MAA6 - Derivaatta

Tehtävien ratkaisut

3. syyskuuta 2021

Tehtävä 1

Monivalinnalla toteutettu, eli pisteytystä ei ole yksittäisen tehtävän sisällä jaoteltu.

Tehtävä 1.1 (3p).

Funktion $f(x) = \frac{x^2-9}{3x-9}$ nollakohdat:
Ratkaistaan ensiksi määrittelyehdot rationaalifunktiolle, eli nimittäjän nollakohdat:

$$3x - 9 = 0 \qquad || + 9$$

$$3x = 9 \qquad || : 3$$

$$x = 3 \qquad || \text{ Eli } x \neq 3$$

Rationaalifunktion nollakohdat saadaan ratkaisemalla tässä tilanteessa osoittajan nollakohdat:

$$x^2 - 9 = 0 \quad || + 9$$

$$x^2 = 9 \quad || \sqrt{}$$

$$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

Huomioiden määrittelyehto ($x \neq 3$), rationaalifunktion nollakohtia on yksi kappale, ja se on $x = -3$ (3p).

Tehtävä 1.2 $(3p)$.

Funktion $f(x) = \frac{x^2-3x}{x^2-9}$ määrittelyehto:

Määrittelyehdot rationaalifunktiolle ovat nimittäjän nollakohdat:

$$x^2 - 9 = 0 \qquad || + 9$$

$$x^2 = 9 \qquad ||\sqrt{}$$

$$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

Funktion $f(x) = \frac{x^2-3x}{x^2-9}$ määrittelyehdot ovat siis $x \neq 3$ ja $x \neq -3$,

toisin sanoen $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ $(3p)$.

Tehtävä 1.3 $(3p)$

Funktion $f(x) = \frac{x^2-3x}{x^2-9}$ arvot ovat negatiivisia:

Ratkaistaan ensiksi määrittelyehdot rationaalifunktion nimittäjästä. Nämä ratkaistiin edellä kohdassa 1.2, eli $x \neq 3$ ja $x \neq -3$.

Ratkaistaan funktion nollakohdat, jotka saadaan osoittajan nollakohdista:

$$x^2 - 3x = 0 \qquad || \text{ Yhteinen tekijä x}$$

$$x(x-3) = 0 \qquad ||\textbf{x=0} \text{ on eräs ratkaisu, tarkastellaan } x-3 \text{ osaa}$$

$$x - 3 = 0 \qquad || + 3$$

$$x = 3 \qquad || \text{ Määrittelyehdon mukaisesti, tämä nollakohta ei ole määritetty}$$

Funktiolla on yksi nollakohta $x = 0$, ja kaksi määrittelyehtoa $x \neq 3$ ja $x \neq -3$. Funktion arvot vaihtavat voivat vaihtaa merkkiä näiden kohdilla, joten ratkaistaan näiden ympäriltä arvoja.

Esimerkiksi:

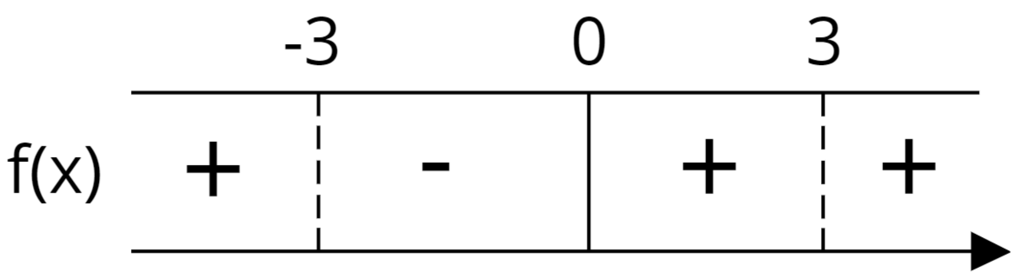
$$f(-4) = \frac{(-4)^2 - 3 \times (-4)}{(-4)^2 - 9} = 4 > 0$$

$$f(-1) = \frac{(-1)^2 - 3 \times (-1)}{(-1)^2 - 9} = -\frac{1}{2} < 0$$

$$f(1) = \frac{1^2 - 3 \times 1}{1^2 - 9} = \frac{1}{4} > 0$$

$$f(4) = \frac{4^2 - 3 \times 4}{4^2 - 9} = \frac{4}{7} > 0$$

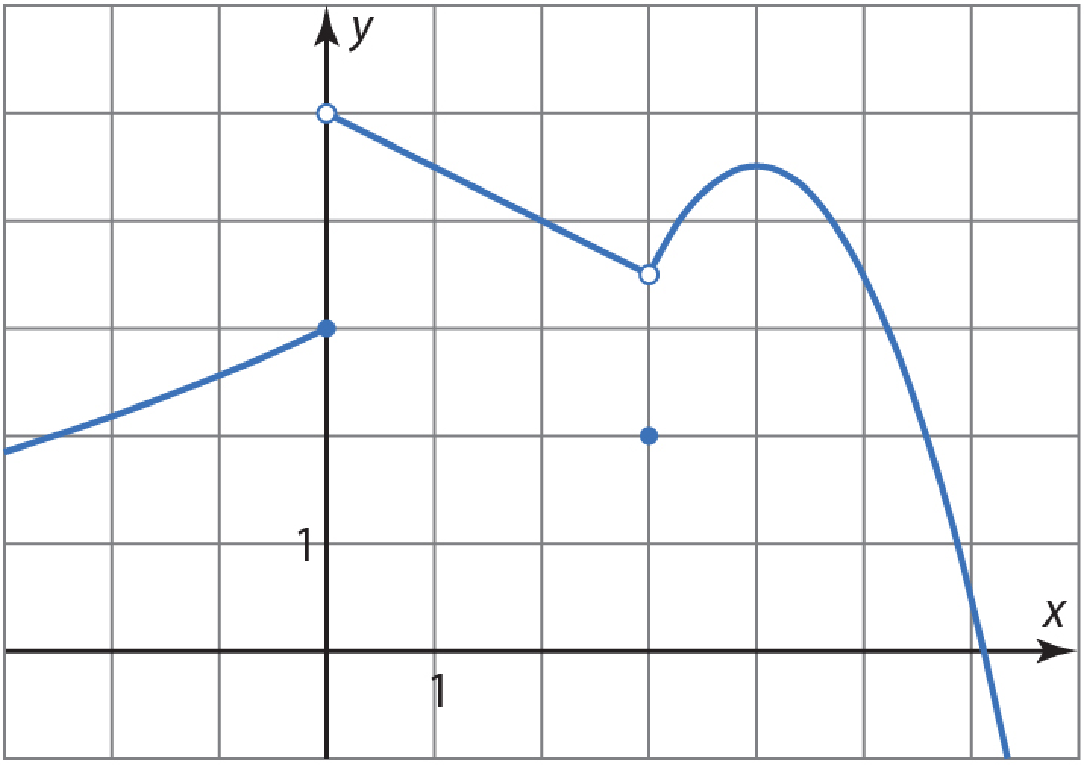
Näiden avulla voidaan piirtää merkkikaavio:



Koska tehtävässä pyydettiin ratkaisemaan, milloin funktion arvot ovat negatiivisia ($\frac{x^2-3x}{x^2-9} < 0$), luetaan merkkikaaviosta negatiiviseksi merkatut alueet. Tällöin saadaan vastaukseksi, että funktion arvot ovat negatiivisia välillä $-3 < x < 0$ $(3p)$.

Tehtävä 1.4 $(3p)$

Luetaan kuvasta funktion raja-arvot.



Mahdollisia raja-arvojen kohtia ovat $x = 0$ ja $x = 3$. Tarkastelemalla toispuoleisia raja-arvoja huomataan kuitenkin, että $x = 0$ kohdassa toispuoleiset raja-arvot ovat eri suuret (vasen: 3, oikea: 5). Kohdassa $x = 3$ toispuoleiset raja-arvot ovat yhtä suuret ($lim_{x\to 4-}f(x) = lim_{x\to 4+}f(x) \approx 3,5$). Funktion raja-arvo löytyy siis kohdasta $x = 3$, muttei kohdasta $x = 0$ $(3p)$.

Tehtävä 2

Ratkaise epäyhtälö: $\frac{2x^2+4}{x^2+x} \leq 2$

1. Määrittelyehto (2p)

Ratkaistaan nimittäjästä nollakohdat:

$$x^2 + x = 0$$

$$x(x+1) = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } x + 1 = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } x = -1$$

eli määrittelyehdot ovat:

$$x \neq 0 \text{ ja } x \neq -1 \qquad (2p)$$

Jos puuttuu toinen määrittelyehto, tehtävästä saa vain yhden pisteen.

2. Nollakohtien ratkaisu (5p)

$$\frac{2x^2+4}{x^2+x} \leq 2$$

$$\frac{2x^2+4}{x^2+x} \times \frac{{}^{x^2+x)}2}{1} \leq 0$$

$$\frac{2x^2+4-2x^2-2x}{x^2+x} \leq 0$$

$$\frac{4-2x}{x^2+x} \leq 0 \qquad (4p)$$

Täysiin pisteisiin vaaditaan looginen rakenne, laskuvirheettömyys sekä oikea yhtälön merkintä (joko heti alussa $\leq$ muutetaan = merkiksi, tai tehdään selväksi, milloin sievennyksestä siirrytään nollakohdan määritykseen). Osoittajan nollakohdat:

$$4-2x=0$$

$$2x=4 \quad || :2$$

$$x=2 \qquad (1p)$$

3. Merkkikaavio (3p)

Ratkaistaan funktiosta $f(x) = \frac{4-2x}{x^2+x}$ testipisteitä määrittelyehtojen ja nollakohtien ympäriltä (4kpl).

Esimerkiksi hyviä valintoja:

$$f(-2) = \frac{4-2\times(-2)}{(-2)^2+(-2)} = \frac{8}{2} = 4$$

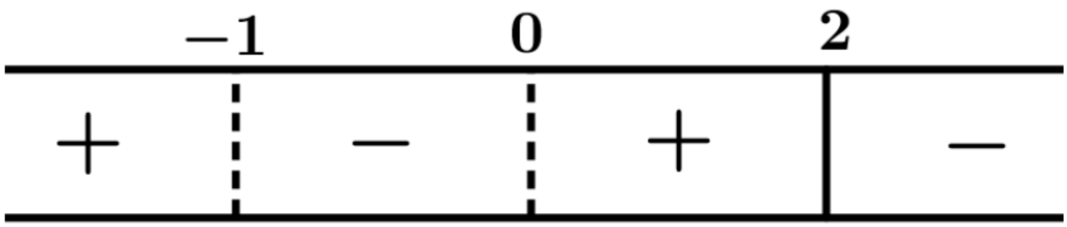
$$f(-\frac{1}{2}) = \frac{4-2\times(-\frac{1}{2})}{(-\frac{1}{2})^2+(-\frac{1}{2})} = \frac{5}{-\frac{1}{4}} = -20$$

$$f(1) = \frac{4-2\times(1)}{(1)^2+(1)} = \frac{4-2}{2} = 1$$

$$f(3) = \frac{4 - 2 \times (3)}{(3)^2 + (3)} = \frac{-2}{12} = -\frac{1}{6}$$

Myös sanallinen perustelu kelpaa, eli merkkien valinnat tulee perustella jotenkin $(1p)$

Merkkikaavio: Määritetyt nollakohdat ja määrittelyehdot löytyvät kaaviosta. Lisäksi kaavio on rakenteeltaan looginen, ja sisältää merkkien muutokset. $(2p)$



4. Vastaus (2p)

Muistetaan, mitä tehtävässä kysytään. Milloin funktio on siis määritellyn kaltainen, eli:

$$\text{Vastaus: } \frac{2x^2 + 4}{x^2 + x} \leq 2, \text{ kun } -1 < x < 0 \text{ ja } x \geq 2 \qquad (2p)$$

Huomioi, että $\geq$ merkki, sillä myös 2 käy vastaukseksi. Jos suhteen merkit eivät ole kunnossa, niin vastauksesta saa **vain 1 pisteen**.

Tehtävä 3

Tehtävästä saa yhteensä 12 pistestä, tasaisesti jaettuna kahteen kohtaan.

Tehtävä 3a

Määritä raja-arvo

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{2x^2 - x - 1}{2x + 1}$$

Ratkaisussa tulee käyttää lim merkintää oikein; puutteesta $(-1p)$.

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{2x^2 - x - 1}{2x + 1} = \frac{2(-\frac{1}{2})^2 - (-\frac{1}{2}) - 1}{2 \times (-\frac{1}{2}) + 1} = \frac{2 \times \frac{1}{4} - \frac{1}{2}}{-1 + 1} = \frac{0}{0} \qquad (1p)$$

Tulee todeta $(1p)$: Koska osoittaja, sekä nimittäjä ovat kummatkin 0, voidaan murtolausetta sieventää:

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{2x^2 - x - 1}{2x + 1} = \lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{(x-1)(2x+1)}{2x + 1} = \lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{x - 1}{1} = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$$

Supistettavan tekijän löytäminen $(1p)$, supistamisen toteuttaminen oikein $(1p)$, ja oikean vastauksen esittäminen:

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{2x^2 - x - 1}{2x + 1} = -\frac{3}{2} \qquad (2p).$$

Tehtävä 3b

Määritä funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2x \ + \ 6, & \text{kun } x < -1 \\ x^2 \ + \ 3x + 6, & \text{kun } x \geq -1 \end{cases}$$

raja-arvo kohdassa -1.

Tehtävässä on tarkoituksena ratkaista toispuoleiset raja-arvot kohdassa -1.

Vasen:

$$\lim_{x \to -1-} f(x) = \lim_{x \to -1-} (2x + 6) \qquad (1p)$$

$$= 2 \times (-1) + 6 = 4 \qquad (1p)$$

Oikea:

$$\lim_{x \to -1+} f(x) = \lim_{x \to -1+} (x^2 + 3x + 6) \qquad (1p)$$

$$= (-1)^2 + 3 \times (-1) + 6 = 4 \qquad (1p)$$

Toispuoleiset raja-arvot ovat samat: $\lim_{x \to -1-} f(x) = \lim_{x \to -1+} f(x) \quad (1p)$

joten funktiolla on raja-arvo kohdassa -1: $\lim_{x \to -1} f(x) = 4 \quad (1p)$