10.1

a) $\int \frac{5}{x}\,\mathrm{d}x$

$= \int 5 \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

$= 5\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ $\qquad \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$

$= 5\ln|x| + C$ $\qquad$ Koska $x > 0$, niin $|x| = x$.

$= 5\ln x + C$

b) $\int \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x$

$= \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ $\qquad \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$

$= \frac{1}{2}\ln|x| + C$ $\qquad$ Koska $x > 0$, niin $|x| = x$.

$= \frac{1}{2}\ln x + C$

c) $\int \frac{4}{9x}\,\mathrm{d}x$

$= \int \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

$= \frac{4}{9}\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ $\qquad \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$

$= \frac{4}{9}\ln|x| + C$ $\qquad$ Koska $x > 0$, niin $|x| = x$.

$= \frac{4}{9}\ln x + C$

Vastaus

a) $5\ln x + C$, kun $x > 0$

b) $\frac{1}{2}\ln x + C$, kun $x > 0$

c) $\frac{4}{9}\ln x + C$, kun $x > 0$

10.2

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int (x^2 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2})\mathrm{d}x \\
&= \int x^2\mathrm{d}x + \int \frac{2}{x}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \\
&= \int x^2\mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x + \int x^{-2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}x^3 + 2\ln|x| - x^{-1} + C \qquad \text{Koska } x < 0, \text{ niin } |x| = -x. \\
&= \frac{1}{3}x^3 + 2\ln(-x) - \frac{1}{x} + C
\end{aligned}
$$

Vastaus

$F(x)\frac{1}{3}x^3 + 2\ln(-x) - \frac{1}{x} + C,$ kun $x < 0$

10.3

a) Nimittäjä $x+3>0$, kun $x>0$.

Nimittäjän tulee olla eri suuri kuin nolla.

$$\int \frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)|+C$$

$$= \ln|x+3|+C$$

Koska $x+3>0$, niin $|x+3| = x+3$.

$$= \ln(x+3)+C$$

b) Nimittäjä $3x+1>0$, kun $x>0$.

Nimittäjän tulee olla eri suuri kuin nolla.

Nimittäjän $3x+1$ derivaattafunktio on 3.

$$\int \frac{1}{3x+1}\,\mathrm{d}x$$

Lisätään kertoimeksi $\frac{1}{3}\cdot 3 = 1$.

$$= \frac{1}{3}\int \frac{3}{3x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)|+C$$

$$= \frac{1}{3}\ln|3x+1|+C$$

Koska $3x+1>0$, niin $|3x+1| = 3x+1$.

$$= \frac{1}{3}\ln(3x+1)+C$$

c) Nimittäjä $x^2 + 4 > 0$, kun $x > 0$.

Nimittäjän tulee olla eri suuri kuin nolla.

$$\int \frac{4x}{x^2+4}\,dx$$

Nimittäjän $x^2 + 4$ derivaattafunktio on $2x$.

Kirjoitetaan osoittaja $4x$ muodossa $2 \cdot 2x$.

$$= 2\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$= 2\ln|x^2+4| + C$$

Koska $x^2 + 4 > 0$, niin $|x^2+4| = x^2 + 4$.

$$= 2\ln(x^2+4) + C$$

Vastaus

a) $\ln(x+3) + C$, kun $x > 0$

b) $\frac{1}{3}\ln(3x+1) + C$, kun $x > 0$

c) $2\ln(x^2+4) + C$, kun $x > 0$

10.4

a) Funktio $\dfrac{2x}{x^2+1}$ on muotoa $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$, joten se voidaan integroida. Integroidaan funktio.

Nimittäjä $x^2+1>0$ kaikilla x.

Nimittäjän tulee olla eri suuri kuin nolla.

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \ln|x^2+1|+C$$

$$= \ln(x^2+1)+C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|+C$$

Koska $x^2+1>0$, niin $|x^2+1| = x^2+1$.

b) Funktiota $\dfrac{2}{x^2+1}$ ei voida integroida, sillä osoittajaksi ei saada muodostettua nimittäjän x^2+1 derivaattaa $2x$.

c) Funktio $\dfrac{x}{x^2+1}$ saadaan muotoon $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$, joten se voidaan integroida. Integroidaan funktio.

Nimittäjä $x^2+1>0$ kaikilla x.

Nimittäjän tulee olla eri suuri kuin nolla.

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+1|+C$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|+C$$

Koska $x^2+1>0$, niin $|x^2+1| = x^2+1$.

d) Funktio $\dfrac{2x}{(x^2+1)^2} = 2x(x^2+1)^{-2}$ voidaan integroida yhdistetyn funktion integrointisäännöllä. Integroidaan funktio.

$$\begin{aligned}
&\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x \\
&= \int 2x(x^2+1)^{-2}\mathrm{d}x \qquad \int s'(x)\cdot u(s(x))\mathrm{d}x = U(s(x))+C \\
&= -(x^2+1)^{-1}+C \\
&= -\frac{1}{x^2+1}+C
\end{aligned}$$

Vastaus

a) $\ln(x^2+1)+C$

b) ei voi

c) $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$

d) $-\dfrac{1}{x^2+1}+C$

10.5

Selvitetään funktion f määrittelyjoukko ratkaisemalla nimittäjän nollakohdat.

$$2x-1=0$$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x=\frac{1}{2}$$

Funktio f on määritelty, kun $x\neq\frac{1}{2}$.

Määrittelyjoukko koostuu kahdesta erillisestä välistä: $x<\frac{1}{2}$ ja $x>\frac{1}{2}$.

1) Määritetään integraalifunktio välillä $x<\frac{1}{2}$.

$$f(x)=\frac{1}{2x-1}$$ Integroidaan CAS-laskimella.

$$F(x)=\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$$

Poistetaan itseisarvomerkit.

$$F(x)=\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$$

Kun $x<\frac{1}{2}$, niin $2x-1<0$.

Siis $|2x-1|=-(2x-1)$.

$$=\frac{1}{2}\ln(-(2x-1))+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln(-2x+1)+C$$

Piste $(0,-1)$ kuuluu alueeseen $x<\frac{1}{2}$.

Määritetään vakio C.

$$F(0)=-1$$

$$\frac{1}{2}\ln(-2\cdot 0+1)+C=-1$$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$C=-1$$

Siis $F(x)=\frac{1}{2}\ln(-2x+1)-1$, kun $x<\frac{1}{2}$.

2) Määritetään integraalifunktio välillä $x > \frac{1}{2}$.

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln|2x-1| + D$$

Kun $x > \frac{1}{2}$, niin $2x-1 > 0$.

Siis $|2x-1| = 2x-1$.

$$= \frac{1}{2}\ln(2x-1) + D$$

Piste $(1,\ 4)$ kuuluu alueeseen $x > \frac{1}{2}$.

Määritetään vakio D.

$$F(1) = 4$$

$$\frac{1}{2}\ln(2\cdot 1-1) + D = 4$$

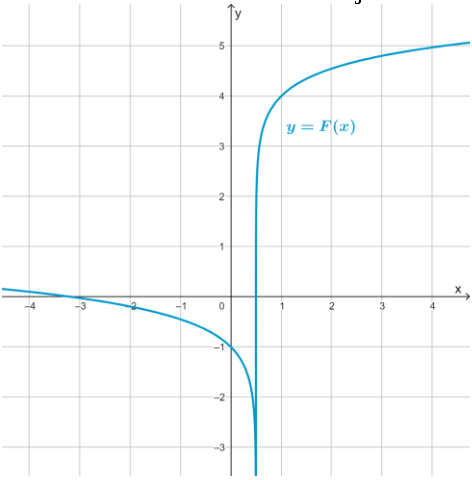
Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$D = 4$$

Siis $F(x) = \frac{1}{2}\ln(2x-1) + 4$, kun $x > \frac{1}{2}$.

Integraalifunktio on $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln(-2x+1) - 1, & \text{kun } x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\ln(2x-1) + 4, & \text{kun } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$

Piirretään funktion F kuvaaja.



Vastaus

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\ln(-2x+1)-1, & \text{kun } x<\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\ln(2x-1)+4, & \text{kun } x>\frac{1}{2}\end{cases}$$

10.6

Funktio $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ on määritelty, kun $x < 0.$ Määritetään funktion f integraalifunktio.

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int (1 + \frac{1}{x})\mathrm{d}x && \text{Integroidaan CAS-laskimella.} \\
&= x + \ln|x| + C && \text{Kun } x < 0, \text{ niin } |x| = -x. \\
&= \ln(-x) + x + C
\end{aligned}
$$

Suora $y = 2$ on vaakasuora, joten myös funktion F tangentti sivuamispisteessä on vaakasuora. Tällöin $F'(x) = 0.$

Ratkaistaan sivuamispisteen x-koordinaatti.

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= 0 && F'(x) = f(x) \\
1 + \frac{1}{x} &= 0 && \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\
x &= -1
\end{aligned}
$$

Suoran $y = 2$ ja funktion F sivuamispisteen y-koordinaatti on $2,$ joten funktio F kulkee pisteen $(-1,\ 2)$ kautta. Määritetään vakio $C.$

$$
\begin{aligned}
F(-1) &= 2 \\
\ln(-(-1)) + (-1) + C &= 2 && \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\
C &= 3
\end{aligned}
$$

Integraalifunktio on siis $F(x) = \ln(-x) + x + 3,$ kun $x < 0.$

Vastaus
$F(x) = \ln(-x) + x + 3,$ kun $x < 0$

10.7

a) Nimittäjä $2x-6>0$, kun $x>3$.

$$\int \frac{dx}{2x-6}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2}{2x-6}dx$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+C$$

$$= \frac{1}{2}\ln|2x-6|+C$$

Koska $2x-6>0$, niin $|2x-6| = 2x-6$.

$$= \frac{1}{2}\ln(2x-6)+C$$

b) Nimittäjä $(2x-6)^3>0$, kun $x>3$.

$$\int \frac{dx}{(2x-6)^3}$$

$$= \frac{1}{2}\int 2(2x-6)^{-3}dx$$

$$\int s'(x)\cdot u(s(x))dx = U(s(x))+C$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}(2x-6)^{-2}\right)+C$$

$$= -\frac{1}{4(2x-6)^2}+C$$

c) Nimittäjä $\sqrt{2x-6}>0$, kun $x>3$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-6}}$$

$$= \int \frac{1}{(2x-6)^{\frac{1}{2}}}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int 2(2x-6)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$\int s'(x)\cdot u(s(x))dx = U(s(x))+C$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\cdot \cancel{2}(2x-6)^{\frac{1}{2}}+C$$

$$= \sqrt{2x-6}+C$$

Vastaus

a) $\frac{1}{2}\ln(2x-6)+C$, kun $x>3$ **b)** $-\frac{1}{4(2x-6)^2}+C$, kun $x>3$

c) $\sqrt{2x-6}+C$, kun $x>3$

10.8

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{5x+1}$ $\qquad$ $5x+1>0,\ \text{kun}\ \ 0\le x\le 1$

$$= \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{5}{5x+1}\,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)|+C$$

$$= \frac{1}{5}\Big/_{0}^{1} \ln|5x+1|$$

$$= \frac{1}{5}(\ln|5\cdot 1+1| - \ln|5\cdot 0+1|)$$

$$= \frac{1}{5}(\ln 6 - \underbrace{\ln 1}_{0})$$

$$= \frac{\ln 6}{5}$$

b) $\displaystyle\int_1^0 \frac{x^2}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ $x^3+1>0,\ \text{kun}\ \ 0\le x\le 1$

$$= \frac{1}{3}\int_1^0 \frac{3x^2}{x^3+1}\,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)|+C$$

$$= \frac{1}{3}\Big/_{1}^{0} \ln|x^3+1|$$

$$= \frac{1}{3}(\ln|0^3+1| - \ln|1^3+1|)$$

$$= \frac{1}{3}(\underbrace{\ln 1}_{0} - \ln 2)$$

$$= -\frac{\ln 2}{3}$$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

$e^x + 1 > 0, \quad \text{kun} \quad 0 \le x \le 1$

$\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$

$$= \Big/_0^1 \ln\left|e^x + 1\right|$$

$$= \ln\left|e^1 + 1\right| - \ln\left|e^0 + 1\right|$$

$$= \ln(e+1) - \ln 2$$

$$= \ln\frac{e+1}{2}$$

Vastaus

a) $\dfrac{\ln 6}{5}$

b) $-\dfrac{\ln 2}{3}$

c) $\ln\dfrac{e+1}{2}$

10.9

a) Nimittäjä $\cos x > 0$, kun $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

$$\int \frac{-2\sin x}{\cos x}\,dx$$

$$= 2\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$= 2\ln|\cos x| + C$$

Koska $\cos x > 0$, niin $|\cos x| = \cos x$.

$$= 2\ln(\cos x) + C$$

b) Nimittäjä $2\cos x > 0$, kun $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

$$\int \frac{3\sin x}{2\cos x}\,dx$$

$$= \int \frac{3}{2} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

$$= -\frac{3}{2}\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$= -\frac{3}{2}\ln|\cos x| + C$$

Koska $\cos x > 0$, niin $|\cos x| = \cos x$.

$$= -\frac{3}{2}\ln(\cos x) + C$$

c) Nimittäjä $6\sin x > 0$, kun $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

$$\int \frac{\cos x}{6\sin x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1}{6} \cdot \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$$

$$= \frac{1}{6}\ln|\sin x| + C$$

Koska $\sin x > 0$, niin $|\sin x| = \sin x$.

$$= \frac{1}{6}\ln(\sin x) + C$$

Vastaus

a) $2\ln(\cos x) + C$, kun $0 < x < \frac{\pi}{2}$

b) $-\frac{3}{2}\ln(\cos x) + C$, kun $0 < x < \frac{\pi}{2}$

c) $\frac{1}{6}\ln(\sin x) + C$, kun $0 < x < \frac{\pi}{2}$

10.10

Nimittäjä $5\cos x > 0$, kun $0 < x < \frac{\pi}{4}$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin x}{5\cos x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{5}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{2}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$$

$$= -\frac{2}{5}\Big/_0^{\frac{\pi}{4}} \ln|\cos x|$$

$$= -\frac{2}{5}\left(\ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right| - \ln|\cos 0|\right)$$

$$= -\frac{2}{5}\left(\ln\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| - \underbrace{\ln|1|}_{0}\right)$$

$$= -\frac{2}{5}\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vastausta voidaan sieventää myös vielä pidemmälle:

$$= -\frac{2}{5}\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= -\frac{2}{5}\ln\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{2}{5}\ln 2^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\ln 2$$

$$= \frac{1}{5}\ln 2$$

Vastaus

$$-\frac{2}{5}\ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{5}\ln 2$$

10.11

a) $\int \frac{1}{3x}\,\mathrm{d}x$

$= \int \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ $\qquad \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$

$= \frac{1}{3}\ln|x| + C$ $\qquad$ Koska $x < 0$, niin $|x| = -x$.

$= \frac{1}{3}\ln(-x) + C$

b) $\int -\frac{3}{x}\,\mathrm{d}x$

$= \int -3\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

$= -3\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ $\qquad \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$

$= -3\ln|x| + C$ $\qquad$ Koska $x < 0$, niin $|x| = -x$.

$= -3\ln(-x) + C$

c) $\int \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$

$= \int x^{-3}\mathrm{d}x$ $\qquad \int x^n\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$

$= -\frac{1}{2}x^{-2} + C$

$= -\frac{1}{2x^2} + C$

Vastaus

a) $\frac{1}{3}\ln(-x) + C$, kun $x < 0$

b) $-3\ln(-x) + C$, kun $x < 0$

c) $-\frac{1}{2x^2} + C$, kun $x < 0$

10.12

a) Nimittäjä $(x-1)^2 > 0$, kun $x > 1$.

Nimittäjän tulee olla eri suuri kuin nolla.

$$\int \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x$$

$$= \int (x-1)^{-2}\mathrm{d}x$$

$$\int s'(x)\cdot u(s(x))\mathrm{d}x = U(s(x)) + C$$

$$= -(x-1)^{-1} + C$$

$$= -\frac{1}{x-1} + C$$

b) Nimittäjä $x^3 - 1 > 0$, kun $x > 1$.

Nimittäjän tulee olla eri suuri kuin nolla.

Nimittäjän $x^3 + 1$ derivaattafunktio on $3x^2$.

$$\int \frac{x^2}{x^3-1}\mathrm{d}x$$

Lisätään kertoimeksi $\frac{1}{3}\cdot 3 = 1$.

$$= \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3-1}\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x^3-1| + C$$

Koska $x^3 - 1 > 0$, niin $|x^3-1| = x^3 - 1$.

$$= \frac{1}{3}\ln(x^3-1) + C$$

c)

Nimittäjä $1-x<0$, kun $x>1$.

Nimittäjän tulee olla eri suuri kuin nolla.

$$\int \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

Nimittäjän $1-x$ derivaattafunktio on -1.

Lisätään kertoimeksi $(-1)\cdot(-1)=1$.

$$= -\int \frac{-1}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$$

$$= -\ln|1-x| + C$$

Koska $1-x<0$, niin $|1-x| = -(1-x) = x-1$.

$$= -\ln(x-1) + C$$

Vastaus

a) $-\dfrac{1}{x-1}+C$, kun $x>1$

b) $\dfrac{1}{3}\ln(x^3-1)+C$, kun $x>1$

c) $-\ln(x-1)+C$, kun $x>1$

10.13

a) Määritetään funktion $f(x) = x - \frac{1}{x}$ integraalifunktiot, kun $x > 0$.

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int (x - \frac{1}{x})\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}x^2 - \ln|x| + C \\
&= \frac{1}{2}x^2 - \ln x + C
\end{aligned}
$$

$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$

Koska $x > 0$, niin

$|x| = x$.

Määritetään vakio C.

$$
\begin{aligned}
F(1) &= 2 \\
\frac{1}{2} \cdot 1^2 - \underbrace{\ln 1}_{0} + C &= 2 \\
\frac{1}{2} + C &= 2 \quad \left| -\frac{1}{2} \right. \\
C &= \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

Siis $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x + \frac{3}{2}$, kun $x > 0$.

b) Määritetään funktion $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ integraalifunktiot, kun $x > 0$.

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int (x^2 + \frac{1}{x^2})\,\mathrm{d}x \\
&= \int (x^2 + x^{-2})\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}x^3 - x^{-1} + C \\
&= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{x} + C
\end{aligned}
$$

$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$

Määritetään vakio C.

$$
\begin{aligned}
F(1) &= 2 \\
\frac{1}{3}\cdot 1^2 - \frac{1}{1} + C &= 2 \\
-\frac{2}{3} + C &= 2 \qquad \mid +\frac{2}{3} \\
C &= \frac{8}{3}
\end{aligned}
$$

Siis $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{x} + \frac{8}{3}$, kun $x > 0$.

Vastaus

a) $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x + \frac{3}{2}$, kun $x > 0$

b) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{x} + \frac{8}{3}$, kun $x > 0$

10.14

Funktio $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ on kaikkialla määritelty, sillä nimittäjä $x^2+1>0$ kaikilla muuttujan x arvoilla. Määritetään funktion f integraalifunktiot.

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1}$$

Integroidaan CAS-laskimella.

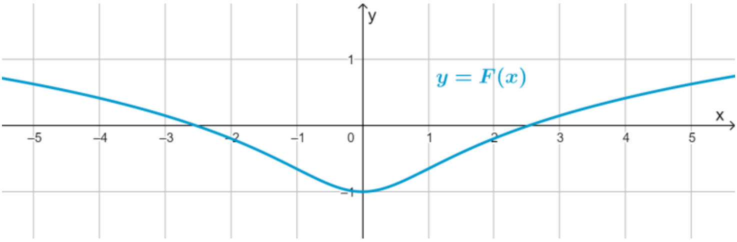
$$F(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$$

Integraalifunktio kulkee pisteen $(0,-1)$ kautta, joten $F(0)=-1$. Määritetään vakio C.

$$\begin{aligned} F(0)&=-1 \\ \frac{1}{2}\ln(0^2+1)+C&=-1 \\ C&=-1 \end{aligned}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

Siis $F(x)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)-1$. Piirretään funktion F kuvaaja.



Vastaus

$$F(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-1$$

10.15

a) Nimittäjä $3x+3>0$, kun $x>-1$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{3x+3}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{3}{3x+3}\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln|f(x)|+C$$

$$= \frac{1}{3}\ln|3x+3|+C$$

Koska $3x+3>0$, niin $|3x+3| = 3x+3$.

$$= \frac{1}{3}\ln(3x+3)+C$$

b) Nimittäjä $(3x+3)^2>0$, kun $x>-1$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(3x+3)^2}$$

$$= \frac{1}{3}\int 3(3x+3)^{-2}\mathrm{d}x$$

$$\int s'(x)\cdot u(s(x))\mathrm{d}x = U(s(x))+C$$

$$= \frac{1}{3}\cdot(-(3x+3)^{-1})+C$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3x+3}+C$$

$$= -\frac{1}{9x+9}+C$$

c) Nimittäjä $\sqrt{3x+3}>0$, kun $x>-1$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x+3}}$$

$$= \int \frac{1}{(3x+3)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}\int 3(3x+3)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$

$$\int s'(x)\cdot u(s(x))\mathrm{d}x = U(s(x))+C$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 2(3x+3)^{\frac{1}{2}}+C$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{3x+3}+C$$

Vastaus

a) $\frac{1}{3}\ln(3x+3)+C, \quad \text{kun} \quad x>-1$

b) $-\frac{1}{9x+9}+C, \quad \text{kun} \quad x>-1$

c) $\frac{2}{3}\sqrt{3x+3}+C, \quad \text{kun} \quad x>-1$

10.16

a) Tarkistetaan yhtälön $\dfrac{4}{4-x^2}=\dfrac{1}{2+x}+\dfrac{1}{2-x}$ määrittelyehto.

Yhtälön vasen puoli on määritelty, kun $4-x^2 \neq 0$ eli kun $x^2 \neq 4$.

$$
\begin{aligned}
x^2 &= 4 \qquad \mid \sqrt{} \\
x &= \pm\sqrt{4} \\
x &= \pm 2
\end{aligned}
$$

Siis yhtälön vasen puoli on määritelty, kun $x \neq \pm 2$.

Yhtälön oikea puoli on määritelty, kun $2+x \neq 0$ eli $x \neq -2$ ja kun $2-x \neq 0$ eli $x \neq 2$. Siis yhtälön oikea puoli on määritelty myös, kun $x \neq \pm 2$.

Sievennetään yhtälön vasen puoli laventamalla murtolausekkeet samannimisiksi.

$$
\begin{aligned}
{}^{2-x)}\frac{1}{2+x} + {}^{2+x)}\frac{1}{2-x} &= \frac{2-x}{(2-x)(2+x)} + \frac{2+x}{(2-x)(2+x)} \\
&= \frac{2-x+2+x}{(2-x)(2+x)} \\
&= \frac{4}{4-x^2}
\end{aligned}
$$

Siis yhtälö $\dfrac{4}{4-x^2}=\dfrac{1}{2+x}+\dfrac{1}{2-x}$ on voimassa kaikilla $x \neq \pm 2$.

b)

Nimittäjä $2+x>0$, kun $-1<x<1$.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{2+x}\,dx$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$= \mathop{/}_{-1}^{1} \ln|2+x|$$

$$= \ln|2+1| - \ln|2+(-1)|$$

$$= \ln|3| - \underset{0}{\ln|1|}$$

$$= \ln 3$$

c) Hyödynnetään integraalin laskemiseksi a-kohdan tietoa, että

$$\frac{4}{4-x^2} = \frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x}.$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{4-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \frac{4}{4-x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x}\right)dx$$

Kohdan b perusteella

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{2+x}\,dx = \ln 3.$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int_{-1}^{1} \frac{1}{2+x}\,dx - \int_{-1}^{1} \frac{-1}{2-x}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln 3 - \mathop{/}_{-1}^{1} \ln|2-x|\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln 3 - (\ln|2-1| - \ln|2-(-1)|)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln 3 - (\underset{0}{\ln|1|} - \ln|3|)\right)$$

$$= \frac{1}{4}(\ln 3 + \ln 3)$$

$$= \frac{1}{2}\ln 3$$

Vastaus

a) ks. ratkaisu **b)** $\ln 3$ **c)** $\frac{1}{2}\ln 3$

10.17

a) Nimittäjä $\sin x > 0$, kun $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

Koska $\sin x > 0$, niin $|\sin x| = \sin x$.

$$= \ln|\sin x| + C$$

$$= \ln(\sin x) + C$$

b) Nimittäjä $4\cos x > 0$, kun $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

$$\int \frac{\sin x}{4\cos x}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

Koska $\cos x > 0$, niin $|\cos x| = \cos x$.

$$= -\frac{1}{4}\ln|\cos x| + C$$

$$= -\frac{1}{4}\ln(\cos x) + C$$

c) Nimittäjä $\sin^2 x > 0$, kun $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

$$\int \frac{2\cos x}{\sin^2 x}\,dx$$

$$= 2\int \frac{\cos x}{(\sin x)^2}\,dx$$

$$= 2\int \cos x(\sin x)^{-2}\,dx$$

$$\int s'(x) \cdot u(s(x))dx = U(s(x)) + C$$

$$= 2 \cdot (-\sin x)^{-1} + C$$

$$= -\frac{2}{\sin x} + C$$

Vastaus

a) $\ln(\sin x) + C$, kun $0 < x < \frac{\pi}{2}$ **b)** $-\frac{1}{4}\ln(\cos x) + C$, kun $0 < x < \frac{\pi}{2}$

c) $-\frac{2}{\sin x} + C$, kun $0 < x < \frac{\pi}{2}$

10.18

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{x-1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$x > 0,\ \text{kun}\ 1 \leq x \leq \mathrm{e}$

$$= \int_1^{\mathrm{e}} \left(\frac{x}{x} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int_1^{\mathrm{e}} \left(1 - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$$

$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$

a)

$$= \Big/_{0}^{1} (x - \ln|x|)$$

$$= \mathrm{e} - \underbrace{\ln|\mathrm{e}|}_{=1} - (1 - \underbrace{\ln|1|}_{=0})$$

$$= \mathrm{e} - 2$$

b) $$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 2}\,\mathrm{d}x$$

$\mathrm{e}^x + 2 > 0,\ \text{kun}\ 0 \leq x \leq 1$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$

$$= \Big/_{0}^{1} \ln|\mathrm{e}^x + 2|$$

$$= \ln|\mathrm{e}^1 + 2| - \ln\underbrace{|\mathrm{e}^0 + 2|}_{=3}$$

$$= \ln(\mathrm{e} + 2) - \ln 3$$

$$= \ln\frac{\mathrm{e} + 2}{3}$$

Vastauksen voi myös sieventää muotoon

$$= \ln(\mathrm{e} + 2) - \ln 3.$$

c)

$$\int_0^1 \frac{e^x+2}{e^x}\,dx \qquad e^x > 0, \text{ kun } 1 \le x \le e$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{e^x}{e^x} + \frac{2}{e^x}\right) dx$$

$$= \int_0^1 (1+2e^{-x})\,dx$$

$$= \int_0^1 1\,dx - 2\int_0^1 -e^{-x} \qquad \int s'(x)\cdot u(s(x))dx = U(s(x)) + C$$

$$= \mathop{/}_0^1 x - 2 \mathop{/}_0^1 e^{-x}$$

$$= 1 - 0 - 2(e^{-1} - \underbrace{e^{-0}}_{=1})$$

$$= 1 - 2e^{-1} + 2$$

$$= 3 - \frac{2}{e}$$

Vastaus

a) $e - 2$

b) $\ln \dfrac{e+2}{3} = \ln(e+2) - \ln 3$

c) $3 - \dfrac{2}{e}$

10.19

a) Nimittäjä $x\ln x > 0$, kun $x > 1$.

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$$

$$= \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx$$

$f(x) = \ln x \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$

Koska $\ln x > 0$, niin

$|\ln x| = \ln x.$

$$= \ln|\ln x| + C$$

$$= \ln(\ln x) + C$$

b) Nimittäjä $x > 0$.

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx$$

$s(x) = \ln x \qquad s'(x) = \frac{1}{x}$

$u(x) = x \qquad U(x) = \frac{1}{2}x^2$

$\int s'(x)\cdot u(s(x))\,dx = U(s(x)) + C$

$$= \int \frac{1}{x}\ln x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$$

Vastaus

a) $\ln(\ln x) + C$, kun $x > 1$

b) $\frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$, kun $x > 0$

10.20

a) Selvitetään funktion f määrittelyjoukko ratkaisemalla nimittäjän nollakohdat.

$$e^{2x}-1=0 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$x=0$$

Funktio f on määritelty, kun $x \neq 0$.
Määrittelyjoukko koostuu kahdesta erillisestä välistä: $x<0$ ja $x>0$.

1) Määritetään integraalifunktio välillä $x<0$.

$$f(x)=\frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1} \qquad \text{Integroidaan CAS-laskimella.}$$
$$F(x)=\ln\left|e^{2x}-1\right|+D$$

Poistetaan itseisarvomerkit.

$$F(x)=\ln\left|e^{2x}-1\right|+D$$

Kun $x<0$, niin $e^{2x}-1<0$.
Siis $\left|e^{2x}-1\right| \qquad (e^{2x} \quad 1)$.

$$=\ln(-(e^{2x}-1))+D$$
$$=\ln(1-e^{2x})+D$$

Siis $F(x)=\ln(1-e^{2x})+D$, kun $x<0$.

2) Määritetään integraalifunktio välillä $x>0$.

$$F(x)=\ln\left|e^{2x}-1\right|+C$$

Kun $x>0$, niin $e^{2x}-1>0$.
Siis $\left|e^{2x}-1\right|=e^{2x}-1$.

$$=\ln(e^{2x}-1)+C$$

Piste $(\ln 2,\ 0)$ kuuluu alueeseen $x>0$.

Määritetään vakio C.

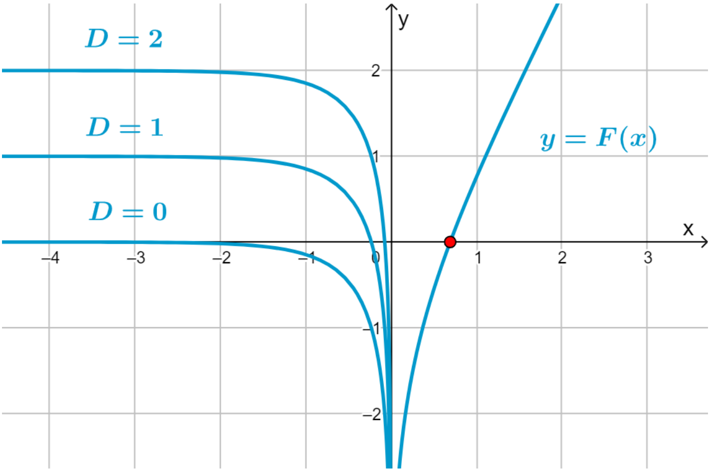
$$\begin{aligned} F(\ln 2) &= 0 \\ \ln(e^{2\cdot\ln 2} - 1) + C &= 0 \\ C &= -\ln 3 \end{aligned}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

Siis $F(x) = \ln(e^{2x} - 1) - \ln 3$, kun $x > 0$.

Integraalifunktio on $F(x) = \begin{cases} \ln(1 - e^{2x}) + D, & \text{kun } x < 0 \\ \ln(e^{2x} - 1) - \ln 3, & \text{kun } x > 0. \end{cases}$

b) Piirretään geometriaohjelmalla funktioparven F kuvaaja hyödyntämällä liukusäädintä, jolla vakion D arvoa voidaan muuttaa.



Vastaus

a) $F(x) = \begin{cases} \ln(1 - e^{2x}) + D, & \text{kun } x < 0 \\ \ln(e^{2x} - 1) - \ln 3, & \text{kun } x > 0 \end{cases}$

b) ks. ratkaisu

10.21

Olkoon funktion $f(x) = \dfrac{1}{x}$ integraalifunktio $F(x)$, kun $x > 0$, ja funktion $g(x) = -x$ integraalifunktio $G(x)$.

Oletetaan, että integraalifunktioiden kuvaajat leikkaavat toisensa kohdassa $x_0 > 0$.

Kuvaajat leikkaavat toisensa kohtisuorassa, jos leikkauskohtaan funktioille piirretyt tangentit ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa eli niiden kulmakertoimien $k_1 = F'(x_0)$ ja $k_2 = G'(x_0)$ tulo on -1. Tutkitaan kulmakertoimien tuloa.

$$k_1 k_2 = F'(x_0)G'(x_0) = f(x_0)g(x_0) = \frac{1}{x_0} \cdot (-x_0) = -1$$

Koska leikkauskohdassa funktioiden tangenttien kulmakertoimien tulo on -1, funktioiden kuvaajat leikkaavat toisensa kohtisuorasti. $\square$

10.22

Koska funktiot $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ ja x ovat yhtä suuret kaikilla määrittelyjoukkoon kuuluvilla muuttujan x arvoilla, niin myös niiden integraalifunktiot ovat yhtä suuret kaikilla määrittelyjoukkoon kuuluvilla muuttujan x arvoilla.

Ratkaistaan funktion $f(x)$ lauseke.

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = x$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$$

$$\ln|f(x)| = \frac{1}{2}x^2 + D$$

Koska $f(x) > 0$, niin $|f(x)| = f(x)$.

$$\ln f(x) = \frac{1}{2}x^2 + D$$

$$a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a b$$

$$f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2 + D}$$

$$f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} \cdot \mathrm{e}^D$$

Merkitään $C = \mathrm{e}^D$.

$$f(x) = C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}$$

Ratkaistaan vakio C ehdon $f(0) = 2$ avulla.

$$f(0) = 2$$

$$C \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\cdot 0^2}}_{=1} = 2$$

$$C = 2$$

Ehdot täyttävä funktio on siis $f(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}$.

Vastaus

$f(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}$

10.23

Koska populaation suuruus $f(x) > 0$ ja sen kasvunopeus $f'(x)$ ovat suoraan verrannollisia, niiden osamäärä on vakio k. Koska $\frac{f'(x)}{f(x)}$ ja k ovat yhtä suuret kaikilla $x \geq 0$, myös niiden integraalit ovat yhtä suuret kaikilla $x \geq 0$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan funktion $f(x)$ lauseke.

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = k$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \mathrm{d}x = \int k \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$$

Koska $f(x) > 0$, niin $|f(x)| = f(x)$.

$$\ln|f(x)| = kx + C$$

$$\ln f(x) = kx + C$$

$$a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a b$$

$$f(x) = \mathrm{e}^{kx+C}$$

On osoitettu, että funktio f on eksponenttifunktio. □