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$a = -2 \quad \text{tai} \quad a = 2$$

Koska $a > 0$, niin $a = 2$. Siis $f(x) = a\sqrt{x} = 2\sqrt{x}$.

Pyörähdyskappaleen vaipan pinta-alan kaava on

$$A = 2\pi\int_0^1 |f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Derivoidaan funktio $f(x) = 2\sqrt{x}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{D}(2\sqrt{x}) \\ &= \mathrm{D}(2x^{\frac{1}{2}}) \\ &= \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}x^{-\frac{1}{2}} \\ &= x^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$, $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

Lasketaan pyörähdyskappaleen vaipan pinta-ala.

$$\begin{aligned} A &= 2\pi\int_0^1 |f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\pi\int_0^1 |2\sqrt{x}|\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{8\pi}{3}(2\sqrt{2}-1) \quad (\approx 15{,}3) \end{aligned}$$

Sijoitetaan $f(x) = 2\sqrt{x}$

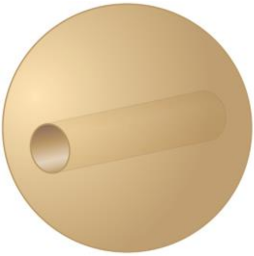
ja $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Lasketaan CAS-laskimella.

Vastaus

$\frac{8\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$

15.20



Sijoitetaan pallo koordinaatistoon niin, että sen keskipiste on origossa.

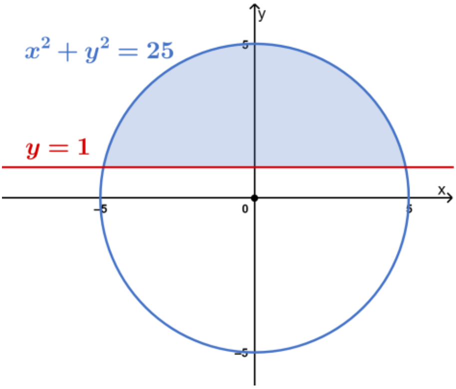
Pallon tilavuus on $V_{\text{pallo}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3$.

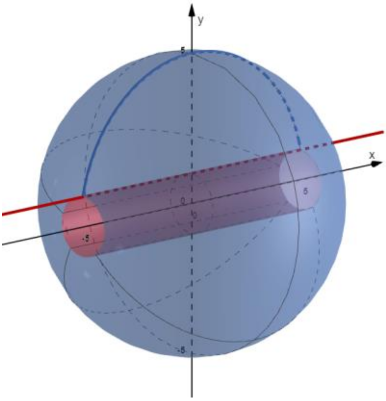
Palloa rajaavan ympyrän yhtälö on $x^2 + y^2 = 25$.

$(x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2$

Reiällinen pallo on pyörähdyskappale, joka muodostuu kun ympyrän ja suoran $y = 1$ x-akselin yläpuolella rajaama alue pyörähtää x-akselin ympäri.

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä kuva.





Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus integroimalla.

Ratkaistaan integroimisrajoja varten ympyrän ja suoran leikkauskohdat.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = 1 \end{cases}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$x = -2\sqrt{6}$ tai $x = 2\sqrt{6}$

Ratkaistaan integrointia varten ympyrän yhtälöstä muuttuja y.

$$x^2 + y^2 = 25$$

Ratkaistaan muuttuja x CAS-laskimella.

$$\underbrace{y = \sqrt{25 - x^2}}_{\text{Ylempi puolisko}} \quad \text{tai} \quad \underbrace{y = -\sqrt{25 - x^2}}_{\text{Alempi puolisko}}$$

Pyörähdyskappaleen ulkopinta muodostuu käyrän $y = \sqrt{25 - x^2}$ ja sisäpinta käyrän $y = 1$ pyörähtäessä x-akselin ympäri välillä $-2\sqrt{6} \leq x \leq 2\sqrt{6}$.

Lasketaan reiällisen pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$\begin{aligned} V_{\text{reikäpallo}} &= V_{\text{ulko}} - V_{\text{sisä}} \\ &= \pi \int_{-2\sqrt{6}}^{2\sqrt{6}} \sqrt{25 - x^2}^{\,2} \, dx - \pi \int_{-2\sqrt{6}}^{2\sqrt{6}} 1^2 \, dx \text{ Lasketaan CAS-laskimella.} \\ &= 64\sqrt{6}\pi \end{aligned}$$

Pallon massa ja tilavuus ovat suoraan verrannolliset.

Lasketaan massan muutos vertaamalla reiällisen pallon tilavuutta reiättömän pallon tilavuuteen.

$$\frac{V_{\text{reikäpallo}}}{V_{\text{pallo}}} = \frac{64\sqrt{6}\pi}{\frac{4}{3}\pi \cdot 5^3} = 0{,}94060... = 94{,}060... \ \%$$

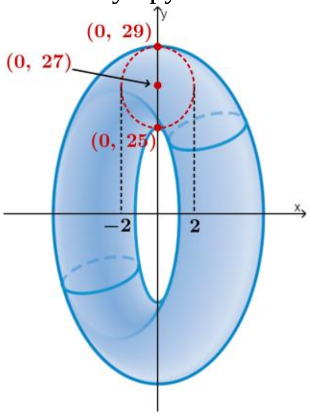
Pallon massa kevenee $100\ \% - 94{,}060...\ \% = 5{,}939...\ \% \approx 5{,}9\ \%$

Vastaus

5,9 %

15.21

a) Sijoitetaan sisärengas koordinaatistoon niin, että sen keskipiste on origossa. Koordinaatiston yksikkönä on senttimetri. Sisärenkaan muotoinen pyörähdyskappale syntyy, kun renkaan poikkileikkausta vastaava ympyrän muotoinen alue pyörähtää x-akselin ympäri.



Rengasta rajaavan ympyrän säde $r = \frac{29-25}{2} = 2$ ja keskipiste on $(0,\ 25+2) = (0,\ 27)$. Muodostetaan ympyrän yhtälö.

$$(x-0)^2 + (y-27)^2 = 2^2 \qquad (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$$

$$x^2 + (y-27)^2 = 4$$

Ratkaistaan integrointia varten ympyrän yhtälöstä muuttuja y.

$$x^2 + (y-27)^2 = 4$$

$$\underbrace{y = 27 + \sqrt{4-x^2}}_{\text{ylempi puoliympyrä}} \quad \text{tai} \quad \underbrace{y = 27 - \sqrt{4-x^2}}_{\text{alempi puoliympyrä}}$$

Pyörähdyskappaleen ulkopinta muodostuu ylemmän puoliympyrän, eli käyrän $y = 27 + \sqrt{4-x^2}$, ja sisäpinta alemman puoliympyrän, eli käyrän $y = 27 - \sqrt{4-x^2}$ pyörähtäessä x-akselin ympäri välillä $-2 \le x \le 2$.

Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

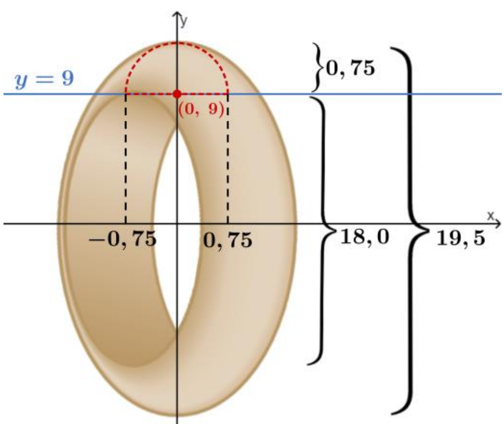
$$
\begin{aligned}
V &= V_{\text{ulko}} - V_{\text{sisä}} \\
&= \pi \int_{-2}^{2} 27 + \sqrt{4 - x^2}\ ^{2}\, dx - \pi \int_{-2}^{2} 27 + \sqrt{4 - x^2}\ ^{2}\, dx \\
&= 2131{,}83\ldots\ (\text{cm}^3)
\end{aligned}
$$

Lasketaan CAS-laskimella.

Sisärenkaan tilavuus on

$$2131{,}83\ldots\ \text{cm}^3 \approx 2130\ \text{cm}^3 = 2{,}13\ \text{dm}^3 = 2{,}13\ \text{L}.$$

b) Sijoitetaan kultasormus koordinaatistoon niin, että sen keskipiste on origossa. Koordinaatiston yksikkönä on millimetri. Sormuksen muotoinen pyörähdyskappale syntyy, kun sen poikkileikkausta vastaava puoliympyrän muotoinen alue pyörähtää x-akselin ympäri.



Sormusta rajaavan ympyrän säde $r = \frac{19{,}5}{2} - \frac{18}{2} = 0{,}75$ ja keskipiste on $(0,\ \frac{18}{2}) = (0,\ 9)$. Muodostetaan ympyrän yhtälö.

$$
\begin{aligned}
(x - 0)^2 + (y - 9)^2 &= 0{,}75^2 \\
x^2 + (y - 9)^2 &= 0{,}75^2
\end{aligned}
$$

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

Ratkaistaan integrointia varten ympyrän yhtälöstä muuttuja y.

$$x^2+(y-9)^2=0{,}75^2$$

$$\underbrace{y=9+\sqrt{0{,}75^2-x^2}}_{\text{ylempi puoliympyrä}} \quad \text{tai} \quad \underbrace{y=9-\sqrt{0{,}75^2-x^2}}_{\text{alempi puoliympyrä}}$$

Pyörähdyskappaleen ulkopinta muodostuu ylemmän puoliympyrän, eli käyrän $9+\sqrt{0{,}75^2-x^2}$, ja sisäpinta suoran $y=9$ pyörähtäessä x-akselin ympäri välillä $-0{,}75\leq x\leq 0{,}75$.

Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= V_{\text{ulko}}-V_{\text{sisä}} \\ &= \pi\int_{-0{,}75}^{0{,}75}\left(9+\sqrt{0{,}75^2-x^2}\right)^2 dx-\pi\int_{-0{,}75}^{0{,}75}9^2\,dx \\ &= 51{,}732\ldots\ (\text{mm}^3) \end{aligned}$$

Lasketaan CAS-laskimella.

Sormuksen tilavuus on $51{,}732\ldots\ \text{mm}^3\approx 51{,}7\ \text{mm}^3$.

Sormuksessa käytetyn kultaseoksen tiheys on $17{,}3\ \text{kg/dm}^3$.

Lasketaan sormuksen massa.

$$\begin{aligned} m &= \rho V \\ &= 17{,}3\ \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}\cdot 51{,}732\ldots\ \text{mm}^3 \\ &= 17{,}3\ \frac{1000\ \text{g}}{(100\ \text{mm})^3}\cdot 51{,}732\ldots\ \text{mm}^3 \\ &= 0{,}8949\ldots\ \text{g}\approx 0{,}89\ \text{g} \end{aligned}$$

Vastaus

a) 2,13 L

b) $51{,}7\ \text{mm}^3$; 0,89 g