K1

a) Lukujen $3-\sqrt{2}$ ja 2 välinen etäisyys on lukujen erotuksen itseisarvo $\left|3-\sqrt{2}-2\right|=\left|1-\sqrt{2}\right|$.

Koska luku $1-\sqrt{2}\approx -0,41$ on negatiivinen, niin $\left|1-\sqrt{2}\right|=-\left(1-\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}-1.$

b) Lukujen $3-\sqrt{2}$ ja $4-\sqrt{2}$ välinen etäisyys on lukujen erotuksen itseisarvo $\left|3-\sqrt{2}-\left(4-\sqrt{2}\right)\right|=\left|3-\sqrt{2}-4+\sqrt{2}\right|=\left|-1\right|=1.$

Vastaus

a) $\left|3-\sqrt{2}-2\right|=\sqrt{2}-1$

b) $\left|3-\sqrt{2}-\left(4-\sqrt{2}\right)\right|=1$

K2

a) Sievennetään lauseke CAS-laskimella.

$$|2a|-|-7a|=-5|a|$$

Perustellaan laskimen antama tulos.

$$|2a|-|-7a|$$

Tulon itseisarvo on itseisarvojen tulo.

$$=|2||a|-|-7||a|$$

$|2|=2$ ja $|-7|=7$

$$=2|a|-7|a|$$

$$=-5|a|$$

b) Sievennetään lauseke CAS-laskimella, kun $a \neq 0$.

$$\frac{|-16a|}{|4a|}=4$$

Perustellaan laskimen antama tulos.

$$\frac{|-16a|}{|4a|}$$

Tulon itseisarvo on itseisarvojen tulo.

$$=\frac{|-16||a|}{|4||a|}$$

$|-16|=16$ ja $|4|=4$

$$=\frac{16\,\overset{1}{\cancel{|a|}}}{4\,\underset{1}{\cancel{|a|}}}$$

$$=\frac{16^{(4}}{4}=4$$

c) Sievennetään lauseke CAS-laskimella, kun $a>2$.

$$|10-5a|=5a-10$$

Perustellaan laskimen antama tulos. Kun $a>2$, niin $10-5a<0$.

$|10-5a|$

Negatiivisen luvun $10-5a$ itseisarvo on luvun $10-5a$ vastaluku.

$= -(10-5a)$

$= 5a-10$

Vastaus

a) $-5|a|$

b) 4

c) $5a-10$

K3

a) Yhtälö $|5x| = 8$ toteutuu, kun luku $5x$ on yhtä suuri kuin luku 8 tai -8.

$|5x| = 8$

Puretaan yhtälö kahdeksi yhtälöksi.

$5x = 8 \quad :5$ tai $5x = -8 \quad |:5$

$x = \frac{8}{5}$ $\qquad$ $x = -\frac{8}{5}$

Ratkaistaan molemmat yhtälöt.

b) Yhtälö $|x-5| = 7$ toteutuu, kun luku $x-5$ on yhtä suuri kuin luku 7 tai -7.

$|x-5| = 7$

Puretaan yhtälö kahdeksi yhtälöksi.

$x - 5 = 7 \quad |+5$ tai $x - 5 = -7 \quad |+5$

$x = 12$ $\qquad$ $x = -2$

Ratkaistaan molemmat yhtälöt.

Vastaus

a) $x = -\frac{8}{5}$ tai $x = \frac{8}{5}$

b) $x = -2$ tai $x = 12$

K4

a) Yhtälö $|3x-8|=|x|$ toteutuu, kun luvut $3x-8$ ja x ovat yhtä suuret tai toistensa vastaluvut.

$$|3x-8|=|x|$$

Puretaan yhtälö kahdeksi yhtälöksi ja ratkaistaan molemmat yhtälöt.

$$\begin{aligned} 3x-8&=x \quad &&|-x+8 \\ 2x&=8 &&|:2 \\ x&=4 \end{aligned} \qquad \text{tai} \qquad \begin{aligned} 3x-8&=-x \quad &&|+x+8 \\ 4x&=8 &&|:4 \\ x&=2 \end{aligned}$$

b) Yhtälö $|x-7|=|5-3x|$ toteutuu, kun luvut $x-7$ ja $5-3x$ ovat yhtä suuret tai toistensa vastaluvut.

$$|x-7|=|5-3x|$$

Puretaan yhtälö kahdeksi yhtälöksi ja ratkaistaan molemmat yhtälöt.

$$\begin{aligned} x-7&=5-3x \quad &&|+3x+7 \\ 4x&=12 &&|:4 \\ x&=3 \end{aligned} \qquad \text{tai} \qquad \begin{aligned} x-7&=-(5-3x) \\ x-7&=-5+3x \quad &&|-3x+7 \\ -2x&=2 &&|:(-2) \\ x&=-1 \end{aligned}$$

Vastaus

a) $x=2$ tai $x=4$

b) $x=-1$ tai $x=3$

K5

a) Yhtälö toteutuu, kun luku $x^2 - 1$ on yhtä suuri kuin 3 tai -3.

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= 3 && \text{tai} & x^2 - 1 &= -3 \\ x^2 &= 4 && & x^2 &= -2 \\ x &= \pm\sqrt{4} && & x &= \pm\sqrt{-2} \\ x &= \pm 2 && & &\text{ei ratkaisuja} \end{aligned}$$

b) Yhtälö toteutuu, kun luvut $2x^2 + x$ ja x ovat yhtä suuret tai toistensa vastaluvut.

$$\left|2x^2 + x\right| = |x|$$

$$\begin{aligned} 2x^2 + x &= x && \text{tai} & 2x^2 + x &= -x \\ 2x^2 &= 0 && & 2x^2 + 2x &= 0 \\ x &= 0 && & 2x(x+1) &= 0 \end{aligned}$$

$$2x = 0 \quad \text{tai} \quad x + 1 = 0$$

$$x = 0 \qquad\qquad x = -1$$

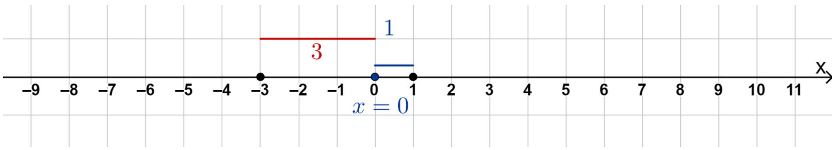
Vastaus

a) $x = -2$ tai $x = 2$

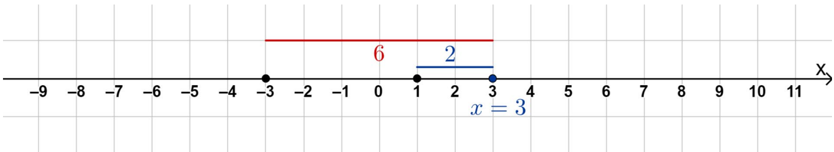
b) $x = -1$ tai $x = 0$

K6

a) Määritetään luku x appletilla. Löydetään kaksi lukua.



Kun luku $x = 0$, sen etäisyys luvusta -3 on 3 ja etäisyys luvusta 1 on 1.



Kun luku $x = 3$, sen etäisyys luvusta -3 on n. 6 ja etäisyys luvusta 1 on 2.

b) Lukujen x ja 1 välinen etäisyys on $|x-1|$.

Lukujen x ja -3 välinen etäisyys on $|x-(-3)| = |x+3|$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$|x-1| = \frac{1}{3}|x+3|$$

Etäisyys $|x-2|$ on yhtä suuri kuin kolmasosa etäisyydestä $|x+3|$. Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 3$$

Vastaus

a) $x = 0$ tai $x = 3$

b) $|x-1| = \frac{1}{3}|x+3|$, $x = 0$ tai $x = 3$

K7

a) Sievennetään lauseke. Kun $x > 5$, niin $x - 5 > 0$.

$$\frac{2\left|x^2 - 10x + 25\right|}{\left|x - 5\right|}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$= \frac{2\left|(x - 5)^2\right|}{x - 5}$$

$$= \frac{2(x - 5)^{\overset{1}{\cancel{2}}}}{\underset{1}{\cancel{x - 5}}}$$

$$= 2(x - 5)$$

$$= 2x - 10$$

b) Sievennetään lauseke. Kun $x < 5$, niin $x - 5 < 0$.

$$\frac{2\left|x^2 - 10x + 25\right|}{\left|x - 5\right|}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$= \frac{2\left|(x - 5)^2\right|}{-(x - 5)}$$

$$= -\frac{2(x - 5)^{\overset{1}{\cancel{2}}}}{\underset{1}{\cancel{x - 5}}}$$

$$= -2(x - 5)$$

$$= -2x + 10$$

Vastaus

a) $2x - 10$

b) $-2x + 10$

K8

Poistetaan yhtälöparista toinen muuttujista. Valitaan poistettavaksi muuttujaksi y. Käytetään yhteenlaskumenetelmää.

$$\begin{cases} 3x - y = 0 & | \cdot 4 \\ x + 4y = 2 \end{cases}$$

Kerrotaan yhtälöt sellaisilla luvuilla, että muuttujan y kertoimiksi saadaan toistensa vastaluvut.

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 12x - 4y = 0 \\ x + 4y = 2 \end{cases} \\ + \hline \end{array}$$

$$13x = 2 \qquad |:13$$

$$x = \frac{2}{13}$$

Lasketaan yhtälöt yhteen. Muuttuja y poistuu. Ratkaistaan x.

Sijoitetaan $x = \frac{2}{13}$ jompaankumpaan yhtälöön ja ratkaistaan y.

Sijoitetaan $x = \frac{2}{13}$ yhtälöparin toiseen yhtälöön.

$$x + 4y = 2$$

$$\frac{2}{13} + 4y = 2 \qquad | - \frac{2}{13}$$

$$4y = \frac{24}{13} \qquad |:4$$

$$y = \frac{6}{13}$$

Vastaus

$x = \frac{2}{13}$ ja $y = \frac{6}{13}$

K9

Ratkaistaan muuttujat x ja y kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä ja tarkastetaan, toteuttaako saatu ratkaisuehdotus myös kolmannen yhtälön.

$$\begin{array}{l} \begin{cases} x-y=3 \\ 2x+y=0 \end{cases} \\ \hline 3x=3 \quad |:3 \\ x=1 \end{array}$$

Valitaan poistettavaksi muuttujaksi y.

Sijoitetaan $x=1$ ensimmäiseen yhtälöön ja ratkaistaan y.

$$\begin{aligned} x-y&=3 \\ 1-y&=3 \quad |-1 \\ -y&=2 \quad |\cdot(-1) \\ y&=-2 \end{aligned}$$

Sijoitetaan luvut $x=1$ ja $y=-2$ kolmanteen yhtälöön.

$$\begin{aligned} 3x-2y&=6 \\ 3\cdot1-2\cdot(-2)&=6 \\ 3+4&=6 \\ 7&=6 \\ &\text{epätosi} \end{aligned}$$

Tarkastetaan, toteuttaako saatu ratkaisuehdotus myös kolmannen yhtälön.

Ratkaisuehdotus ei toteuta yhtälöryhmän viimeistä yhtälöä. Siis muuttujille x ja y ei löydy sellaisia arvoja, jotka toteuttaisivat kaikki kolme yhtälöä. Yhtälöryhmällä ei ole ratkaisuja.

Vastaus
ei ratkaisuja

K10

$$\begin{cases} -x+2y+z=-5 & (1) \\ 2x-3y-z=7 & (2) \\ 2x-\ \ y-z=15 & (3) \end{cases}$$

Numeroidaan yhtälöt, jotta niihin on helpompi viitata.

Muodostetaan yhtälöistä 2 ja 3 yhtälöpari, ja ratkaistaan muuttuja y.

$$\begin{cases} 2x-3y-z=7 & |\cdot(-1) \\ 2x-\ \ y-z=15 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} & \begin{cases} -2x+3y+z=-7 \\ 2x-\ \ y-z=15 \end{cases} \\ + & \\ \hline & 2y=8 \quad |:2 \\ & y=4 \end{array}$$

Muodostetaan yhtälöistä 1 ja 2 yhtälöpari, ja poistetaan muuttuja x.

$$\begin{cases} -x+2y+z=-5 & |\cdot 2 \\ 2x-3y-z=7 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} & \begin{cases} -2x+4y+2z=-10 \\ 2x-3y-\ \ z=7 \end{cases} \\ + & \\ \hline & y+z=-3 \end{array}$$

Sijoitetaan saatuun yhtälöön luku $y=4$ ja ratkaistaan z.

$$\begin{aligned} y+z&=-3 \\ 4+z&=-3 \quad |-4 \\ z&=-7 \end{aligned}$$

Sijoitetaan luvut $y=4$ ja $z=-7$ ensimmäiseen yhtälöön ja ratkaistaan x.

$$
\begin{aligned}
-x + 2y + z &= -5 \\
-x + 2\cdot 4 - 7 &= -5 \\
-x + 1 &= -5 \quad |-1 \\
-x &= -6 \quad |\cdot(-1) \\
x &= 6
\end{aligned}
$$

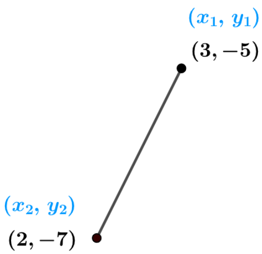
Vastaus

$x = 6,\ \ y = 4$ ja $y = -7$

K11

a) Lasketaan janan keskipisteen koordinaatit.

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{3+2}{2},\ \frac{-5+(-7)}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{5}{2},\ \frac{-12}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{5}{2},-6\right)$$

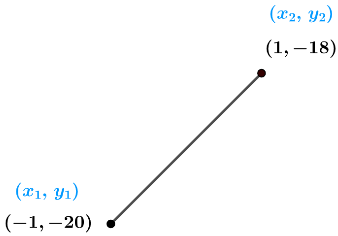


Lasketaan janan pituus.

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$=\sqrt{(2-3)^2+(-7-(-5))^2}$$
$$=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}$$
$$=\sqrt{1+4}$$
$$=\sqrt{5}$$

b) Lasketaan janan keskipisteen koordinaatit.

$$(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$$
$$=(\frac{-1+1}{2}, \frac{-20+(-18)}{2})$$
$$=(\frac{0}{2}, \frac{-38}{2})$$
$$=(0,-19)$$



Lasketaan janan pituus.

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$=\sqrt{(1-(-1))^2+(-18-(-20))^2}$$
$$=\sqrt{2^2+2^2}$$
$$=\sqrt{4+4}$$
$$=\sqrt{8}$$
$$=2\sqrt{2}$$

Vastaus

a) keskipiste $(\frac{5}{2},-6)$, pituus $\sqrt{5}$

b) keskipiste $(0,-19)$, pituus $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

K12

a) Suora kulkee pisteen $(4,-7)$ kautta ja sen kulmakerroin on -2.
Muodostetaan suoran yhtälö.

$$\begin{aligned} y - y_0 &= k(x - x_0) && y_0 = -7,\ k = -2 \text{ ja } x_0 = 4 \\ y - (-7) &= -2(x - 4) && \text{Ratkaistaan muuttuja } y. \\ y + 7 &= -2x + 8 \quad \mid -7 \\ y &= -2x + 1 \end{aligned}$$

Suoran yhtälö on $y = -2x + 1$.

b) Suora kulkee pisteen $(4,-7)$ kautta ja sen kulmakerroin on 0.
Muodostetaan suoran yhtälö.

$$\begin{aligned} y - y_0 &= k(x - x_0) && y_0 = -7,\ k = 0 \text{ ja } x_0 = 4 \\ y - (-7) &= 0 \cdot (x - 4) && \text{Ratkaistaan muuttuja } y. \\ y + 7 &= 0 \quad \mid -7 \\ y &= -7 \end{aligned}$$

Suoran yhtälö on $y = -7$.

Vastaus

a) $y = -2x + 1$

b) $y = -7$

K13

a) Suora kulkee pisteiden $(2,-5)$ ja $(-4,\ 7)$ kautta. Lasketaan suoran kulmakerroin.

$$k=\frac{7-(-5)}{-4-2}=\frac{12}{-6}^{(6}=-2$$

y-koordinaattien erotus jaetaan x-koordinaattien erotuksella.

Suoran kulmakerroin on -2.

b) Ratkaistaan suoran suuntakulma.

$$\begin{aligned}\tan\alpha&=k\\ \tan\alpha&=-2\\ \alpha&=\tan^{-1}(-2)=-63{,}434...^\circ\approx-63{,}4^\circ\end{aligned}$$

c) Suoran kulmakerroin -2 on negatiivinen, joten suora on laskeva.

Vastaus

a) -2

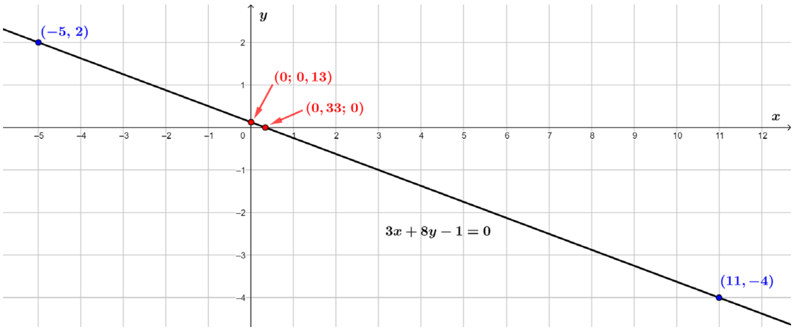
b) $-63{,}4^\circ$

c) laskeva

K14

a) Merkitään koordinaatistoon pisteet $(-5,\ 2)$ ja $(11,-4)$ syöttämällä pisteiden koordinaatit. Piirretään pisteiden kautta kulkeva suora.

Merkitään kuvaan suoran ja koordinaattiakselien leikkauspisteet.



Suoran yhtälön normaalimuoto on $3x+8y-1=0$.

Suoran ja y-akselin leikkauspiste kahden desimaalin tarkkuudella on $(0;\ 0{,}13)$.

Suoran ja x-akselin leikkauspiste kahden desimaalin tarkkuudella on $(0{,}33;\ 0)$.

b) Suora kulkee pisteiden $(-5,\ 2)$ ja $(11,-4)$ kautta. Lasketaan suoran kulmakerroin.

$$k=\frac{-4-2}{11-(-5)}=\frac{-6}{16}^{(2}=-\frac{3}{8}$$

y-koordinaattien erotus jaetaan x-koordinaattien erotuksella.

Suora kulkee pisteen $(-5,\ 2)$ kautta ja sen kulmakerroin on $-\frac{3}{8}$. Muodostetaan suoran yhtälö.

$$y-y_0=k(x-x_0)$$

$y_0=2,\ k=-\frac{3}{8}$ ja $x_0=-5$

$$y-2=-\frac{3}{8}(x-(-5))$$

Ratkaistaan muuttuja y.

$$y-2=-\frac{3}{8}(x+5)$$

$$y-2=-\frac{3}{8}x-\frac{15}{8} \quad |+2$$

$$y=-\frac{3}{8}x+\frac{1}{8}$$

Suoran yhtälö on $y=-\frac{3}{8}x+\frac{1}{8}$.

Muokataan suoran yhtälö normaalimuotoon.

$$y=-\frac{3}{8}x+\frac{1}{8} \quad |+\frac{3}{8}x-\frac{1}{8}$$

$$\frac{3}{8}x+y-\frac{1}{8}=0 \quad |\cdot 8$$

$$3x+8y-1=0$$

Suoran yhtälö normaalimuodossa on $3x+8y-1=0$.

Ratkaistaan suoran ja koordinaattiakselien leikkauspisteet.

Koska yhtälön ratkaistussa muodossa $y = -\frac{3}{8}x + \frac{1}{8}$ vakiotermi on $\frac{1}{8}$, suora leikkaa y-akselin pisteessä $(0,\ \frac{1}{8})$.

Ratkaistaan suoran ja x-akselin leikkauspiste.

$$
\begin{aligned}
3x + 8y - 1 &= 0 && \text{Sijoitetaan } y = 0 \text{ ja ratkaistaan } x. \\
3x - 1 &= 0 && |+1 \\
3x &= 1 && |:3 \\
x &= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Suora leikkaa x-akselin pisteessä $(\frac{1}{3},\ 0)$.

Vastaus

a) yhtälö $3x + 8y - 1 = 0$, leikkauspisteet $(0;\ 0{,}13)$ ja $(0{,}33;\ 0)$

b) yhtälö $3x + 8y - 1 = 0$, leikkauspisteet $(0,\ \frac{1}{8})$ ja $(\frac{1}{3},\ 0)$

K15

Muodostetaan yhtälöpari, poistetaan siitä muuttuja y ja ratkaistaan muuttuja x. Käytetään yhteenlaskumenetelmää.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 & |\cdot(-3) \\ 4x - 6y = 5 \end{cases}$$

Kerrotaan yhtälöt sellaisilla luvuilla, että muuttujan x kertoimiksi saadaan toistensa vastaluvut.

$$\begin{array}{rl} + \begin{cases} -9x + 6y = -3 \\ \;\;\;4x - 6y = 5 \end{cases} & \\ \hline -5x = 2 & |:(-5) \\ x = -\frac{2}{5} & \end{array}$$

Lasketaan yhtälöt yhteen.
Muuttuja x poistuu.
Ratkaistaan muuttuja y.

Sijoitetaan $x = -\frac{2}{5}$ jompaankumpaan yhtälöön ja ratkaistaan y.

$$3x - 2y = 1$$

Sijoitetaan $x = -\frac{2}{5}$ yhtälöparin ensimmäiseen yhtälöön.

$$\begin{aligned} 3\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) - 2y &= 1 \\ -\frac{6}{5} - 2y &= 1 \quad \left|+\frac{6}{5}\right. \\ -2y &= \frac{11}{5} \quad |:(-2) \\ y &= -\frac{11}{10} \end{aligned}$$

Suorien leikkauspiste on $(-\frac{2}{5}, -\frac{11}{10})$.

Vastaus

$(-\frac{2}{5}, -\frac{11}{10})$

K16

Määritetään suoran $6x-3y+7=0$ kulmakerroin. Muokataan suoran yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$
\begin{aligned}
6x-3y+7&=0 && |-6x-7\\
-3y&=-6x-7 && |:(-3)\\
y&=2x+\frac{7}{3}
\end{aligned}
$$

Suoran $6x-3y+7=0$ kulmakerroin on 2.

a) Suoran $y=2x-11$ kulmakerroin on 2.

Koska suorien kulmakertoimet ovat samat, suorat ovat yhdensuuntaisia.

b) Suora kulkee pisteiden $(4,-2)$ ja $(8,\ 6)$ kautta. Määritetään suoran kulmakerroin.

$$k=\frac{6-(-2)}{8-4}=\frac{8}{4}{}^{(4}=2$$

Kuten a-kohdassa, suorien kulmakertoimet ovat samat, joten suorat ovat yhdensuuntaisia.

Vastaus
a) on
b) on

K17

Määritetään suoran $6x-3y+7=0$ kulmakerroin. Muokataan suoran yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$
\begin{aligned}
6x-3y+7&=0 && |-6x-7\\
-3y&=-6x-7 && |:(-3)\\
y&=2x+\frac{7}{3}
\end{aligned}
$$

Suoran $6x-3y+7=0$ kulmakerroin on $k_1=2$.

a) Suoran $y=-2x+5$ kulmakerroin on $k_2=-2$. Tutkitaan, toteuttavatko kulmakertoimet kohtisuoruusehdon $k_1k_2=-1$.

$$k_1k_2=2\cdot(-4)=-4\neq-1$$

Suorien kulmakertoimet eivät toteuta kohtisuoruusehtoa, joten suorat eivät ole kohtisuorassa toisiaan vastaan.

b) Suora kulkee pisteiden $(5,\ 4)$ ja $(7,\ 3)$ kautta. Määritetään suoran kulmakerroin.

$$k_2 = \frac{3-4}{7-5} = -\frac{1}{2}$$

Tutkitaan, toteuttavatko kulmakertoimet kohtisuoruusehdon $k_1 k_2 = -1$.

$$k_1 k_2 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

Suorien kulmakertoimet toteuttavat kohtisuoruusehdon, joten suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Vastaus
a) ei ole
b) on

K18

Muokataan suoran $y=\frac{2}{9}x-3$ yhtälö normaalimuotoon.

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{2}{9}x-3 && \mid -\frac{2}{9}x+3 \\
-\frac{2}{9}x+y+3 &= 0 && \mid \cdot(-9) \\
2x-9y-27 &= 0
\end{aligned}
$$

a) Lasketaan pisteen $(-5,-4)$ etäisyys suorasta $2x-9y-27=0$.

Sijoitetaan kertoimet $a=2,\ b=-9$ ja $c=-27$ ja koordinaatit $x_0=-5$ ja $y_0=-4$

$$
\begin{aligned}
d &= \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \\
&= \frac{|2\cdot(-5)-9\cdot(-4)-27|}{\sqrt{2^2+(-9)^2}} \\
&= \frac{|-1|}{\sqrt{85}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{85}} \quad \left(=\frac{\sqrt{85}}{85}\right)
\end{aligned}
$$

b) Lasketaan pisteen $(18,\ 1)$ etäisyys suorasta $2x-9y-27=0$.

$$\begin{aligned}
d &= \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \\
&= \frac{|2\cdot 18-9\cdot 1-27|}{\sqrt{2^2+(-9)^2}} \\
&= \frac{|0|}{\sqrt{85}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Sijoitetaan kertoimet
$a=2,\ b=-9$ ja $c=-27$
ja koordinaatit $x_0=18$ ja $y_0=1$

Vastaus

a) $\frac{1}{\sqrt{85}}$

b) 0

K19

a) Lämpötilan y riippuvuutta korkeudesta x kuvaa suora, koska riippuvuus on lineaarinen.

Merenpinnan korkeudella lämpötila on $14\ °C$ ja kilometrin korkeudessa $8{,}0\ °C$. Annetuista tiedoista saadaan kaksi koordinaatiston pistettä: $(0,\ 14)$ ja $(1,\ 8)$.

Lasketaan suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{8-14}{1-0} = -6$$

Suora kulkee pisteen $(0,\ 14)$ kautta ja sen kulmakerroin on -6. Muodostetaan suoran yhtälö.

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad y_0 = 14,\ k = -6 \text{ ja } x_0 = 0$$

$$y - 14 = -6(x - 0) \qquad \text{Ratkaistaan muuttuja } y.$$

$$y - 14 = -6x \qquad | +14$$

$$y = -6x + 14$$

b) Lämpötila $3{,}5$ kilometrin korkeudella saadaan sijoittamalla a-kohdassa muodostettuun yhtälöön korkeus $x = 3{,}5$.

$$y = -6 \cdot 3{,}5 + 14 = -7 \ (^\circ\mathrm{C})$$

c) Ratkaistaan a-kohdan yhtälöstä muuttuja x, kun lämpötila $y = 0$.

$$\begin{aligned} y &= -6x + 14 && \\ 0 &= -6x + 14 && \mid +6x \\ 6x &= 14 && \mid : 6 \\ x &= \frac{7}{3} \approx 2{,}3 \ (\mathrm{km}) && \end{aligned}$$

Sijoitetaan $y = 0$.

Vastaus

a) $y = -6x + 14$

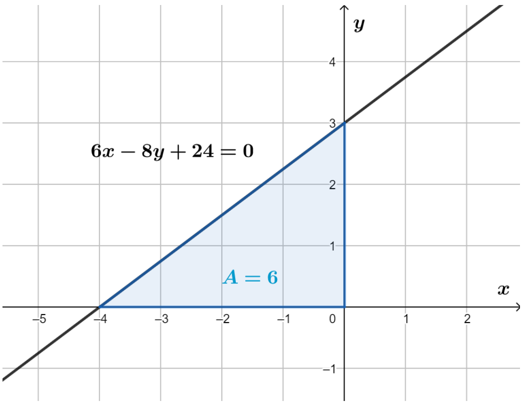
b) -7 °C

c) $2{,}3$ km

K20

a) Piirretään geometriaohjelmalla suora $6x - 8y + 24 = 0$ syöttämällä suoran yhtälö.

Piirretään suoran ja koordinaattiakselien rajaama kolmio Monikulmio-työkalulla.



Kolmion pinta-ala on 6.

b) Määritetään suoran $6x-8y+24=0$ ja koordinaattiakselien leikkauspisteet.

Ratkaistaan suoran ja x-akselin leikkauspiste.

$$\begin{aligned} 6x-8y+24&=0 && \text{Sijoitetaan } y=0 \text{ ja ratkaistaan } x. \\ 6x+24&=0 && |-24 \\ 6x&=-24 && |:6 \\ x&=-4 \end{aligned}$$

Suora leikkaa x-akselin pisteessä $(-4,\ 0)$.

Ratkaistaan suoran ja y-akselin leikkauspiste.

$$\begin{aligned} 6x-8y+24&=0 && \text{Sijoitetaan } x=0 \text{ ja ratkaistaan } y. \\ -8y+24&=0 && |-24 \\ -8y&=-24 && |:(-8) \\ y&=3 \end{aligned}$$

Suora leikkaa y-akselin pisteessä $(0,\ 3)$.

Kolmion kanta on suoran ja x-akselin leikkauspisteen etäisyys origosta, eli $0-(-4)=4$.

Kolmion korkeus on suoran ja y-akselin leikkauspisteen etäisyys origosta eli $3-0=3$.

Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3=6 \qquad A=\frac{1}{2}ah$$

Vastaus
a) 6
b) 6

K21

Suora n kulkee pisteiden $(7,\ 12)$ ja $(15, -24)$ kautta. Määritetään suoran kulmakerroin.

$$k_1 = \frac{-24-12}{15-7} = \frac{-36}{8}^{(4} = -\frac{9}{2}$$

a) Suora m kulkee pisteiden $(-6,\ 29)$ ja $(-15,\ 27)$ kautta. Määritetään suoran kulmakerroin.

$$k_2 = \frac{27-29}{-15-(-6)} = \frac{2}{9}$$

Suorilla n ja m on eri kulmakertoimet, joten suorat eivät ole yhdensuuntaisia.

Tutkitaan, toteuttavatko kulmakertoimet kohtisuoruusehdon $k_1k_2 = -1$.

$$k_1k_2 = \left(-\frac{9}{2}\right) \cdot \frac{2}{9} = -1$$

Suorien kulmakertoimet toteuttavat kohtisuoruusehdon, joten suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

b) Suora m kulkee pisteiden $(-213,-45)$ ja $(-221,-9)$ kautta. Määritetään suoran kulmakerroin.

$$k_2 = \frac{-9-(-45)}{-221-(-213)} = \frac{36}{-8}^{(4} = -\frac{9}{2}$$

Suorilla n ja m on sama kulmakerroin $k_1 = k_2 = -\frac{9}{2}$, joten suorat ovat yhdensuuntaisia.

Vastaus

a) kohtisuorat

b) yhdensuuntaiset

K22

Määritetään suoran $12x-8y+26=0$ kulmakerroin. Muokataan suoran yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$\begin{aligned} 12x-8y+26&=0 && |-12x-26 \\ -8y&=-12x-26 && |:(-8) \\ y&=\frac{3}{2}x+\frac{13}{4} \end{aligned}$$

Suoran $12x-8y+26=0$ kulmakerroin on $k_1=\frac{3}{2}$. Määritetään kohtisuorassa olevan suoran kulmakerroin k_2.

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\cdot k_2&=-1 && |\cdot\frac{2}{3} \\ k_2&=-\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Kohtisuoruusehto: $k_1k_2=-1$.

Normaali kulkee pisteen $(3,-5)$ kautta ja sen kulmakerroin on $-\frac{2}{3}$. Muodostetaan normaalin yhtälö.

$$\begin{aligned} y-(-5)&=-\frac{2}{3}(x-3) \\ y+5&=-\frac{2}{3}x+2 && |-5 \\ y&=-\frac{2}{3}x-3 \end{aligned}$$

$y-y_0=k(x-x_0)$

Vastaus

$y=-\frac{2}{3}x-3\ \ (2x+3y+9=0)$

K23

Lasketaan kolmion sivujen eli janojen AB, AC ja BC pituudet.

$$AB = \sqrt{(20-30)^2 + (-2-4)^2} \qquad A = (30,\ 4),\ \ B = (20, -2)$$
$$= \sqrt{136}$$

$$AC = \sqrt{(28-30)^2 + (-4-4)^2} \qquad A = (30,\ 4),\ \ C = (28, -4)$$
$$= \sqrt{68}$$

$$BC = \sqrt{(28-20)^2 + (-4-(-2))^2} \qquad B = (20, -2),\ \ C = (28, -4)$$
$$= \sqrt{68}$$

Huomataan, että sivujen AC ja BC pituudet ovat samat. Kolmio on siis tasakylkinen.

Tutkitaan, toteuttavatko kolmion sivujen pituudet Pythagoraan lauseen.

$$\begin{aligned} AC^2 + BC^2 &= AB^2 \\ \left(\sqrt{68}\right)^2 + \left(\sqrt{68}\right)^2 &= \left(\sqrt{136}\right)^2 \\ 136 &= 136 \\ &\text{tosi} \end{aligned}$$

Koska kolmion sivujen pituudet toteuttavat Pythagoraan lauseen, kolmio on suorakulmainen.

Vastaus
Kolmio on tasakylkinen, koska $AC = BC$. Kolmio on suorakulmainen, koska sen sivujen pituudet toteuttavat Pythagoraan lauseen.

K24

Määritetään suoran $3x-4y+5=0$ kulmakerroin k_1 ja suuntakulma α_1.

$$3x-4y+5=0$$

Ratkaistaan muuttuja y CAS-laskimella.

$$y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$$

$$k_1=\frac{3}{4}$$

$$\tan\alpha_1=\frac{3}{4}$$

$\tan\alpha=k$

$$\alpha_1=\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)=36{,}869...^\circ$$

Määritetään suoran $6x+7y-8=0$ kulmakerroin k_2 ja suuntakulma α_2.

$$6x+7y-8=0$$

Ratkaistaan muuttuja y CAS-laskimella.

$$y=-\frac{6}{7}x+\frac{8}{7}$$

$$k_2=-\frac{6}{7}$$

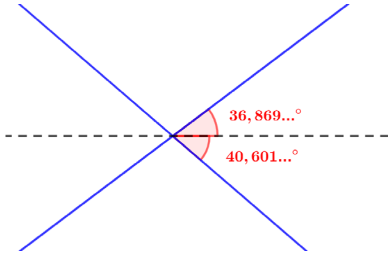
$$\tan\alpha_1=-\frac{6}{7}$$

$\tan\alpha=k$

$$\alpha_1=\tan^{-1}\left(-\frac{6}{7}\right)=-40{,}601...^\circ$$

Hahmotellaan kuvaaja ja päätellään suorien välinen kulma.

Toinen suorista nousee $36{,}869...^\circ$:n kulmassa ja toinen laskee $40{,}601...^\circ$:n kulmassa.



Suorien välinen kulma on siis

$$36{,}869...^\circ + 40{,}601...^\circ$$
$$= 77{,}471...^\circ$$
$$\approx 77{,}5^\circ$$

Vastaus

$77{,}5^\circ$ (suuntakulmat $36{,}9^\circ$ ja $-40{,}6^\circ$)

K25

Määritetään suoran s kulmakerroin. Suora kulkee pisteiden $(-3,\ 1)$ ja $(5,\ 5)$ kautta.

$$k_1 = \frac{5-1}{5-(-3)} = \frac{4}{8}^{(4} = \frac{1}{2}$$

Määritetään suoran t kulmakerroin. Suora kulkee pisteiden $(-2,\ 0)$ ja $(a,\ 1)$ kautta.

$$k_2 = \frac{1-0}{a-(-2)} = \frac{1}{a+2}$$

a) Suorat ovat yhdensuuntaisia, kun niiden kulmakertoimet ovat yhtä suuret. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan a.

$$k_1 = k_2$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{a+2}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$a = 0$$

b) Suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, kun niiden kulmakertoimet toteuttavat kohtisuoruusehdon. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan a.

$$k_1 k_2 = -1$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a+2} = -1$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$a = -\frac{5}{2}$$

Vastaus

a) $a = 0$

b) $a = -\frac{5}{2}$

K26

a) Appletin avulla nähdään, että pisteet $(t,\ 2)$, $(-5,\ t)$ ja $(2t, -t)$ ovat samalla suoralla, kun $t \approx -1{,}1$.

b) Pisteet $A = (t,\ 2)$, $B = (-5,\ t)$ ja $C = (2t, -t)$ ovat samalla suoralla, jos suorien AB ja AC kulmakertoimet ovat samat.

Lasketaan suorien kulmakertoimet.

$$k_{AB} = \frac{t-2}{-5-t} = -\frac{t-2}{5+t}$$

$$k_{AC} = \frac{-t-2}{2t-t} = -\frac{t+2}{t}$$

Kulmakertoimien tulee olla yhtä suuret. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan t.

$$-\frac{t-2}{5+t} = -\frac{t+2}{t}$$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$t = -\frac{10}{9}$$

Vastaus

a) $t \approx -1{,}1$

b) $t = -\frac{10}{9}$

K27

Ensimmäinen suora kulkee pisteiden $(0, -\frac{1}{5})$ ja $(\frac{2}{5},\ 0)$ kautta.

Lasketaan suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{0 - \left(-\frac{1}{5}\right)}{\frac{2}{5} - 0} = \frac{1}{2}$$

Ensimmäinen suora kulkee pisteen $(0, -\frac{1}{5})$ kautta ja sen kulmakerroin on $\frac{1}{2}$. Muodostetaan suoran yhtälö.

$$y - \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2}(x - 0)$$

$y - y_0 = k(x - x_0)$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{5}$$

Ratkaistaan muuttuja y CAS-laskimella.

Ensimmäisen suoran yhtälö on $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{5}$.

Toinen suora kulkee pisteiden $(\frac{4}{5}, \frac{6}{5})$ ja $(\frac{8}{5}, -\frac{2}{5})$ kautta. Lasketaan suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{-\frac{2}{5} - \frac{6}{5}}{\frac{8}{5} - \frac{4}{5}} = -2$$

Toinen suora kulkee pisteen $(\frac{4}{5}, \frac{6}{5})$ kautta ja sen kulmakerroin on -2. Muodostetaan suoran yhtälö.

$$y - \frac{6}{5} = -2\left(x - \frac{4}{5}\right)$$

$y - y_0 = k(x - x_0)$

$$y = -2x + \frac{14}{5}$$

Ratkaistaan muuttuja y CAS-laskimella.

Toisen suoran yhtälö on $y = -2x + \frac{14}{5}$.

Ratkaistaan suorien leikkauspiste yhtälöparilla.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{5} \\ y = -2x + \frac{14}{5} \end{cases}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = \frac{6}{5} \text{ ja } y = \frac{2}{5}$$

Suorien leikkauspiste on $(\frac{6}{5}, \frac{2}{5})$.

Vastaus

$(\frac{6}{5}, \frac{2}{5})$

K28

Määritetään aluksi suorien $y = -3x - 2$ ja $5x + 4y = 20$ leikkauspiste. Tehtävänä on löytää kaikki luvut x ja y, jotka toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{cases} y = -3x - 2 \\ 5x + 4y = 20. \end{cases}$$

Käytetään sijoitusmenetelmää. Sijoitetaan $y = -3x - 2$ yhtälöön $5x + 4y = 20$.

$x = -4.$

Suorat leikkaavat siis kohdassa Ratkaistaan ylemmästä yhtälöstä vielä leikkauspisteen y-koordinaatti sijoittamalla yhtälöön $x = -4$.

$$\begin{aligned} y &= -3x - 2 && \text{Sijoitetaan } x = -4. \\ y &= -3 \cdot (-4) - 2 \\ y &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x + 4y &= 20 && \text{Sijoitetaan } y = -3x - 2. \\ 5x + 4(-3x - 2) &= 20 \\ 5x - 12x - 8 &= 20 && \mid +8 \\ -7x &= 28 && \mid : (-7) \\ x &= -4 \end{aligned}$$

Suorat $y = -3x - 2$ ja $5x + 4y = 20$ leikkaavat siis pisteessä $(-4,\ 10)$.

Selvitetään, millä vakion a arvolla myös suora $ax+4y-44=0$ kulkee pisteen $(-4,\ 10)$ kautta.

$$ax+4y-44=0 \qquad \text{Sijoitetaan } x=-4 \text{ ja } y=10.$$
$$a\cdot(-4)+4\cdot 10-44=0$$
$$-4a-4=0 \quad |+4$$
$$-4a=4 \quad |:(-4)$$
$$a=-1$$

Siis suorat $y=-3x-2$, $5x+4y=20$ ja $ax+4y-44=0$ leikkaavat pisteessä $(-4,\ 10)$, kun $a=-1$.

Vastaus
$a=-1$, leikkauspiste $(-4,\ 10)$

K29

Merkitään ruusujen lukumäärää kirjaimella x ja liljojen kirjaimella y.
Koska viiden kimpun hinta on 410 €, yhden kimpun hinta on
$\frac{410\ €}{5} = 82$ €. Kootaan tiedot taulukkoon.

	ruusut	liljat	yhteensä
kimpun kukkien lukumäärä	x	y	16
yhden kimpun hinta (€)	$6x$	$4y$	82

Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan x ja y.

$$\begin{cases} x + y = 16 \\ 6x + 4y = 82 \end{cases}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$x = 9$ ja $y = 7$

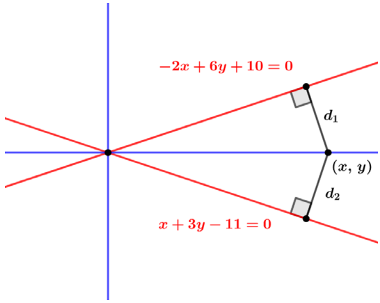
Yhdessä kimpussa on 9 ruusua ja 7 liljaa.

Vastaus
9 ruusua ja 7 liljaa

K30

Kulmanpuolittajan jokainen piste (x, y) on yhtä kaukana kummastakin suorasta. Muodostetaan lausekkeet pisteen (x, y) etäisyydelle suorista.

Etäisyys suorasta $-2x+6y+10=0$ on



$$d_1 = \frac{|-2\cdot x+6\cdot y+10|}{\sqrt{(-2)^2+6^2}} = \frac{|-2x+6y+10|}{2\sqrt{10}}.$$

Etäisyys suorasta $x+3y-11=0$ on

$$d_2 = \frac{|1\cdot x+3\cdot y-11|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{|x+3y-11|}{\sqrt{10}}.$$

Etäisyyksien tulee olla yhtä suuret. Muodostetaan etäisyyksien yhtälö ja sievennetään se suoran yhtälöksi.

$$d_1 = d_2$$

$$\frac{|-2x+6y+10|}{2\sqrt{10}} = \frac{|x+3y-11|}{\sqrt{10}} \qquad |\cdot 2\sqrt{10}$$

$$|-2x+6y+10| = 2|x+3y-11|$$

$$|-2x+6y+10| = |2(x+3y-11)|$$

Puretaan yhtälö kahdeksi yhtä

$$-2x+6y+10 = 2(x+3y-11) \quad \text{tai} \quad -2x+6y+10 = -2(x+3y-11)$$

$$-2x+6y+10 = 2x+6y-22 \qquad -2x+6y+10 = -2x-6y+22$$

$$4x = 32 \qquad 12y = 12$$

$$x = 8 \qquad y = 1$$

Kulmanpuolittajien yhtälöt ovat $x=8$ ja $y=1$.

Vastaus

$x=8$ ja $y=1$

K31

Lasketaan pisteen $(-2t,\ 4+t)$ etäisyys suorasta $5x-9y+19t=0$.

$$d=\frac{|5\cdot(-2t)-9\cdot(4+t)+19t|}{\sqrt{5^2+(-9)^2}} \qquad d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$=\frac{|-10t-36-9t+19t|}{\sqrt{25+81}}$$

$$=\frac{|-36|}{\sqrt{106}}$$

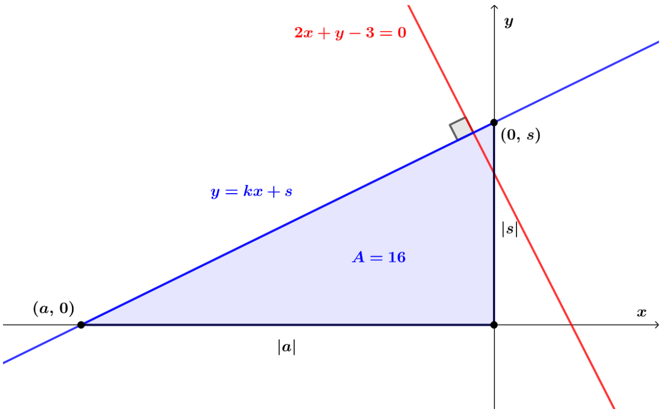
$$=\frac{36}{\sqrt{106}}\ \left(=\frac{18\sqrt{106}}{53}\right)$$

Pisteen etäisyys suorasta on aina $\frac{18\sqrt{106}}{53}$, eikä siis riipu vakion t arvosta. $\square$

K32

Normaalin yhtälö on muotoa $y = kx + s$.

Merkitään normaalin ja x-akselin leikkauspistettä $(a,\ 0)$. Normaalin ja y-akselin leikkauspiste on $(0,\ s)$.



Määritetään suoran $2x + y - 3 = 0$ kulmakerroin. Muokataan suoran yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$
\begin{aligned}
2x + y - 3 &= 0 \qquad && | -2x + 3 \\
y &= -2x + 3
\end{aligned}
$$

Suoran $2x + y - 3 = 0$ kulmakerroin on $k_1 = -2$. Määritetään normaalin kulmakerroin k_2.

$$
\begin{aligned}
-2 \cdot k_2 &= -1 \qquad && |:(-2) \\
k_2 &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Kohtisuoruusehto: $k_1 k_2 = -1$.

Normaalin yhtälö on siis $y = \frac{1}{2}x + s$.

Lasketaan normaalin ja x-akselin leikkauspiste $(a,\ 0)$.

$$y=\frac{1}{2}x+s$$ Sijoitetaan $y=0$ ja $x=a$.

$$0=\frac{1}{2}a+s \quad \left|-\frac{1}{2}a\right.$$

$$-\frac{1}{2}a=s \quad |\cdot(-2)$$

$$a=-2s$$

Muodostetaan yhtälö kolmion pinta-alan avulla ja ratkaistaan s.

$$A=16$$

$$\frac{1}{2}\cdot|a|\cdot|s|=16$$

$$\frac{1}{2}\cdot|-2s|\cdot|s|=16$$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$s=-4 \quad \text{tai} \quad s=4$$

Normaalin yhtälö on $y=\frac{1}{2}x+4$ tai $y=\frac{1}{2}x-4$.

Vastaus

$y=\frac{1}{2}x+4$ tai $y=\frac{1}{2}x-4$ ($x-2y+8=0$ tai $x-2y-8=0$)

K33

a) Kuvan perustella ympyrän keskipiste on $(-1,\ 2)$ ja säde 2.
Muodostetaan ympyrän yhtälö.

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2 \qquad \text{Sijoitetaan } x_0=-1,\ y_0=2 \text{ ja } r=2.$$
$$(x-(-1))^2+(y-2)^2=2^2$$
$$(x+1)^2+(y-2)^2=4$$

Ympyrän yhtälö on $(x+1)^2+(y-2)^2=4$.

b) Kuvan perusteella ympyrän keskipiste on $(2,\ 0)$.
Ympyrä kulkee esimerkiksi pisteen $(0,\ 2)$ kautta. Ympyrän säde on siis pisteiden $(2,\ 0)$ ja $(0,\ 2)$ välinen etäisyys.

$$r=\sqrt{(0-2)^2+(2-0)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$$

Muodostetaan ympyrän yhtälö.

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2 \qquad \text{Sijoitetaan } x_0=2,\ y_0=0 \text{ ja } r=\sqrt{8}.$$
$$(x-2)^2+(y-0)^2=\left(\sqrt{8}\right)^2$$
$$(x-2)^2+y^2=8$$

Ympyrän yhtälö on $(x-2)^2+y^2=8$.

Vastaus

a) $(x+1)^2+(y-2)^2=4$

b) $(x-2)^2+y^2=8$

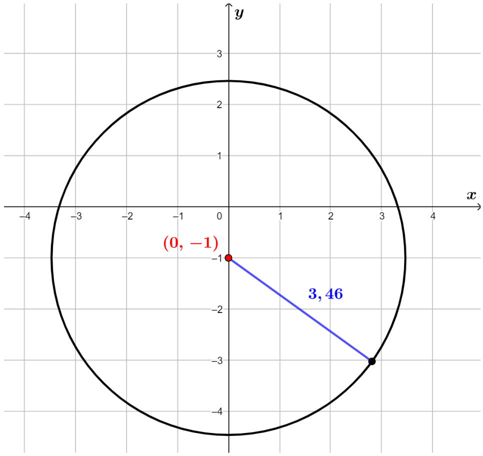
K34

a) Piirretään yhtälön
$x^2 + (y+1)^2 = 12$ kuvaaja.

Määritetään ympyrän keskipiste.

Keskipisteeksi saadaan $(0,-1)$.

Merkitään ympyrälle jokin piste ja mitataan ympyrän säde.



Säteeksi saadaan kahden desimaalin tarkkuudella $3,46$.

b) Kirjoitetaan yhtälö keskipistemuotoon $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$.

$$x^2 + (y+1)^2 = 12$$

$$x = x - 0$$
$$y + 1 = y - (-1)$$

$$(x-0)^2 + (y-(-1))^2 = 12$$

Yhtälön vasemmalta puolelta nähdään, että ympyrän keskipiste on $(0,-1)$.

Yhtälön oikealla puolella on säteen neliö r^2, joten ympyrän säde $r = \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$ ($\approx 3{,}46$).

Vastaus

a) keskipiste $(0,-1)$, säde $3,46$

b) keskipiste $(0,-1)$, säde $2\sqrt{3}$

K35

Tutkitaan, esittääkö yhtälö ympyrää. Pyritään muokkaamaan yhtälö ympyrän keskipistemuotoon $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$.

a) Muokataan yhtälön vasemmalle puolelle lauseke $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$.

$$x^2+y^2-4x+6y-23=0$$

Ryhmitellään termit.

$$\begin{aligned}
x^2-4x \quad + y^2+6y \quad &= 23\\
x^2-2\cdot x\cdot 2+2^2+y^2+2\cdot y\cdot 3+3^2 &= 23+2^2+3^2\\
(x-2)^2 \quad + \quad (y+3)^2 &= 23+4+9\\
(x-2)^2 \quad + \quad (y+3)^2 &= 36
\end{aligned}$$

Yhtälö esittää ympyrää, jonka keskipiste on $(2,-3)$ ja säde $\sqrt{36}=6$.

b) Muokataan yhtälön vasemmalle puolelle lauseke $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$.

$$x^2+y^2+12x-10y+65=0$$

Ryhmitellään termit.

$$\begin{aligned}
x^2+12x \quad + y^2-10y \quad &= -65\\
x^2+2\cdot x\cdot 6+6^2+y^2-2\cdot y\cdot 5+5^2 &= -65+6^2+5^2\\
(x+6)^2 \quad + \quad (y-5)^2 &= -65+36+25\\
\underbrace{(x+5)^2}_{\geq 0} \quad + \quad \underbrace{(y-6)^2}_{\geq 0} &= \underbrace{-4}_{<0}
\end{aligned}$$

Luvun neliö on aina epänegatiivinen, joten kahden neliön summa ei voi olla negatiivinen. Täten mikään koordinaatiston piste (x, y) ei toteuta yhtälöä.

Yhtälö ei siis esitä mitään pistejoukkoa.

c) Muokataan yhtälön vasemmalle puolelle lauseke $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$.

$$x^2+y^2-8x-4y+20=0$$

Ryhmitellään termit.

$$\begin{aligned}
x^2-8x \quad &+ y^2-4y &&= -20\\
x^2-2\cdot x\cdot 4+4^2 &+ y^2-2\cdot y\cdot 2+2^2 &&= -20+4^2+2^2\\
(x-4)^2 \quad &+ \quad (y-2)^2 &&= -20+16+4\\
(x-4)^2 \quad &+ \quad (y-2)^2 &&= 0
\end{aligned}$$

Yhtälö saatiin ympyrän keskipistemuotoon, missä keskipiste on $(4,\ 2)$ ja säde $\sqrt{0}=0$.

Yhtälö esittää siis pistettä $(4,\ 2)$.

Vastaus

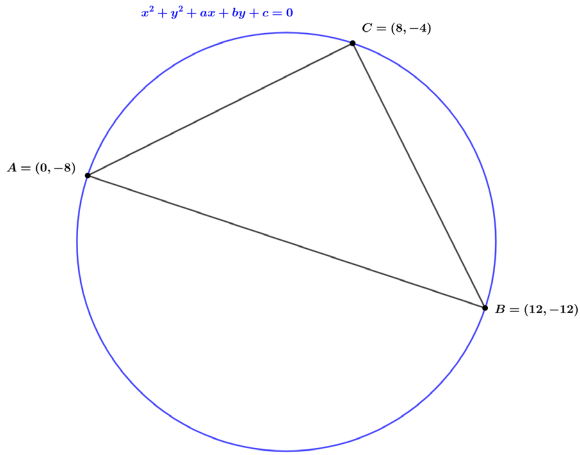
a) ympyrää, jonka keskipiste on $(2,-3)$ ja säde 6.

b) ei mitään pistejoukkoa.

c) pistettä $(4,\ 2)$

K36

Kolmion ympäri piirretty ympyrä kulkee kolmion jokaisen kärkipisteen kautta, joten pisteet
$A = (0, -8)$,
$B = (12, -12)$ ja
$C = (8, -4)$
toteuttavat ympyrän yhtälön.



Määritetään ympyrän yhtälön normaalimuodon $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ kertoimet a, b ja c. Sijoittamalla pisteiden koordinaatit ympyrän yhtälön normaalimuotoon saadaan kolme yhtälöä. Muodostetaan yhtälöryhmä ja ratkaistaan kertoimet a, b ja c.

$$\begin{cases} 0^2 + (-8)^2 + a \cdot 0 + b \cdot (-8) + c = 0 \\ 12^2 + (-12)^2 + a \cdot 12 + b \cdot (-12) + c = 0 \\ 8^2 + (-4)^2 + a \cdot 8 + b \cdot (-4) + c = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ ja $y = -8$
$x = 12$ ja $y = -12$
$x = 8$ ja $y = -4$

$a = -12,\ b = 20$ ja $c = 96$

Ratkaistaan yhtälöryhmä CAS-laskimella.

Ympyrän yhtälö on
$x^2 + y^2 - 12x + 20y + 96 = 0.$

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

Vastaus
$x^2 + y^2 - 12x + 20y + 96 = 0$

K37

Suoran $x+y-3=0$ ja ympyrän $x^2+y^2+2y-7=0$ leikkauspisteet toteuttavat molempien käyrien yhtälöt. Leikkauspisteet saadaan ratkaisemalla yhtälöistä muodostettu yhtälöpari

$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ x^2+y^2+2y-8=0. \end{cases}$$

Ratkaistaan suoran yhtälöstä toinen muuttujista, esimerkiksi x.

$$\begin{aligned} x+y-3&=0 \qquad \mid -y+3 \\ x&=-y+3 \end{aligned}$$

Sijoitetaan muuttujalle x saatu lauseke ympyrän yhtälöön.

$$\begin{aligned} x^2+y^2+2y-7&=0 && \text{Sijoitetaan } x=-y+3. \\ (-y+3)^2+y^2+2y-7&=0 && \text{Sievennetään yhtälö.} \\ y^2-6y+9+y^2+2y-7&=0 \\ 2y^2-4y+2&=0 \end{aligned}$$

Ratkaistaan toisen asteen yhtälö.

$$y=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 2\cdot 2}}{2\cdot 2}=\frac{4\pm\sqrt{0}}{4}=1$$

Lasketaan leikkauspisteen y-koordinaatti sijoittamalla saatu x-koordinaatin arvo suoran yhtälöön $x + y - 3 = 0$.

$$x + y - 3 = 0$$ Sijoitetaan $y = 1$.

$$x + 1 - 3 = 0$$

$$x - 2 = 0 \quad | +2$$

$$x = 2$$

Suoran ja ympyrän leikkauspiste on $(2,\ 1)$.

Vastaus
pisteessä $(2,\ 1)$

K38

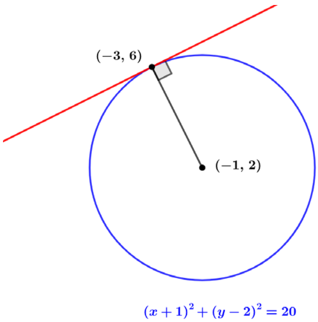
Tutkitaan, onko piste $(-3,\ 6)$ ympyrällä $(x+1)^2+(y-2)^2=20.$
Sijoitetaan pisteen koordinaatit ympyrän yhtälöön.

$$\begin{aligned}(x+1)^2+(y-2)^2&=20 \\ (-3+1)^2+(6-2)^2&=20 \\ (-2)^2+4^2&=20 \\ 20&=20 \\ &\text{tosi}\end{aligned}$$

Sijoitetaan $x=-3$ ja $y=6.$

Piste toteuttaa ympyrän yhtälön, joten piste on ympyrällä. Pisteen kautta voidaan piirtää ympyrälle yksi tangentti.

Ympyrän $(x+1)^2+(y-2)^2=20$ keskipiste on $(-1,\ 2).$



Ympyrän säde on ympyrän keskipisteen $(-1,\ 2)$ ja tangentin sivuamispisteen $(-3,\ 6)$ välinen jana. Lasketaan säteen kulmakerroin.

$$\frac{6-2}{-3-(-1)}=\frac{4}{-2}^{(2}=-2$$

Tangentti ja sivuamispisteeseen piirretty säde ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Ratkaistaan tangentin kulmakerroin k suorien kohtisuoruusehdosta.

$$k \cdot (-2) = -1 \quad |:(-2)$$

$$k_1 k_2 = -1$$

$$k = \frac{1}{2}$$

Tangentti kulkee pisteen $(-3,\ 6)$ kautta ja sen kulmakerroin on $\frac{1}{2}$.

Muodostetaan tangentin yhtälö.

$$y - y_0 = k(x - x_0),\text{ missä}$$

$$y_0 = 6,\ k = \frac{1}{2}\ \text{ ja }\ x_0 = -3$$

$$y - 6 = \frac{1}{2}(x - (-3))$$

$$y - 6 = \frac{1}{2}(x + 3)$$

$$y - 6 = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \qquad | +6$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{15}{2}$$

Vastaus

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{15}{2} \quad (x - 2y + 15 = 0)$$

K39

Muodostetaan yhtälöpari ja eliminoidaan yhtälöparista toisen asteen termit x^2 ja y^2.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x \qquad - 6 = 0 \mid \cdot(-1) \\ x^2 + y^2 + 8x - 6y \qquad = 0 \end{cases}$$

Kerrotaan toinen yhtälö luvulla -1.

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -x^2 - y^2 + 4x \qquad + 6 = 0 \\ x^2 + y^2 + 8x - 6y \qquad = 0 \end{cases} \\ \hline 12x - 6y + 6 = 0 \end{array}$$

Lasketaan yhtälöt yhteen.
Toisen asteen termit poistuvat.

Tulokseksi saatiin suoran yhtälö $12x - 6y + 6 = 0$. Ympyröiden yhteiset pisteet toteuttavat yhtälöparin ja siten myös saadun suoran yhtälön. Ratkaistaan suoran ja jommankumman ympyrän leikkauspisteet.

Ratkaistaan suoran yhtälöstä toinen muuttujista, esimerkiksi y.

$$\begin{aligned} 12x - 6y + 6 &= 0 && \mid -12x - 6 \\ -6y &= -12x - 6 && \mid : (-6) \\ y &= 2x + 1 \end{aligned}$$

Sijoitetaan muuttujalle y saatu lauseke jommankumman ympyrän yhtälöön.

$$x^2 + y^2 - 4x - 6 = 0 \qquad \text{Sijoitetaan } y = 2x + 1.$$
$$x^2 + (2x+1)^2 - 4x - 6 = 0$$
$$x^2 + 4x^2 + 4x + 1 - 4x - 6 = 0$$
$$5x^2 - 5 = 0 \quad | +5$$
$$5x^2 = 5 \quad |:5$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \sqrt{1} = 1 \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{1} = -1$$

Lasketaan leikkauspisteen y-koordinaatit sijoittamalla saadut x-koordinaatit suoran yhtälöön $y = 2x - 1$.

Kun $x = -1$, niin $y = 2 \cdot (-1) + 1 = -1$.

Kun $x = 1$, niin $y = 2 \cdot 1 + 1 = 3$.

Ympyröiden leikkauspisteet ovat $(-1,\ -1)$ ja $(1,\ 3)$.

Vastaus
$(-1,\ -1)$ ja $(1,\ 3)$

K40

Muokataan ympyrän yhtälö keskipistemuotoon

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2.$$

$$x^2+y^2-4x-2y-4=0$$

Ryhmitellään termit.

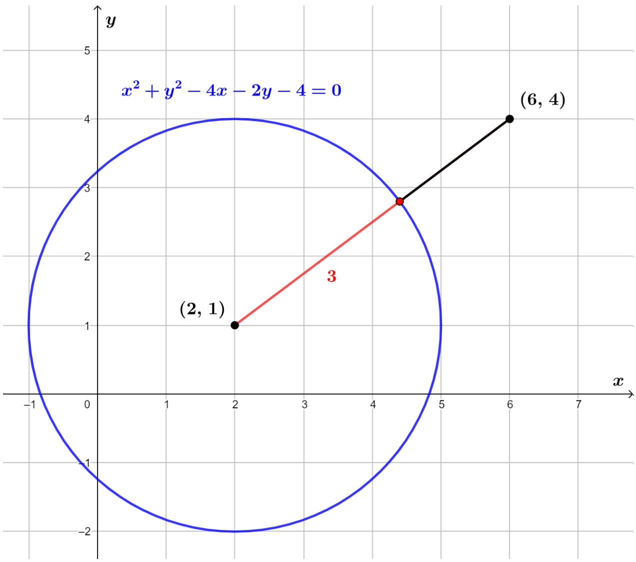
$$x^2-4x+y^2-2y=4$$

Täydennetään lausekkeet neliöiksi CAS-laskimella.

$$(x-2)^2-4+(y-1)^2-1=4 \qquad |+4+1$$

$$(x-2)^2+(y-1)^2=9$$

Ympyrän keskipiste on $(2,\,1)$ ja säde $r=\sqrt{9}=3$.



Lasketaan pisteen $(6, 4)$ etäisyys ympyrän keskipisteestä $(2,\ 1)$.

$$d = \sqrt{(6-2)^2 + (4-1)^2} \qquad\qquad d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= 5$$

Ympyrän säde 3 on pienempi kuin pisteen $(6,\ 4)$ etäisyys ympyrän keskipisteestä, joten piste on ympyrän ulkopuolella.

Pisteen $(6, 4)$ etäisyys ympyrästä saadaan vähentämällä pisteen $(6,\ 4)$ ja ympyrän keskipisteen välisestä etäisyydestä ympyrän säde 3.

Näin ollen etäisyys on $5 - 3 = 2$.

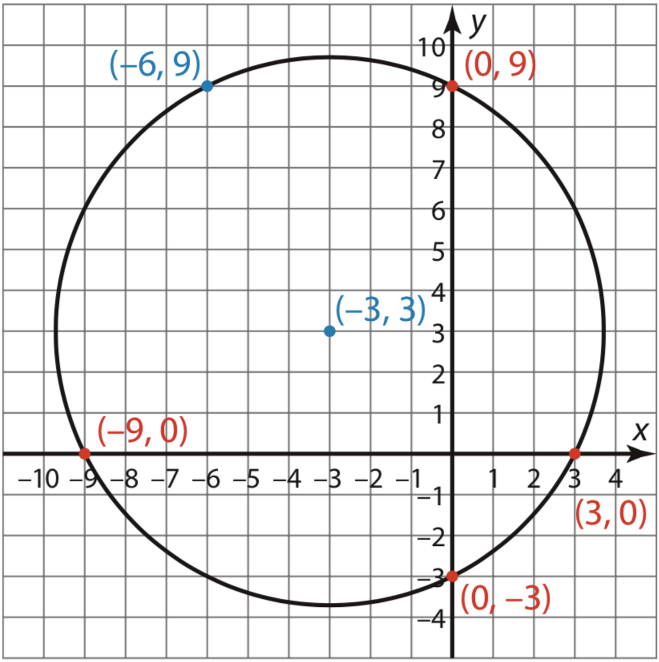
Vastaus
2

K41

a) Piirretään geometriaohjelmalla ympyrän keskipiste $(-3,\ 3)$ ja kehäpiste $(-6,\ 9)$. Piirretään näiden avulla ympyrä.

Merkitään kuvaan ympyrän ja koordinaattiakselien leikkauspisteet.

Kuvan perusteella ympyrä leikkaa
y-akselin pisteissä $(0, -3)$ ja $(0,\ 9)$ sekä
x-akselin pisteissä $(-9,\ 0)$ ja $(3,\ 0)$.



b) Ympyrä keskipiste on $(-3,\ 3)$ ja ympyrä kulkee pisteen $(-6,\ 9)$ kautta, joten ympyrän säde on

$$r=\sqrt{(-6-(-3))^2+(9-3)^2}=\sqrt{45}.$$

Muodostetaan ympyrän yhtälö.

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

Sijoitetaan $x_0=-3,\ y_0=3$ ja $r=\sqrt{45}$.

$$(x-(-3))^2+(y-3)^2=\left(\sqrt{45}\right)^2$$

$$(x+3)^2+(y-3)^2=45$$

Ympyrän ja y-akselin leikkauspisteiden x-koordinaatti on nolla. Sijoitetaan $x=0$ ympyrän yhtälöön ja ratkaistaan y.

$$(x+3)^2+(y-3)^2=45$$

$$(0+3)^2+(y-3)^2=45$$

$$y=-3 \quad \text{tai} \quad y=9$$

Sijoitetaan $x=0$.
Ratkaistaan muuttuja y CAS-laskimella.

Siis ympyrä leikkaa y-akselin pisteissä $(0,-3)$ ja $(0,\ 9)$.

Ympyrän ja x-akselin leikkauspisteissä y-koordinaatti on nolla. Sijoitetaan $y=0$ ympyrän yhtälöön ja ratkaistaan x.

$$(x+3)^2+(y-3)^2=45$$

$$(x+3)^2+(0-3)^2=45$$

$$x=-9 \quad \text{tai} \quad x=3$$

Sijoitetaan $y=0$.
Ratkaistaan muuttuja x CAS-laskimella.

Siis ympyrä leikkaa x-akselin pisteissä $(-9,\ 0)$ ja $(3,\ 0)$.

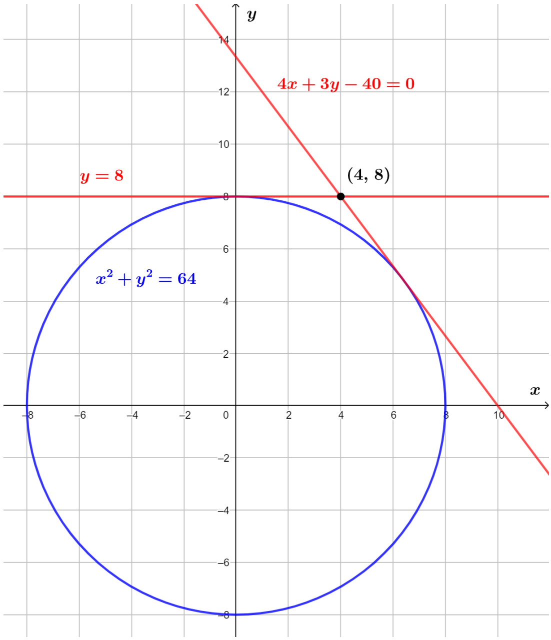
Vastaus

$(0,-3)$, $(0,\ 9)$, $(-9,\ 0)$ ja $(3,\ 0)$

K42

a) Piirretään ympyrä $x^2 + y^2 = 64$ ja piste $(4,\ 8)$.

Piirretään tangentit.



Tangenttien yhtälöt ovat $y = 8$ ja $4x + 3y - 40 = 0$.

b) Tutkitaan, onko piste $(4,\ 8)$ ympyrällä sijoittamalla pisteen koordinaatit ympyrän yhtälöön $x^2 + y^2 = 64$.

$x^2 + y^2 = 64$ Sijoitetaan $x = 4$ ja $y = 8$.

$4^2 + 8^2 = 64$

$80 = 64$

epätosi Piste ei ole ympyrällä.

Pisteen $(4,\ 8)$ ja ympyrän keskipisteen $(0,\ 0)$ välisen etäisyyden neliö 80 on suurempi kuin ympyrän säteen neliö 64, joten piste $(4,\ 8)$ on ympyrän ulkopuolella. Pisteen kautta voidaan piirtää ympyrälle kaksi tangenttia.

Merkitään tangentin kulmakerrointa kirjaimella k. Tangentti kulkee pisteen $(4,\ 8)$ kautta. Muodostetaan tangentin yhtälö.

$$y - 8 = k(x-4) \qquad y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y - 8 = kx - 4k \qquad \| -y + 8$$

$$0 = kx - y - 4k + 8$$

$$kx - y - 4k + 8 = 0$$

Ilmoitetaan tangentin yhtälö normaalimuodossa etäisyyden laskemista varten.

Muodostetaan lauseke ympyrän keskipisteen $(0,\ 0)$ etäisyydelle tangentista $kx - y - 4k + 8 = 0$.

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Sijoitetaan $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $a = k$, $b = -1$, $c = -4k + 8$

$$= \frac{|k \cdot 0 + (-1) \cdot 0 - 4k + 8|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}}$$

$$= \frac{|-4k + 8|}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

Ympyrän keskipisteen etäisyys tangentista on yhtä suuri kuin ympyrän säde $\sqrt{64}=8$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kulmakerroin k.

$$\frac{|-4k+8|}{\sqrt{k^2+1}}=8$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$k=-\frac{4}{3} \quad \text{tai} \quad k=0$$

Muodostetaan tangenttien yhtälöt sijoittamalla saadut kulmakertoimet tangentin yhtälöön $kx-y-4k+8=0$.

Kun $k=-\frac{4}{3}$, tangentin yhtälö on

$$-\frac{4}{3}\cdot x-y-4\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)+8=0$$
$$-\frac{4}{3}x-y+\frac{40}{3}=0 \quad |\cdot(-3)$$
$$4x+3y-40=0.$$

Kun $k=0$, tangentin yhtälö on

$$0\cdot x-y-4\cdot 0+8=0$$
$$-y+8=0 \quad |-8$$
$$-y=-8 \quad |\cdot(-1)$$
$$y=8.$$

Tangenttien yhtälöt ovat $4x+3y-40=0$ ja $y=8$ (eli $y=-\frac{4}{3}x+\frac{40}{3}$ ja $y=8$).

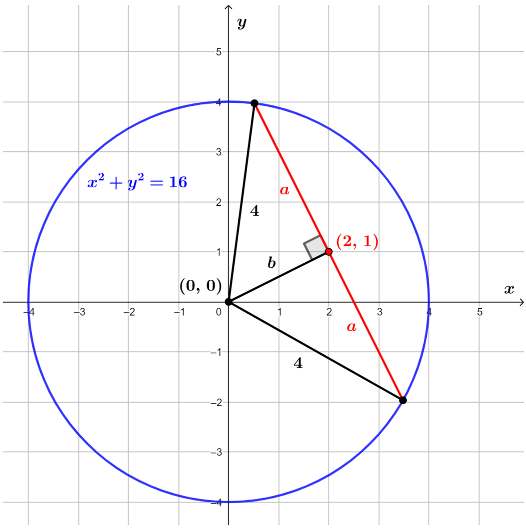
Vastaus

$y=8$ ja $4x+3y-40=0$ ($y=8$ ja $y=-\frac{4}{3}x+\frac{40}{3}$)

K43

Ympyrän $x^2 + y^2 = 16$ keskipiste on $(0,\ 0)$ ja säde on $r = \sqrt{16} = 4$.

Hahmotellaan mallikuva.



Ympyrän säde, ympyrän keskipisteen $(0,\ 0)$ ja jänteen keskipisteen $(2,\ 1)$ välinen jana sekä jänteen puolikas muodostavat suorakulmaisen kolmion. Merkitään kolmion kateettien pituuksia kirjaimilla a ja b.

Kateetin pituus b on ympyrän keskipisteen $(0,\ 0)$ ja jänteen keskipisteen $(2,\ 1)$ välinen etäisyys.

$$b = \sqrt{(2-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5}$$

Ratkaistaan Pythagoraan lauseen avulla toisen kateetin pituus a.

$$a^2 + b^2 = r^2 \qquad \text{Sijoitetaan } b = \sqrt{5} \text{ ja } r = 4.$$

$$a^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2 = 4^2$$

$$a^2 + 5 = 16 \qquad |-5$$

$$a^2 = 11$$

$$a = \sqrt{11} \quad \text{tai} \quad a = -\sqrt{11}$$

Pituus on positiivinen luku, joten $a = \sqrt{11}$.

Pituus a on puolet koko jänteen pituudesta. Jänteen pituus on siis $2a = 2\sqrt{11}$.

Vastaus

$2\sqrt{11}$

K44

Suora on ympyrän tangentti täsmälleen silloin, kun ympyrän keskipisteen etäisyys suorasta on yhtä suuri kuin ympyrän säde.

Kirjoitetaan ympyrän yhtälö keskipistemuotoon

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 14x + 24 &= 0 \\ x^2 + 14x \qquad + y^2 &= -24 \\ x^2 + 2\cdot x \cdot 7 + 7^2 + y^2 &= -24 + 7^2 \\ (x+7)^2 + y^2 &= -24 + 49 \\ (x+7)^2 + y^2 &= 25 \end{aligned}$$

Ryhmitellään termit.

Ympyrän keskipiste on $(-7,\ 0)$ ja säde $r = \sqrt{25} = 5.$

Lasketaan keskipisteen $(-7,\ 0)$ etäisyys suorasta $3x + 4y - 4 = 0.$

$$\begin{aligned} d &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{|3\cdot(-7) + 4\cdot 0 - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \\ &= \frac{|-25|}{\sqrt{25}} \\ &= \frac{25}{5} = 5 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $x_0 = -7,\ y_0 = 0,$ $a = 3,\ b = 4$ ja $c = -4.$

Ympyrän keskipisteen etäisyys suorasta on yhtä suuri kuin ympyrän säde.

On osoitettu, että suora $3x + 4y - 4 = 0$ on ympyrän $x^2 + y^2 + 14x + 24 = 0$ tangentti. $\square$

K45

a) Appletti piirtää yhtälöstä $x^2 + y^2 - 2kx + 14y + 49 - k^2 + k = 0$

ympyrän, kun $k < 0$ tai $k > \frac{1}{2}$.

Appletin perusteella ympyrän keskipisteen y-koordinaatti on aina -7 ja x-koordinaatti on k. Siis ympyrän keskipiste on $(k, -7)$.

b) Muokataan yhtälö $x^2 + y^2 - 2kx + 14y + 49 - k^2 + k = 0$

keskipistemuotoon $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

$x^2 + y^2 - 2kx + 14y + 49 - k^2 + k = 0$ Ryhmitellään termit.

$$x^2 - 2kx + y^2 + 14y = k^2 - k - 49$$

$$x^2 - 2 \cdot k \cdot x + k^2 + y^2 + 2 \cdot 7 \cdot y + 7^2 = k^2 - k - 49 + k^2 + 7^2$$

$$(x - k)^2 + (y + 7)^2 = 2k^2 - k$$

Yhtälö esittää ympyrää, kun sen oikealla puolella oleva luku eli ympyrän säteen neliö on positiivinen. Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan k.

$2k^2 - k > 0$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$k < 0$ tai $k > \frac{1}{2}$

Yhtälö $(x - k)^2 + (y + 7)^2 = 2k^2 - k$ siis esittää ympyrää, kun

$k < 0$ tai $k > \frac{1}{2}$.

Tällöin ympyrän keskipiste on $(k, -7)$.

Vastaus

Esittää ympyrää, kun $k < 0$ tai $k > \frac{1}{2}$. Keskipiste on $(k, -7)$.

K46

Antamalla vakiolle a kaksi arvoa saadaan kaksi parven ympyrää.

Kun $a = 0$, ympyrän yhtälö on $x^2 + y^2 - 5 = 0$.

Kun $a = 1$, ympyrän yhtälö on $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$.

Ratkaistaan näiden kahden ympyrän leikkauspisteet.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \end{cases}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$x = -\frac{11}{5}$ ja $y = \frac{2}{5}$ tai $x = 1$ ja $y = 2$

Näiden kahden ympyrän leikkauspisteet ovat $(-\frac{11}{5}, \frac{2}{5})$ ja $(1, 2)$.

Parven kaikkien ympyröiden ainoat mahdolliset yhteiset pisteet ovat siis $(-\frac{11}{5}, \frac{2}{5})$ ja $(1, 2)$.

Osoitetaan vielä, että kaikki parven ympyrät kulkevat näiden pisteiden kautta.

Sijoitetaan pisteen $(-\frac{11}{5},\ \frac{2}{5})$ koordinaatit parven yhtälöön.

$$x^2+y^2+2ax-4ay+6a-5=0 \qquad x=-\frac{11}{5},\ y=\frac{2}{5}$$

$$\left(-\frac{11}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2+2a\cdot\left(-\frac{11}{5}\right)-4a\cdot\left(\frac{2}{5}\right)+6a-5=0$$

$$\frac{121}{25}+\frac{4}{25}-\frac{22a}{5}-\frac{8a}{5}+6a-5=0$$

$$0=0$$

tosi

Sijoitetaan pisteen $(1,\ 2)$ koordinaatit parven yhtälöön.

$$x^2+y^2+2ax-4ay+6a-5=0 \qquad x=1,\ y=2$$

$$1^2+2^2+2a\cdot1-4a\cdot2+6a-5=0$$

$$1+4+2a-8a+6a-5=0$$

$$0=0$$

tosi

Pisteet $(-\frac{11}{5},\ \frac{2}{5})$ ja $(1,\ 2)$ toteuttavat ympyräparven yhtälön kaikilla vakion a arvoilla, joten kaikki parven ympyrät kulkevat pisteiden $(-\frac{11}{5},\ \frac{2}{5})$ ja $(1,\ 2)$ kautta.

On osoitettu, että parven ympyröillä on kaksi yhteistä pistettä, jotka ovat $(-\frac{11}{5},\ \frac{2}{5})$ ja $(1,\ 2)$. $\square$

Vastaus

Yhteiset pisteet ovat $(-\frac{11}{5},\ \frac{2}{5})$ ja $(1,\ 2)$.

K47

a) Paraabelin yhtälö $y = \frac{2}{3}x^2 + 1$ on muotoa $y = ax^2 + bx + c$, missä $a > 0$, joten paraabeli aukeaa ylöspäin.

b) Järjestellään yhtälön oikea puoli niin, että termit ovat astelukunsa mukaisessa järjestyksessä suurimmasta pienimpään.

$$x = y - \frac{1}{2}y^2$$
$$x = -\frac{1}{2}y^2 + y$$

Paraabelin yhtälö on muotoa $x = ay^2 + by + c$, missä $a < 0$, joten paraabeli aukeaa vasemmalle.

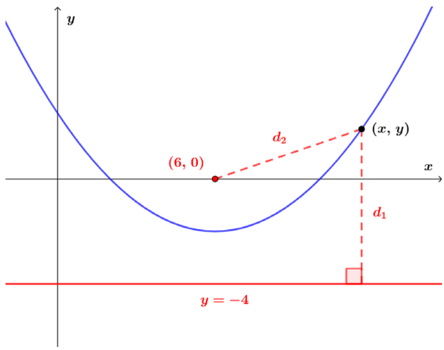
c) Paraabelin huippumuotoinen yhtälö on muotoa $y - y_0 = a(x - x_0)^2$, missä $a > 0$, joten paraabeli aukeaa ylöspäin.

d) Paraabelin huippumuotoinen yhtälö on muotoa $x - x_0 = a(y - y_0)^2$, missä $a > 0$, joten paraabeli aukeaa oikealle.

Vastaus
a) ylös
b) vasemmalle
c) ylös
d) oikealle

K48

Paraabelin jokaisen pisteen $(x,\ y)$ etäisyys johtosuorasta $y=-4$ on yhtä suuri kuin etäisyys polttopisteestä $(6,\ 0)$.



Muodostetaan lauseke pisteen $(x,\ y)$ etäisyydelle suorasta $y=-4$.

$$d_1=|y-(-4)|=|y+4|$$

Muodostetaan lauseke pisteen $(x,\ y)$ etäisyydelle pisteestä $(6,\ 0)$.

$$d_2=\sqrt{(x-6)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-6)^2+y^2}$$

Paraabelin johtosuora on vaakasuuntainen, joten paraabeli on pystysuuntaan aukeava. Paraabelin yhtälö on siis muotoa $y=ax^2+bx+c$.

Muodostetaan etäisyyksistä yhtälö ja ratkaistaan muuttuja y.

$$|y+4|=\sqrt{(x-6)^2+y^2}$$

$$y=\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$$

Ratkaistaan muuttuja y CAS-laskimella.

Paraabelin yhtälö on $y=\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$.

Vastaus

$y=\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$

K49

Paraabelin ja koordinaattiakselien leikkauspisteistä $(-1,\ 0)$, $(5,\ 0)$ ja $(0,\ 10)$ nähdään, että paraabeli leikkaa x-akselin kahdessa pisteessä. Tällöin paraabeli on pystysuuntaan aukeava.

Pystysuuntaan aukeavan paraabelin yhtälö on muotoa $y = ax^2 + bx + c$.

Jokainen annetuista pisteistä toteuttaa paraabelin yhtälön. Sijoittamalla pisteiden koordinaatit paraabelin yhtälöön saadaan kolme yhtälöä. Muodostetaan yhtälöryhmä ja ratkaistaan kertoimet a, b ja c.

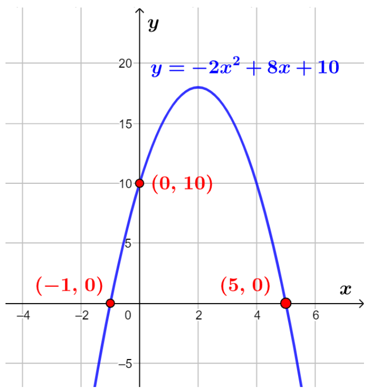
$$\begin{cases} 0 = a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c & x = -1,\ y = 0 \\ 0 = a\cdot 5^2 + b\cdot 5 + c & x = 5,\ y = 0 \\ 10 = a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c & x = 0,\ y = 10 \end{cases}$$

$a = -2$, $b = 8$ ja $c = 10$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

Paraabelin yhtälö on
$y = -2x^2 + 8x + 10.$

Piirretään paraabeli $y = -2x^2 + 8x + 10$ geometriaohjelmalla.

Havaitaan, että määritetty paraabeli kulkee annettujen pisteiden kautta.



Vastaus
$y = -2x^2 + 8x + 10$

K50

a) Paraabeli aukeaa pystysuuntaan, koska sen akseli on y-akselin suuntainen.

Sijoitetaan huipun $(0,\ 1)$ koordinaatit pystysuuntaan aukeavan paraabelin huippumuotoiseen yhtälöön.

$$y - y_0 = a(x - x_0)^2 \qquad \text{Sijoitetaan } x_0 = 0 \text{ ja } y_0 = 1.$$
$$y - 1 = a(x - 0)^2$$
$$y - 1 = ax^2$$

Piste $(3, -1)$ on paraabelilla, joten sen koordinaatit toteuttavat paraabelin yhtälön. Sijoitetaan koordinaatit yhtälöön ja ratkaistaan kerroin a.

$$y - 1 = ax^2 \qquad \text{Sijoitetaan } x = 3 \text{ ja } y = -1.$$
$$-1 - 1 = a \cdot 3^2 \qquad \text{Ratkaistaan } a.$$
$$-2 = 9a \quad |:9$$
$$a = -\frac{2}{9}$$

Paraabelin yhtälön huippumuoto on $y - 1 = -\frac{2}{9}x^2$. Sievennetään yhtälö normaalimuotoon.

$$y - 1 = -\frac{2}{9}x^2 \qquad |+1$$
$$y = -\frac{2}{9}x^2 + 1$$

Paraabelin yhtälön normaalimuoto on $y = -\frac{2}{9}x^2 + 1$.

b) Paraabeli aukeaa vaakasuuntaan, koska sen akseli on x-akselin suuntainen.

Sijoitetaan huipun $(0,\ 1)$ koordinaatit vaakasuuntaan aukeavan paraabelin huippumuotoiseen yhtälöön.

$$x - x_0 = a(y - y_0)^2 \qquad \text{Sijoitetaan } x_0 = 0 \text{ ja } y_0 = 1.$$
$$x - 0 = a(y-1)^2$$
$$x = a(y-1)^2$$

Piste $(3, -1)$ on paraabelilla, joten sen koordinaatit toteuttavat paraabelin yhtälön. Sijoitetaan koordinaatit yhtälöön ja ratkaistaan kerroin a.

$$x = a(y-1)^2 \qquad \text{Sijoitetaan } x = 3 \text{ ja } y = -1.$$
$$3 = a(-1-1)^2$$
$$3 = 4a \qquad |:4 \qquad \text{Ratkaistaan } a.$$
$$a = \frac{3}{4}$$

Paraabelin yhtälön huippumuoto on $x = \frac{3}{4}(y-1)^2$. Sievennetään yhtälö normaalimuotoon.

$$x = \frac{3}{4}(y-1)^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$x = \frac{3}{4}(y^2 - 2y + 1) \qquad \text{Poistetaan sulkeet.}$$
$$x = \frac{3}{4}y^2 - \frac{3}{2}y + \frac{3}{4}$$

Paraabelin yhtälön normaalimuoto on $x = \frac{3}{4}y^2 - \frac{3}{2}y + \frac{3}{4}$.

Vastaus

a) $y = -\frac{2}{9}x^2 + 1$

b) $x = \frac{3}{4}y^2 - \frac{3}{2}y + \frac{3}{4}$

K51

Muokataan yhtälö huippumuotoon $x - x_0 = a(y - y_0)^2$.

Täydennetään yhtälön oikea puoli neliöksi CAS-laskimella.

$$x = 8y^2 + 32y + 35$$

$$x = 8(y+2)^2 + 3 \qquad | -3$$

$$x - 3 = 8(y - (-2))^2$$

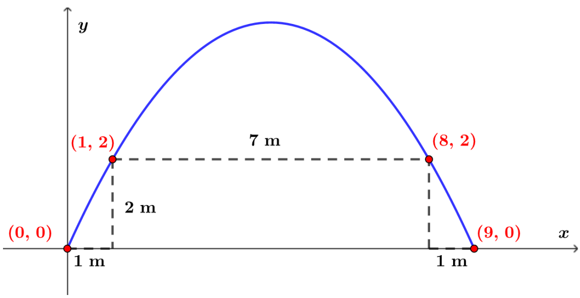
Huippumuotoisesta yhtälöstä nähdään, että paraabelin huippu on $(3, -2)$.

Vastaus

yhtälö $x - 3 = 8(y+2)^2$, huippu $(3, -2)$

K52

Sijoitetaan tunnelin poikkileikkaus koordinaatistoon seuraavasti.



Tunnelin poikkileikkaus on alaspäin aukeava paraabeli, joka kulkee pisteiden $(0,\ 0)$, $(1,\ 2)$ ja $(9,\ 0)$ kautta. Paraabelin yhtälö on muotoa $y = ax^2 + bx + c$. Muodostetaan pisteiden avulla yhtälöryhmä ja ratkaistaan kertoimet a, b ja c.

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ 0 = a \cdot 9^2 + b \cdot 0 + c \\ 2 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \end{cases} \qquad \begin{aligned} &x = 0,\ \ y = 0 \\ &x = 9,\ \ y = 0 \\ &x = 1,\ \ y = 2 \end{aligned}$$

$a = -\dfrac{1}{4}$, $b = \dfrac{9}{4}$ ja $c = 0$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

Tunnelin poikkileikkausta kuvaavan paraabelin yhtälö on
$y = -\dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{9}{4}x.$

Lentoradan korkein kohta on paraabelin huipussa. Selvitetään paraabelin huippu muokkaamalla paraabelin yhtälö huippumuotoon
$y - y_0 = a(x - x_0)^2.$

Täydennetään yhtälön oikea puoli neliöksi CAS-laskimella.

$$y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{9}{4}x$$

$$y=-\frac{1}{4}\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{81}{16} \qquad \left|-\frac{81}{16}\right.$$

$$y-\frac{81}{16}=-\frac{1}{4}\left(x-\frac{9}{2}\right)^2$$

Huippumuotoisesta yhtälöstä nähdään, että paraabelin huippu on $(\frac{9}{2}, \frac{81}{16})$.

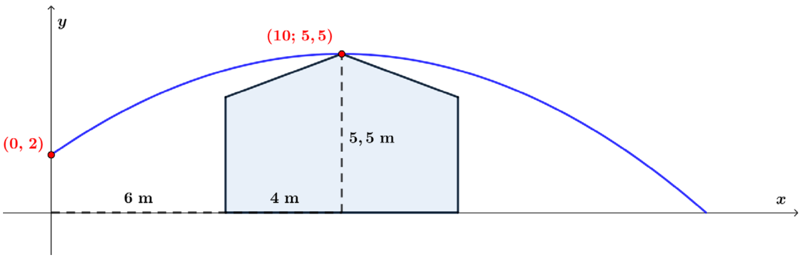
Korkein tunnelin kohta on siis $\frac{81}{16}\text{ m}=5{,}062...\text{ m}\approx 5{,}1\text{ m}$ korkea.

Vastaus

5,1 m

K53

Sijoitetaan Sepon heittämän pallon lentorata 23 m koordinaatistoon kuvan mukaisesti.



Pallon lentorata on alaspäin aukeava paraabeli, joka kulkee pisteen $(0,\ 2)$ kautta, ja jonka huippu on $(10;\ 5{,}5)$. Sijoitetaan huipun koordinaatit pystysuuntaan aukeavan paraabelin huippumuotoiseen yhtälöön.

$$y - y_0 = a(x - x_0)^2 \qquad \text{Sijoitetaan } x_0 = 10 \text{ ja } y_0 = 5{,}5.$$
$$y - 5{,}5 = a(x - 10)^2$$

Piste $(0,\ 2)$ on paraabelilla, joten sen koordinaatit toteuttavat paraabelin yhtälön. Sijoitetaan koordinaatit yhtälöön ja ratkaistaan kerroin a.

$$y - 5{,}5 = a(x - 10)^2 \qquad \text{Sijoitetaan } x = 0 \text{ ja } y = 2.$$
$$2 - 5{,}5 = a(0 - 10)^2 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$a = -\frac{7}{200}$$

Paraabelin huippumuotoinen yhtälö on $y - 5{,}5 = -\frac{7}{200}(x - 10)^2$.

Heiton pituus saadaan paraabelin ja x-akselin (positiivisesta) leikkauskohdasta. Ratkaistaan x-koordinaatti, kun $y = 0$.

$y - 5{,}5 = -\frac{7}{200}(x-10)^2$ Sijoitetaan $y = 0$.

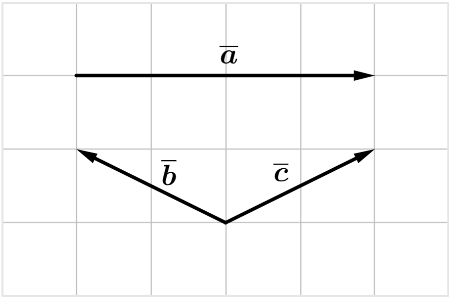
$0 - 5{,}5 = -\frac{7}{200}(x-10)^2$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$x = -2{,}535...$ tai $x = 22{,}535...$

Pallo osui ensimmäisen kerran maahan $22{,}535...\text{ m} \approx 23\text{ m}$ päässä Seposta.

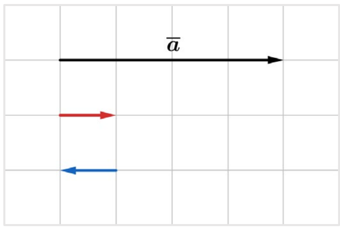
Vastaus

K54

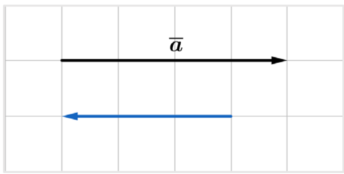


Vektorin $\overline{a}$ pituus on 12 ja sitä kuvaavan nuolen pituus on 4 ruutua. Yksi ruutu vastaa siis pituutta 3.

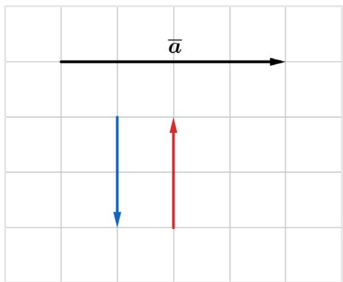
a) Piirretään vektorin $\overline{a}$ kanssa samansuuntainen vektori ja vastakkaissuuntainen vektori, joiden pituus on yksi ruutu.



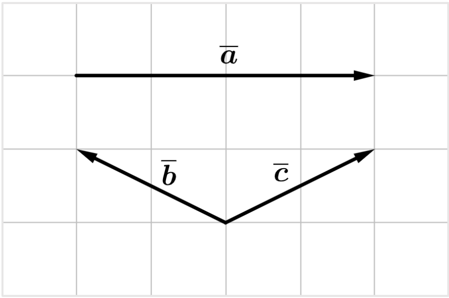
b) Piirretään vektorin $\overline{a}$ kanssa vastakkaissuuntainen vektori, jonka pituus on 3 ruutua.



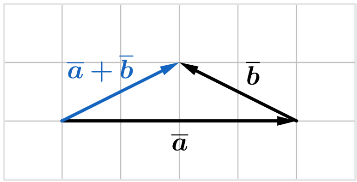
c) Piirretään vektoria $\overline{a}$ vastaan kohtisuorat vektorit, joiden pituus on 2 ruutua.



K55

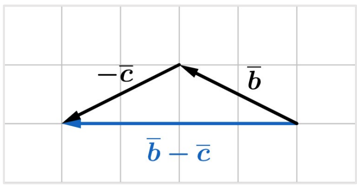


a) Piirretään vektori $\overline{a}$ ja sen loppupisteestä alkava vektori $\overline{b}$. Piirretään summavektori $\overline{a}+\overline{b}$.

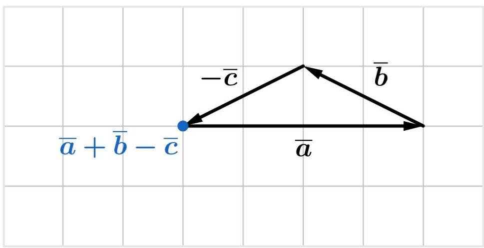


$-\overline{c}$

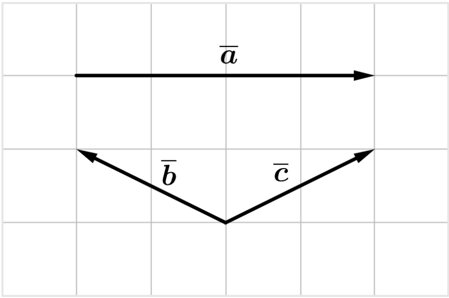
b) Piirretään vektori $\overline{b}$. Piirretään vektorin $\overline{c}$ vastavektori $-\overline{c}$ ja siirretään se vektorin $\overline{b}$ loppupisteeseen. Piirretään erotusvektori $\overline{b}-\overline{c}$.



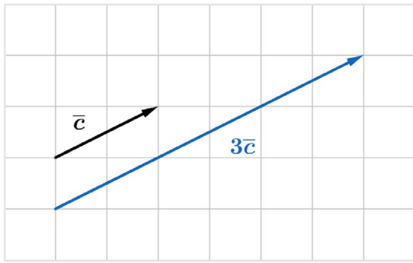
c) Piirretään vektori $\overline{a}$ ja sen loppupisteestä alkava vektori $\overline{b}$. Siirretään vektori vektorin $\overline{b}$ loppupisteeseen. Piirretään vektori $\overline{a}+\overline{b}-\overline{c}$. Päädytään samaan pisteeseen.



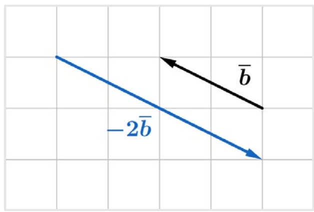
K56



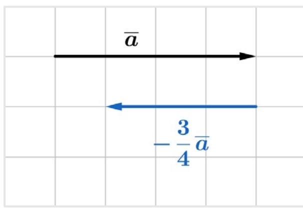
a) Vektori $3\overline{c}$ on kolme kertaa niin pitkä kuin vektori $\overline{c}$ ja sen kanssa samansuuntainen.



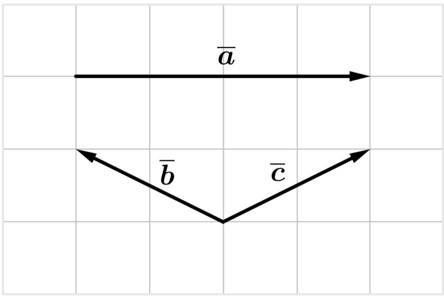
b) Vektori $-2\overline{b}$ on kaksi kertaa niin pitkä kuin vektori $\overline{b}$ ja sen kanssa vastakkaissuuntainen.



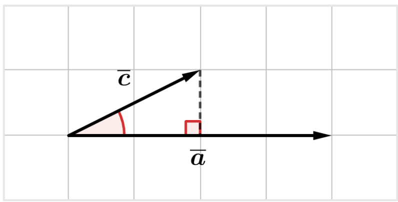
c) Vektori $-\dfrac{3}{4}\overline{a}$ on $\dfrac{3}{4}$ niin pitkä kuin vektori $\overline{a}$ ja sen kanssa vastakkaissuuntainen.



K57



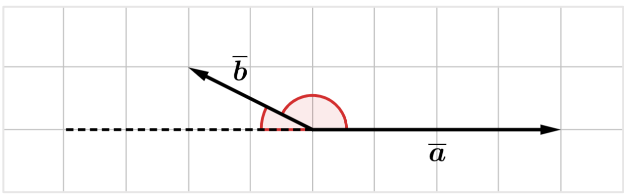
a) Siirretään vektori $\overline{c}$ alkamaan samasta pisteestä kuin vektori $\overline{a}$. Ratkaistaan vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{c}$ välinen kulma suorakulmaisesta kolmiosta.



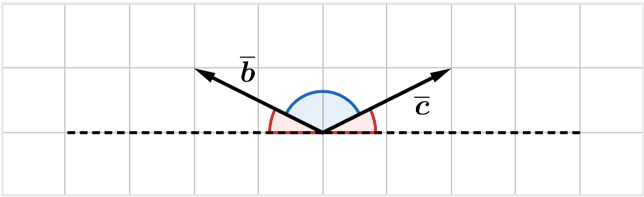
$$\tan(\sphericalangle(\overline{a},\overline{c})) = \frac{1}{2}$$

$$\sphericalangle(\overline{a},\overline{c}) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 26{,}565...^\circ \approx 27^\circ$$

b) Siirretään vektori $\overline{b}$ alkamaan samasta pisteestä kuin vektori $\overline{a}$. Vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ välisen kulman saa, kun vähentää oikokulmasta a-kohdan kulman: $180^\circ - 26{,}565...^\circ \approx 153^\circ$.



c) Siirretään vektori $\overline{c}$ alkamaan samasta pisteestä kuin vektori $\overline{b}$. Vektorien $\overline{b}$ ja $\overline{c}$ välisen kulman saa, kun vähentää oikokulmasta kaksi a-kohdan kulmaa: $180° - 2 \cdot 26{,}565...° \approx 127°$.



Vastaus

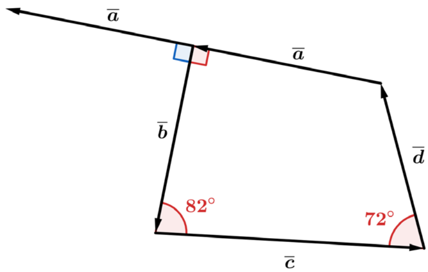
a) $27°$

b) $153°$

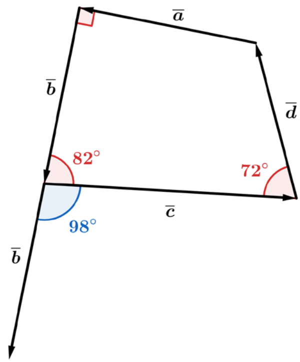
c) $127°$

K58

a) Siirretään vektori $\overline{a}$ alkamaan samasta pisteestä kuin vektori $\overline{b}$. Vektorien välinen kulma on $\sphericalangle(\overline{a},\overline{b}) = 180° - 90° = 90°$.

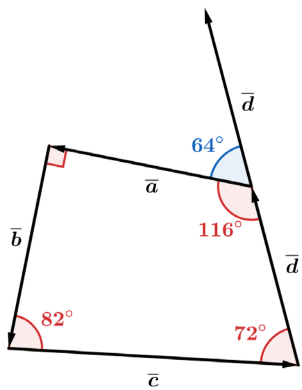


b) Siirretään vektori $\overline{b}$ alkamaan samasta pisteestä kuin vektori $\overline{c}$. Vektorien välinen kulma on $\sphericalangle(\overline{b},\overline{c}) = 180° - 82° = 98°$.



c) Siirretään vektori $\overline{d}$ alkamaan samasta pisteestä kuin vektori $\overline{a}$. Nelikulmion kulmien summa on aina $180°$, joten nelikulmion neljäs kulma on $360° - 90° - 82° - 72° = 116°$.

Vektorien välinen kulma on $\sphericalangle(\overline{a},\overline{d}) = 180° - 116° = 64°$.



Vastaus

a) $90°$

b) $98°$

c) $64°$

K59

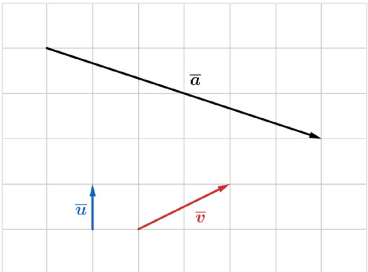
a) Ratkaistaan yhtälöstä vektori $\overline{a}$.

$$\begin{aligned} 2\overline{a}+3\overline{b} &= 3(9\overline{b}-2\overline{a}) \\ 2\overline{a}+3\overline{b} &= 27\overline{b}-6\overline{a} && \mid -3\overline{b}+6\overline{a} \\ 2\overline{a}+6\overline{a} &= 27\overline{b}-3\overline{b} \\ 8\overline{a} &= 24\overline{b} && \mid : 8 \\ \overline{a} &= 3\overline{b} \end{aligned}$$

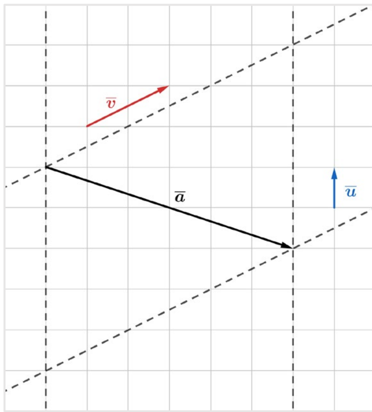
Koska kerroin $3 > 0$, vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat samansuuntaiset.

b) Koska $\overline{a} = 3\overline{b}$, vektorin $\overline{a}$ pituus on kolminkertainen vektorin $\overline{b}$ pituuteen verrattuna.

K60

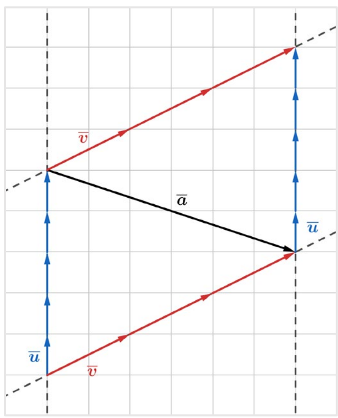


Piirretään vektorin $\overline{a}$ alku- ja loppupisteen kautta vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ suuntaiset suorat.



Vektorin $\overline{a}$ alkupisteestä päästään sen loppupisteeseen kulkemalla
3 kertaa vektori $\overline{v}$ ja
5 kertaa vektorin $\overline{u}$ vastavektori $-\overline{u}$.

$\overline{a} = 3\overline{v} - 5\overline{u} = -5\overline{u} + 3\overline{v}$



Vastaus
$\overline{a} = -5\overline{u} + 3\overline{v}$

K61

a) Lasketaan vektorin $\overline{a} = 3\overline{i} + 4\overline{j}$ pituus.

$$|\overline{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, \text{ missä}$$
$$a_x = 3 \text{ ja } a_y = 4$$

$$= \sqrt{9+16}$$
$$= \sqrt{25} = 5$$

b) Lasketaan vektorin $\overline{a} = -2\overline{i} + 2\overline{j}$ pituus.

$$|\overline{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2}$$

$$|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, \text{ missä}$$
$$a_x = -2 \text{ ja } a_y = 2$$

$$= \sqrt{4+4}$$
$$= \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

c) Lasketaan vektorin $\overline{a} = 7\overline{i} - 4\overline{j}$ pituus.

$$|\overline{a}| = \sqrt{7^2 + (-4)^2}$$

$$|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, \text{ missä}$$
$$a_x = 7 \text{ ja } a_y = -4$$

$$= \sqrt{49+16}$$
$$= \sqrt{65}$$

Vastaus

a) 5

b) $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

c) $\sqrt{65}$

K62

a) Määritetään pisteen $A = (0,\ 5)$ paikkavektori.

$\overline{OA} = 0\overline{i} + 5\overline{j} = 5\overline{j}$

Lasketaan vektorin $\overline{OA}$ pituus.

$$|\overline{OA}| = \sqrt{0^2 + 5^2}$$

$$= \sqrt{5^2}$$
$$= 5$$

$|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$, missä
$a_x = 0$ ja $a_y = 5$

b) Määritetään pisteen $B = (2,\ 2)$ paikkavektori.

$\overline{OB} = 2\overline{i} + 2\overline{j}$

Lasketaan vektorin $\overline{OB}$ pituus.

$$|\overline{OB}| = \sqrt{2^2 + 2^2}$$

$$= \sqrt{4+4}$$
$$= \sqrt{8}$$
$$= 2\sqrt{2}$$

$|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$, missä
$a_x = 2$ ja $a_y = 2$

c) Määritetään pisteen $C=(-4,\ 1)$ paikkavektori.

$\overline{OC}=-4\overline{i}+\overline{j}$

Lasketaan vektorin $\overline{OC}$ pituus.

$$|\overline{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}\text{, missä}$$
$$a_x=-4 \text{ ja } a_y=1$$

$$\begin{aligned}|\overline{OC}|&=\sqrt{(-4)^2+1^2}\\&=\sqrt{16+1}\\&=\sqrt{17}\end{aligned}$$

Vastaus

a) $\overline{OA}=5\overline{j},\ |\overline{OA}|=5$

b) $\overline{OB}=2\overline{i}+2\overline{j},\ |\overline{OB}|=2\sqrt{2}$

c) $\overline{OC}=-4\overline{i}+\overline{j},\ |\overline{OC}|=\sqrt{17}$

K63

a) Määritetään vektori $\overline{AB}$.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (x_2 - x_1)\overline{i} + (y_2 - y_1)\overline{j}\\ &= (-5-3)\overline{i} + (1-(-7))\overline{j}\\ &= 8\overline{i} + 8\overline{j}\end{aligned}$$

$A = (x_1, y_1) = (3, -7)$
$B = (x_2, y_2) = (-5, 1)$

b) Pisteiden $A = (3, 7)$ ja $B = (-5, 1)$ välinen etäisyys on vektorin $\overline{AB} = 8\overline{i} + 8\overline{j}$ pituus.

$$\begin{aligned}|\overline{AB}| &= \sqrt{8^2 + 8^2}\\ &= \sqrt{64 + 64}\\ &= \sqrt{128}\\ &= 8\sqrt{2}\end{aligned}$$

$|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$, missä
$a_x = 8$ ja $a_y = 8$

Siis pisteiden A ja B välinen etäisyys on $8\sqrt{2}$.

Vastaus

a) $\overline{AB} = 8\overline{i} + 8\overline{j}$

b) $\sqrt{128} = 8\sqrt{2}$

K64

a) Lasketaan vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ pistetulo.

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = -6\cdot(-4)+2\cdot(-9)$$

$$= 24-18 = 6$$

$\overline{a} = -6\overline{i} + 2\overline{j}$
$\overline{b} = -4\overline{i} - 9\overline{j}$

Koska pistetulo ei ole nolla, vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ eivät ole kohtisuorassa toisiaan vastaan.

b) Lasketaan vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ pistetulo.

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = -14\cdot 2+4\cdot 7$$

$$= -28+28 = 0$$

$\overline{a} = -14\overline{i} + 4\overline{j}$
$\overline{b} = 2\overline{i} + 7\overline{j}$

Koska pistetulo on nolla, vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

c) Lasketaan vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ pistetulo.

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = 0\cdot(-7)+7\cdot 1$$

$$= 0+7 = 7$$

$\overline{a} = 7\overline{j}$
$\overline{b} = -7\overline{i} + \overline{j}$

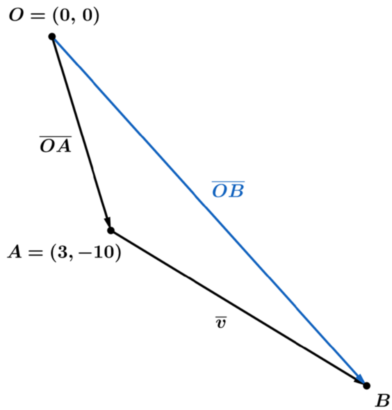
Koska pistetulo ei ole nolla, vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ eivät ole kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Vastaus

a) $\overline{a}\cdot\overline{b} = 6,$ eivät ole kohtisuorassa
b) $\overline{a}\cdot\overline{b} = 0,$ ovat kohtisuorassa
c) $\overline{a}\cdot\overline{b} = 7,$ eivät ole kohtisuorassa

K65

a) Merkitään vektorin alkupistettä $A=(3,-10)$ ja loppupistettä B.
On selvitettävä loppupiste B, kun lähdetään pisteestä A ja kuljetaan vektori $\overline{v}$.



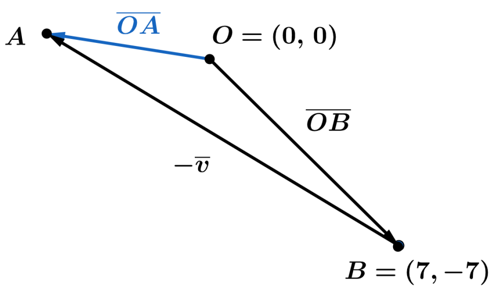
$\overline{OA}=3\overline{i}-10\overline{j}$
$\overline{v}=13\overline{i}-8\overline{j}$

Määritetään loppupisteen B paikkavektori.

$$\begin{aligned}\overline{OB}&=\overline{OA}+\overline{v}\\&=3\overline{i}-10\overline{j}+(13\overline{i}-8\overline{j})\\&=3\overline{i}-10\overline{j}+13\overline{i}-8\overline{j}\\&=16\overline{i}-18\overline{j}\end{aligned}$$

Loppupiste on siis $B=(16,-18)$.

b) Merkitään alkupistettä A ja loppupistettä $B=(7,-7)$. On selvitettävä alkupiste A, kun lähdetään pisteestä B ja kuljetaan vektorin $\overline{v}$ vastavektori $-\overline{v}$.



Määritetään alkupisteen A paikkavektori.

$$\overline{OB} = 7\overline{i} - 7\overline{j}$$
$$\overline{v} = 13\overline{i} - 8\overline{j}$$

$$\begin{aligned}\overline{OA} &= \overline{OB} - \overline{v} \\ &= 7\overline{i} - 7\overline{j} - (13\overline{i} - 8\overline{j}) \\ &= 7\overline{i} - 7\overline{j} - 13\overline{i} + 8\overline{j} \\ &= -6\overline{i} + \overline{j}\end{aligned}$$

Alkupiste on siis $A = (-6,\ 1)$.

Vastaus

a) $(16, -18)$

b) $(-6,\ 1)$

K66

a) Lasketaan vektorin $\overline{a} = 3\overline{i} - \overline{j}$ pituus.

$$|\overline{a}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

Muodostetaan vektorin $\overline{a}$ suuntainen yksikkövektori.

$$\begin{aligned}\overline{a}^0 &= \frac{1}{|\overline{a}|}\overline{a} \\ &= \frac{1}{\sqrt{10}}(3\overline{i} - \overline{j}) \\ &= \frac{3}{\sqrt{10}}\overline{i} - \frac{1}{\sqrt{10}}\overline{j}\end{aligned}$$

b) Kun yksikkövektori $\overline{a}^0$ kerrotaan luvulla $-3\sqrt{10}$, saadaan vektori, joka on vastakkaissuuntainen vektorin $\overline{a}$ kanssa ja jonka pituus on $3\sqrt{10}$.

$$\begin{aligned}\overline{b} &= -3\sqrt{10} \cdot \overline{a}^0 \\ &= -3\sqrt{10} \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\overline{i} - \frac{1}{\sqrt{10}}\overline{j}\right) \\ &= -9\overline{i} + 3\overline{j}\end{aligned}$$

Vastaus

a) $\overline{a}^0 = \frac{3}{\sqrt{10}}\overline{i} - \frac{1}{\sqrt{10}}\overline{j}$

b) $\overline{b} = -9\overline{i} + 3\overline{j}$

K67

Olkoon päätepiste B. Selvitetään piste B määrittämällä sen paikkavektori.

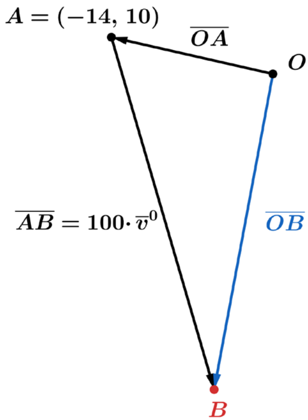
Määritetään vektorin $\overline{v} = 2\overline{i} + \overline{j}$ suuntainen yksikkövektori.

$$\overline{v}^0 = \frac{7}{25}\overline{i} - \frac{24}{25}\overline{j}$$

Määritetään yksikkövektori CAS-laskimella.

Koska pisteestä $A = (-14,\ 10)$ siirrytään 100 pituusyksikköä vektorin $\overline{v}$ suuntaan, on vektori $\overline{AB} = 100 \cdot \overline{v}^0$.

Hahmotellaan mallikuva ja määritetään pisteen B paikkavektori.



$$\begin{aligned}
\overline{OB} &= \overline{OA} + \overline{AB} \\
&= \overline{OA} + 106 \cdot \overline{v}^0 \\
&= -14\overline{i} + 10\overline{j} + 100 \cdot \left(\frac{7}{25}\overline{i} - \frac{24}{25}\overline{j}\right) \\
&= -14\overline{i} + 10\overline{j} + 28\overline{i} - 96\overline{j} \\
&= 14\overline{i} - 86\overline{j}
\end{aligned}$$

Päädytään pisteeseen $B = (14,\ -86)$.

Vastaus
$(14, -86)$

K68

On etsittävä sellaiset luvut r ja s, että $\overline{a} = r\overline{u} + s\overline{v}$.

Muokataan yhtälöä.

$$\overline{a} = r\overline{u} + s\overline{v}$$

$\overline{a} = -6\overline{i} - \overline{j}$
$\overline{u} = \overline{i} - 2\overline{j}$
$\overline{v} = 2\overline{i} + \overline{j}$

$$\begin{aligned}
-6\overline{i} - \overline{j} &= r(\overline{i} - 2\overline{j}) + s(2\overline{i} + \overline{j}) \\
-6\overline{i} - \overline{j} &= r\overline{i} - 2r\overline{j} + 2s\overline{i} + s\overline{j} \\
-6\overline{i} - \overline{j} &= (r + 2s)\overline{i} + (-2r + s)\overline{j}
\end{aligned}$$

Komponenttiesitys on yksikäsitteinen, joten vektorien $\overline{i}$ ja $\overline{j}$ kertoimien on oltava yhtä suuret yhtälön molemmilla puolilla.

$$\begin{cases} r + 2s = -6 \\ -2r + s = -1 \end{cases}$$

$\overline{i}$:n kertoimien tulee olla yhtä suuret.
$\overline{j}$:n kertoimien tulee olla yhtä suuret.

Käytetään yhteenlaskumenetelmää. Valitaan poistettavaksi muuttujaksi r. Ratkaistaan s.

$$\begin{cases} r + 2s = -6 & | \cdot 2 \\ -2r + s = -1 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 2r + 4s = -12 \\ -2r + s = -1 \end{cases}$$

$$5s = -13 \qquad |:5$$

$$s = -\frac{13}{5}$$

Sijoitetaan $s=-\frac{13}{5}$ alkuperäisen yhtälöparin ylempään yhtälöön ja ratkaistaan r.

$$
\begin{aligned}
r+2s&=-6 &&|-2s\\
r+2\cdot\left(-\frac{13}{5}\right)&=-6\\
r-\frac{26}{5}&=-6 &&|+\frac{26}{5}\\
r&=-6+\frac{26}{5}\\
r&=-\frac{4}{5}
\end{aligned}
$$

Siis $\overline{a}=r\overline{u}+s\overline{v}=-\frac{4}{5}\overline{u}-\frac{13}{5}\overline{v}$

Vastaus

$\overline{a}=-\frac{4}{5}\overline{u}-\frac{13}{5}\overline{v}$

K69

Lasketaan vektorien $\overline{a} = -3\overline{i} + 4\overline{j}$ ja $\overline{b} = 5\overline{i} + 12\overline{j}$ pistetulo ja pituudet.

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = -3 \cdot 5 + 4 \cdot 12 = -15 + 48 = 33$$

$$|\overline{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$|\overline{b}| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$

Lasketaan vektorien välisen kulman suuruus.

$$\begin{aligned} \cos(\overline{a}, \overline{b}) &= \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|} \\ &= \frac{33}{5 \cdot 13} \\ &= \frac{33}{65} \end{aligned}$$

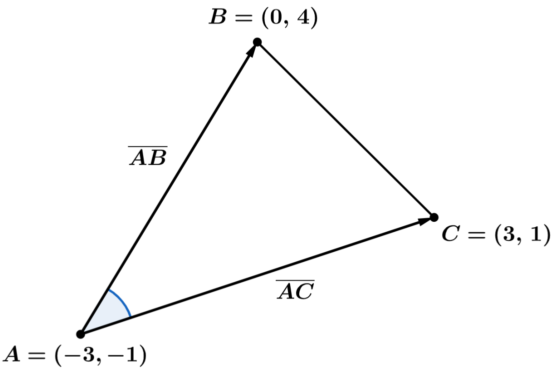
$$\begin{aligned} \sphericalangle(\overline{a}, \overline{b}) &= \cos^{-1}\left(\frac{33}{65}\right) \\ &= 59{,}489...^\circ \\ &\approx 59{,}5^\circ \end{aligned}$$

Vastaus

$59{,}5^\circ$

K70

Merkitään kolmion kärkipisteitä $A=(-3,-1)$, $B=(0,\ 4)$ ja $C=(3,\ 1)$.



Kulma A on vektorien $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$ välinen kulma. Muodostetaan vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$ ja lasketaan niiden pituudet.

$$\overline{AB}=(0-(-3))\overline{i}+(4-(-1))\overline{j}=3\overline{i}+5\overline{j}$$

$$|\overline{AB}|=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$$

$$\overline{AC}=(3-(-3))\overline{i}+(1-(-1))\overline{j}=6\overline{i}+2\overline{j}$$

$$|\overline{AC}|=\sqrt{6^2+2^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

Lasketaan pistetulo.

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}=3\cdot6+5\cdot2$$

$$\overline{AB}=4\overline{i}+5\overline{j}$$
$$\overline{AC}=6\overline{i}+2\overline{j}$$

$$=18+10$$
$$=28$$

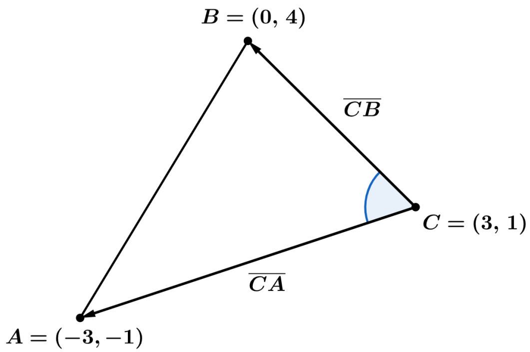
Lasketaan vektorien $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$ välisen kulman suuruus.

$$\cos(\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{28}{\sqrt{34} \cdot 2\sqrt{10}}$$

$$\cos(\overline{a}, \overline{b}) = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|}$$

$$\begin{aligned} \sphericalangle(\overline{AB}, \overline{AC}) &= \cos^{-1}\left(\frac{28}{\sqrt{34} \cdot 2\sqrt{10}}\right) \\ &= 40{,}601...^\circ \\ &\approx 41^\circ \end{aligned}$$

Siis $\sphericalangle A = 41^\circ$.



Kulma C on vektorien $\overline{CA}$ ja $\overline{CB}$ välinen kulma. Muodostetaan vektorit $\overline{CA}$ ja $\overline{CB}$ ja lasketaan niiden pituudet.

$$\begin{aligned} \overline{CA} &= -\overline{AC} \\ &= -(6\overline{i} + 2\overline{j}) = -6\overline{i} - 2\overline{j} \end{aligned}$$

$$|\overline{CA}| = |\overline{AC}| = 2\sqrt{10}$$

$$\overline{CB} = (0-3)\overline{i} + (4-1)\overline{j} = -3\overline{i} + 3\overline{j}$$

$|\overline{CB}| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

Lasketaan pistetulo.

$$\overline{CA} \cdot \overline{CB} = -6 \cdot (-3) + (-2) \cdot 3$$

$$\overline{CA} = -6\overline{i} - 2\overline{j}$$
$$\overline{CB} = -3\overline{i} + 3\overline{j}$$

$$= 18 - 6$$
$$= 12$$

Lasketaan vektorien $\overline{CA}$ ja $\overline{CB}$ välisen kulman suuruus.

$$\cos(\overline{CA}, \overline{CB}) = \frac{12}{2\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{2}}$$

$$\cos(\overline{a}, \overline{b}) = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|}$$

$$\sphericalangle(\overline{CA}, \overline{CB}) = \cos^{-1}\left(\frac{12}{2\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{2}}\right)$$
$$= 63{,}434...^\circ$$
$$\approx 63^\circ$$

Siis $\sphericalangle C = 63^\circ$.

Lasketaan kulman B suuruus.

$$\sphericalangle B = 180^\circ - \sphericalangle A - \sphericalangle C$$

Kolmion kulmien summa on 180°.

$$= 180^\circ - 40{,}601...^\circ - 63{,}434...^\circ$$
$$= 75{,}963...^\circ$$
$$\approx 76^\circ$$

Vastaus

41°, 63° ja 76°

K71

Muodostetaan lausekkeet vektorien $\overline{a} = 24\overline{i} - 13t\overline{j}$ ja $\overline{b} = 12t\overline{i} - 25\overline{j}$ pituuksille.

$$|\overline{a}| = \sqrt{24^2 + (-13t)^2}$$

$$|\overline{b}| = \sqrt{(12t)^2 + (-25)^2}$$

Pituudet $|\overline{a}|$ ja $|\overline{b}|$ ovat yhtä suuret. Ratkaistaan t.

$$|\overline{a}| = |\overline{b}|$$

$$\sqrt{24^2 + (-13t)^2} = \sqrt{(12t)^2 + (-25)^2}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$t = -\frac{7}{5} \text{ tai } t = \frac{7}{5}$$

Vastaus

$t = -\frac{7}{5}$ tai $t = \frac{7}{5}$

K72

a) Appletilla nähdään, että vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat yhdensuuntaiset, kun $t=-1$ tai $t=1$. Kun $t=-1$, vektorit ovat samansuuntaiset. Kun $t=1$, vektorit ovat vastakkaissuuntaiset.

b) Vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun löytyy sellainen nollasta eroava reaaliluku r, että $\bar{a}=r\bar{b}$.

Tutkitaan, onko yhtälöllä $\bar{a}=r\bar{b}$, ratkaisu.

$$\bar{a}=r\bar{b} \qquad \bar{a}=t\bar{i}-2\bar{j} \text{ ja } \bar{b}=-2\bar{i}+4t\bar{j}$$

$$t\bar{i}-2\bar{j}=r(-2\bar{i}+4t\bar{j})$$

$$t\bar{i}-2\bar{j}=-2r\bar{i}+4rt\bar{j}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} t=-2r \\ -2=4rt \end{cases} \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$r=-\frac{1}{2} \text{ ja } t=1 \text{ tai } r=\frac{1}{2} \text{ ja } t=-1$$

Vektorit ovat siis yhdensuuntaiset, kun $t=-1$ tai $t=1$.

Kun $t=-1$, on $\bar{a}=r\bar{b}=\frac{1}{2}\bar{b}$. Koska kerroin $\frac{1}{2}>0$, ovat vektorit tällöin samansuuntaiset.

Kun $t=1$, on $\bar{a}=r\bar{b}=-\frac{1}{2}\bar{b}$. Koska kerroin $-\frac{1}{2}<0$, ovat vektorit tällöin vastakkaissuuntaiset.

Vastaus
Yhdensuuntaiset, kun $t=-1$ tai $t=1$.
Kun $t=-1$, samansuuntaiset.
Kun $t=1$, vastakkaissuuntaiset.

K73

Määritetään vektorien $\overline{a} = t\overline{i} + 2\overline{j}$ ja $\overline{b} = \overline{i} + 3\overline{j}$ pituudet ja pistetulo.

$|\overline{a}| = \sqrt{t^2 + 2^2} = \sqrt{t^2 + 4}$

$|\overline{b}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$\overline{a} \cdot \overline{b} = t \cdot 1 + 2 \cdot 3 = t + 6$

Kun vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ välinen kulma $\sphericalangle(\overline{a}, \overline{b}) = 45°$,

$\cos(\overline{a}, \overline{b}) = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

Muodostetaan yhtälö.

$$\cos(\overline{a}, \overline{b}) = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{t + 6}{\sqrt{t^2 + 4} \cdot \sqrt{10}}$$

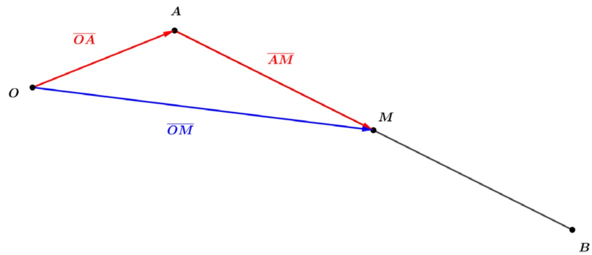
$t = -1$ tai $t = 4$

Sijoitetaan $\overline{a} \cdot \overline{b} = t + 6$, $|\overline{a}| = \sqrt{t^2 + 4}$, $|\overline{b}| = \sqrt{10}$ ja $\cos(\overline{a}, \overline{b}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ratkaistaan CAS-laskimella.

Vastaus
$t = -1$ tai $t = 4$

K74

a) Tavoitteena on määrittää pisteen M paikkavektori



$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM}$.

Määritetään kuvion vektorien lausekkeet.

$\overline{OA} = 5\overline{i} + 2\overline{j}$ — $A = (5,\ 2)$

$\overline{AB} = (19-5)\overline{i} + (-5-2)\overline{j}$
$= 14\overline{i} - 7\overline{j}$

Vektori pisteestä $A = (5,\ 2)$ pisteeseen $B = (19, -5)$.

$\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB}$
$= \frac{1}{2}(14\overline{i} - 7\overline{j})$
$= 7\overline{i} - \frac{7}{2}\overline{j}$

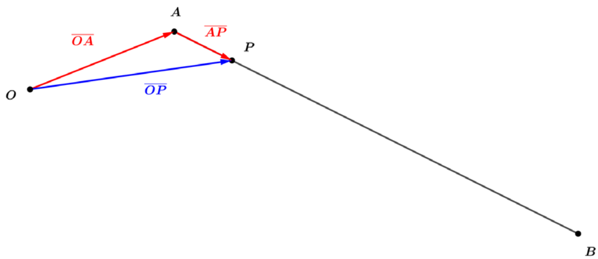
Sijoitetaan $\overline{AB} = 14\overline{i} - 7\overline{j}$.

$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM}$
$= 5\overline{i} + 2\overline{j} + 7\overline{i} - \frac{7}{2}\overline{j}$
$= 12\overline{i} - \frac{3}{2}\overline{j}$

$\overline{OA} = 5\overline{i} + 2\overline{j}$ ja
$\overline{AM} = 7\overline{i} - \frac{7}{2}\overline{j}$

Paikkavektorin $\overline{OM} = 12\overline{i} - \frac{3}{2}\overline{j}$ perusteella piste $M = (12,\ -\frac{3}{2})$.

b) Tavoitteena on määrittää pisteen P paikkavektori $\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AP}$.



Määritetään kuvion vektorien lauseet.

$\overline{OA} = 5\overline{i} + 2\overline{j}$ — $A = (5,\ 2)$

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (19-5)\overline{i} + (-5-2)\overline{j} \\ &= 14\overline{i} - 7\overline{j}\end{aligned}$$

Vektori pisteestä $A = (5,\ 2)$ pisteeseen $B = (19, -5)$.

$$\begin{aligned}\overline{AP} &= \frac{1}{7}\overline{AB} \\ &= \frac{1}{7}(14\overline{i} - 7\overline{j}) \\ &= 2\overline{i} - 1\overline{j}\end{aligned}$$

Sijoitetaan $\overline{AB} = 14\overline{i} - 7\overline{j}$.

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= \overline{OA} + \overline{AP} \\ &= 5\overline{i} + 2\overline{j} + 2\overline{i} - 1\overline{j} \\ &= 7\overline{i} + \overline{j}\end{aligned}$$

$\overline{OA} = 5\overline{i} + 2\overline{j}$ ja
$\overline{AP} = 2\overline{i} - 1\overline{j}$

Paikkavektorin $\overline{OP} = 7\overline{i} + \overline{j}$ perusteella piste $P = (7,\ 1)$.

Vastaus

a) $M = (12,\ -\frac{3}{2})$

b) $P = (7,\ 1)$

K75

Suoran $y=\frac{3}{4}x+2$ kulmakerroin on $\frac{3}{4}$, joten eräs sen suuntavektori on $\overline{s}_1=\overline{i}+\frac{3}{4}\overline{j}$.

Suoran $y=-\frac{6}{7}x-4$ kulmakerroin on $-\frac{6}{7}$, joten eräs sen suuntavektori on $\overline{s}_2=\overline{i}-\frac{6}{7}\overline{j}$.

Lasketaan suuntavektorien $\overline{s}_1$ ja $\overline{s}_2$ pistetulo ja pituudet.

$$\overline{s}_1=\overline{i}+\frac{3}{4}\overline{j}$$
$$\overline{s}_2=\overline{i}-\frac{6}{7}\overline{j}$$

$$\overline{s}_1\cdot\overline{s}_2=1\cdot 1+\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{6}{7}\right)=\frac{5}{14}$$

$$|\overline{s}_1|=\sqrt{1^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{5}{4}$$

$$|\overline{s}_2|=\sqrt{1^2+\left(-\frac{6}{7}\right)^2}=\frac{\sqrt{85}}{7}$$

Lasketaan suuntavektorien välisen kulman suuruus.

$$\cos(\overline{s}_1,\overline{s}_2)=\frac{\frac{5}{14}}{\frac{5}{4}\cdot\frac{\sqrt{85}}{7}}$$

$$\cos(\overline{a},\overline{b})=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|}$$

$$\sphericalangle(\overline{s}_1,\overline{s}_2)=\cos^{-1}\left(\frac{\frac{5}{14}}{\frac{5}{4}\cdot\frac{\sqrt{85}}{7}}\right)$$
$$=77{,}471...^\circ$$

Suorien välinen kulma on $77{,}471...^\circ\approx 77{,}5^\circ$.

Vastaus

$77{,}5^\circ$

K76

Muokataan suoran $6x-3y+7=0$ yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$\begin{aligned} 6x-3y+7&=0 && |-6x-7 \\ -3y&=-6x-7 && |:(-3) \\ y&=2x+\frac{7}{2} \end{aligned}$$

Suoran $y=2x+\frac{7}{2}$ kulmakerroin on 2, joten eräs sen suuntavektori on $\overline{s}_1=\overline{i}+2\overline{j}$.

a) Suoran $y=-2x+5$ kulmakerroin on -2, joten eräs sen suuntavektori on $\overline{s}_2=\overline{i}-2\overline{j}$.

Suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, jos niiden suuntavektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Suuntavektorit $\overline{s}_1$ ja $\overline{s}_2$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, jos niiden pistetulo on 0. Lasketaan pistetulo $\overline{s}_1\cdot\overline{s}_2$.

$$\overline{s}_1\cdot\overline{s}_2=1\cdot1+2\cdot(-2)=1-4=-3$$

Suorien suuntavektorien pistetulo ei ole nolla, joten suorat eivät ole kohtisuorassa toisiaan vastaan.

b) Suora kulkee pisteiden $(5,\ 4)$ ja $(7,\ 3)$ kautta. Määritetään suoran suuntavektori.

$$\overline{s}_2 = (7-5)\overline{i} + (3-4)\overline{j}$$

$$= 2\overline{i} - \overline{j}$$

Vektori pisteestä $(5,4)$ pisteeseen $(7,3)$.

Lasketaan pistetulo $\overline{s}_1 \cdot \overline{s}_2$.

$$\overline{s}_1 \cdot \overline{s}_2 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1)$$

$$= 2 - 2 = 0$$

$\overline{s}_1 = \overline{i} + 2\overline{j}$
$\overline{s}_2 = 2\overline{i} - \overline{j}$

Suorien suuntavektorien pistetulo on nolla, joten suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

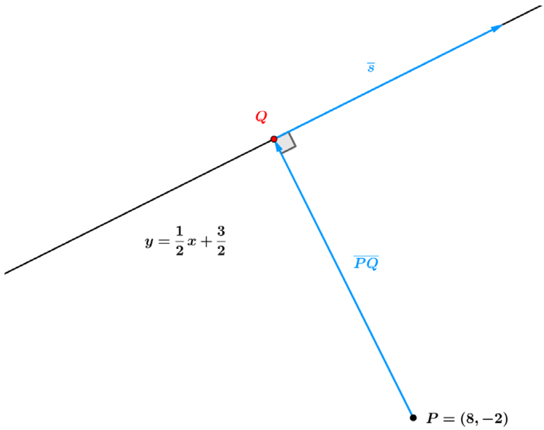
Vastaus
a) ei ole
b) on

K77

Muokataan suoran yhtälö $x-2y+3=0$ ratkaistuun muotoon.

$$\begin{aligned} x-2y+3&=0 && |-x-3 \\ -2y&=-x-3 && |:(-2) \\ y&=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Olkoon Q se suoran piste, joka on lähimpänä pistettä P. Tällöin vektori $\overline{PQ}$ on kohtisuorassa suoraa $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ vastaan.



Koska piste Q on suoralla $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$, on se muotoa $Q=(x,\ \frac{1}{2}x+\frac{3}{2})$.

Muodostetaan vektori $\overline{PQ}$.

$$\overline{PQ}=(x-8)\overline{i}+\left((\frac{1}{2}x+\frac{3}{2})-(-2)\right)\overline{j}=(x-8)\overline{i}+(\frac{1}{2}x+\frac{7}{2})\overline{j}$$

Suoran $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ suuntavektoriksi voidaan valita

$\overline{s}=\overline{i}+\frac{1}{2}\overline{j}.$ $\overline{s}=i+k\overline{j}$, missä $k=\frac{1}{2}$.

Vektori $\overline{PQ}$ ja suoran suuntavektori $\overline{s}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, joten niiden pistetulo 0. Ratkaistaan x.

$$\overline{PQ}\cdot\overline{s}=0 \qquad \overline{PQ}=(x-8)\overline{i}+(\frac{1}{2}x+\frac{7}{2})\overline{j}$$

$$(x-8)\cdot 1+(\frac{1}{2}x+\frac{7}{2})\cdot\frac{1}{2}=0 \qquad \overline{s}=\overline{i}+\frac{1}{2}\overline{j}$$

$$x-8+\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}=0$$

$$\frac{5}{4}x-\frac{25}{4}=0 \quad |+\frac{25}{4}$$

$$\frac{5}{4}x=\frac{25}{4} \quad |\cdot\frac{4}{5}$$

$$x=5$$

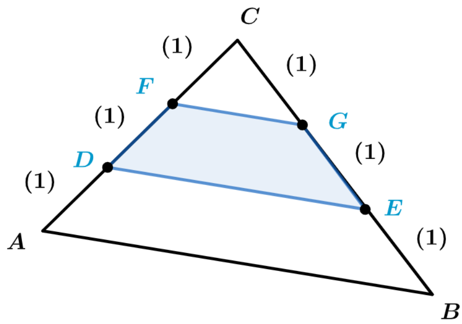
Kun $x=5$, niin $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\cdot 5+\frac{3}{2}=4.$

Pistettä P lähimpänä oleva suoran piste $Q=(5,\ 4)$.

Vastaus
(5, 4)

K78

a) On osoitettava, että jana DE on janan AB kanssa yhdensuuntainen ja sen pituus on $\frac{2}{3}$ janan AB pituudesta. Pitää siis osoittaa, että $\overline{DE} = \frac{2}{3}\overline{AB}$.



Muodostetaan vektori $\overline{DE}$.

$$\overline{DE} = \overline{DC} + \overline{CE}$$ $\overline{DC} = \frac{2}{3}\overline{AC}$ ja $\overline{CE} = \frac{2}{3}\overline{CB}$

$$= \frac{2}{3}\overline{AC} + \frac{2}{3}\overline{CB}$$ Erotetaan yhteinen tekijä.

$$= \frac{2}{3}(\overline{AC} + \overline{CB})$$ $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$

$$= \frac{2}{3}\overline{AB}$$

On osoitettu, että $\overline{DE} = \frac{2}{3}\overline{AB}$. $\square$

b) Nelikulmio $DEGF$ on puolisuunnikas, jos sivut DE ja FG ovat yhdensuuntaiset.

Muodostetaan vektori $\overline{FG}$.

$$\overline{FG} = \overline{FC} + \overline{CG}$$ $\overline{FC} = \frac{1}{3}\overline{AC}$ ja $\overline{CG} = \frac{1}{3}\overline{CB}$

$$= \frac{1}{3}\overline{AC} + \frac{1}{3}\overline{CB}$$ Erotetaan yhteinen tekijä.

$$= \frac{1}{3}(\overline{AC} + \overline{CB})$$ $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$

$$= \frac{1}{3}\overline{AB}$$

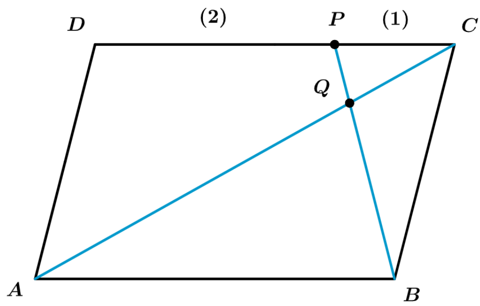
Koska $\overline{FG} = \frac{1}{3}\overline{AB}$, niin $AB \parallel FG$.

Edelleen, koska a-kohdan perusteella $AB \parallel DE$, ovat janat DE ja FG yhdensuuntaiset.

On siis osoitettu, että nelikulmion $DEGF$ sivut DE ja FG ovat yhdensuuntaiset, joten nelikulmio $DEGF$ on puolisuunnikas. $\square$

K79

Merkitään $\overline{AQ} = r\overline{AC}$ ja $\overline{BQ} = s\overline{BP}$, missä r ja s ovat reaalilukuja. Kertoimien r ja s selvittämiseksi tarvitaan vektoriyhtälö, joten esitetään vektori $\overline{AQ}$ kahdella tavalla. Valitaan käytettäviksi vektoreiksi $\overline{AB}$ ja $\overline{AD}$.



$$\begin{aligned}\overline{AQ} &= r\overline{AC}\\ &= r(\overline{AB}+\overline{BC})\\ &= r(\overline{AB}+\overline{AD})\\ &= r\overline{AB}+r\overline{AD}\end{aligned}$$

$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$

$\overline{BC} = \overline{AD}$

Kerrotaan sulkeet auki.

Vektori $\overline{AQ}$ on esitetty vektorien $\overline{AB}$ ja $\overline{AD}$ avulla.

$$\begin{aligned}\overline{AQ} &= \overline{AB}+\overline{BQ}\\ &= \overline{AB}+s\overline{BP}\\ &= \overline{AB}+s(\overline{BC}+\overline{CP})\\ &= \overline{AB}+s(\overline{AD}+\frac{1}{3}\overline{CD})\\ &= \overline{AB}+s(\overline{AD}-\frac{1}{3}\overline{AB})\\ &= \overline{AB}+s\overline{AD}-\frac{1}{3}s\overline{AB}\\ &= (1-\frac{1}{3}s)\overline{AB}+s\overline{AD}\end{aligned}$$

$\overline{BQ} = s\overline{BP}$

$\overline{BP} = \overline{BC} + \overline{CP}$

$\overline{BC} = \overline{AD}$ ja $\overline{CP} = \frac{1}{3}\overline{CD}$

$\overline{CD} = -\overline{AB}$

Kerrotaan sulut auki.

Erotetaan yhteiseksi tekijäksi.

Vektori $\overline{AQ}$ on esitetty vektorien $\overline{AB}$ ja $\overline{AD}$ avulla.

Muodostetaan yhtälö.

$$\overline{AQ} = \overline{AQ}$$
$$r\overline{AB} + r\overline{AD} = (1 - \frac{1}{3}s)\overline{AB} + s\overline{AD}$$

Sijoitetaan vektorille $\overline{AQ}$ saadut lausekkeet.

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} r = 1 - \frac{1}{3}s \\ r = s \end{cases}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$r = \frac{3}{4} \quad \text{ja} \quad s = \frac{3}{4}$$

Siis $\overline{AQ} = \frac{3}{4}\overline{AC}$, joten piste Q jakaa lävistäjän AC suhteessa $3:1$.

Vastaus

$3:1$

A1

a) $2|x-3| = 1 \quad |:2$

Sievennetään toiselle puolelle pelkkä itseisarvolauseke.

$|x-3| = \frac{1}{2}$

Puretaan yhtälö kahdeksi yhtälöksi.

$x-3 = \frac{1}{2} \quad |+3$ tai $x-3 = -\frac{1}{2} \quad |+3$

$x = \frac{7}{2}$ $\qquad$ $x = \frac{5}{2}$

b) $|2x-1| = 2|3-x|$

$|2x-1| = |2\cdot(3-x)|$

$|2x-1| = |6-2x|$

Puretaan yhtälö kahdeksi yhtälöksi.

$2x-1 = 2(3-x)$ tai $2x-1 = -2(3-x)$

$2x-1 = 6-2x \quad |+2x+1$ $\qquad$ $2x-1 = -6+2x \quad |-2x$

$4x = 7 \quad |:4$ $\qquad$ $-1 = -6$

$x = \frac{7}{4}$ $\qquad$ epätosi

Vastaus

a) $x = \frac{5}{2}$ tai $x = \frac{7}{2}$

b) $x = \frac{7}{4}$

A2

a) Lasketaan vektorien $\overline{a} = 3\overline{i} - \overline{j}$ ja $\overline{b} = 5\overline{i} - 5\overline{j}$ pituudet.

$$|\overline{a}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2}$$
$$= \sqrt{9+1}$$
$$= \sqrt{10}$$

$|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$, missä
$a_x = 3$ ja $a_y = -1$

$$|\overline{b}| = \sqrt{5^2 + (-5)^2}$$
$$= \sqrt{25+25}$$
$$= \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$, missä
$a_x = 5$ ja $a_y = -5$

b) Määritetään vektori $\overline{a} + \overline{b}$.

$$\overline{a} + \overline{b} = 3\overline{i} - \overline{j} + (5\overline{i} - 5\overline{j})$$
$$= 8\overline{i} - 6\overline{j}$$

$\overline{a} = 3\overline{i} - \overline{j}$ ja
$\overline{b} = 5\overline{i} - 5\overline{j}$

Lasketaan vektorin $\overline{a} + \overline{b}$ pituus.

$$|\overline{a} + \overline{b}| = \sqrt{8^2 + (-6)^2}$$
$$= \sqrt{64+36}$$
$$= \sqrt{100}$$
$$= 10$$

$|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$, missä
$a_x = -2$ ja $a_y = -6$

c) Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan täsmälleen silloin, kun niiden pistetulo on nolla. Lasketaan pistetulo $\overline{a} \cdot \overline{b}$.

$\overline{a} = 3\overline{i} - \overline{j}$ ja
$\overline{b} = 5\overline{i} - 5\overline{j}$

$$\begin{aligned} \overline{a} \cdot \overline{b} &= 3 \cdot 5 + (-1) \cdot (-5) \\ &= 15 + 5 \\ &= 20 \end{aligned}$$

Koska pistetulo ei ole nolla, vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ eivät ole kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Vastaus

a) $|\overline{a}| = \sqrt{10}$ ja $|\overline{b}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

b) $|\overline{a} + \overline{b}| = 10$

c) eivät ole

A3

Määritetään ensin suorien $3x - y + 6 = 0$ ja $2x + 3y - 7 = 0$ leikkauspiste. Muodostetaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} 3x - y + 6 = 0 & | \cdot 3 \\ 2x + 3y - 7 = 0 \end{cases}$$

Kerrotaan yhtälöt sellaisilla luvuilla, että muuttujan y kertoimiksi saadaan toistensa vastaluvut.

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 9x - 3y + 18 = 0 \\ 2x + 3y - 7 = 0 \end{cases} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} 11x + 11 &= 0 && | -11 \\ 11x &= -11 && |:11 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Lasketaan yhtälöt yhteen. Muuttuja y poistuu. Ratkaistaan muuttuja x.

Sijoitetaan $x = -1$ jompaankumpaan yhtälöön ja ratkaistaan y.

$$3x - y + 6 = 0$$

Sijoitetaan $x = -1$ yhtälöparin ensimmäiseen yhtälöön.

$$\begin{aligned} 3 \cdot (-1) - y + 6 &= 0 \\ -y + 3 &= 0 && | +y \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Suorat $3x - y + 6 = 0$ ja $2x + 3y - 7 = 0$ leikkaavat siis pisteessä $(-1,\ 3)$.

Selvitetään, millä vakion a arvolla myös suora $3x + ay + 15 = 0$ kulkee pisteen $(-1,\ 3)$ kautta.

$$
\begin{aligned}
3x + ay + 15 &= 0 \\
3 \cdot (-1) + a \cdot 3 + 15 &= 0 \\
3a + 12 &= 0 \quad | -12 \\
3a &= -12 \quad |:3 \\
a &= -4
\end{aligned}
$$

Sijoitetaan $x = -1$ ja $y = 3$.

Siis suorat $3x - y + 6 = 0$, $2x + 3y - 7 = 0$ ja $3x + ay + 15 = 0$ leikkaavat pisteessä $(-1,\ 3)$, kun $a = -4$.

Vastaus

$a = -4$, leikkauspiste $(-1,\ 3)$

A4

a) Ympyrän säde on keskipisteen $(-10,\ 0)$ ja kehäpisteen $(-8,-3)$ välinen etäisyys.

$$r = \sqrt{(-8-(-10))^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{13}$$

Ympyrän säde on $r = \sqrt{13}$.

b) Ympyrän keskipiste on $(-10,\ 0)$ ja säde $\sqrt{13}$. Muodostetaan ympyrän yhtälö.

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$$

Sijoitetaan $x_0 = -10$, $y_0 = 0$ ja $r = \sqrt{13}$.

$$(x-(-10))^2 + (y-0)^2 = \left(\sqrt{13}\right)^2$$

$$(x+10)^2 + y^2 = 13$$

Ympyrän yhtälö on $(x+10)^2 + y^2 = 13$.

c) Tutkitaan, toteuttaako piste $(-7,\ 1)$ ympyrän yhtälön.

$$(x+10)^2 + y^2 = 13$$

Sijoitetaan $x = -7$ ja $y = 1$.

$$(-7+10)^2 + 1^2 = 13$$

$$9 + 1 = 13$$

$$10 = 13$$

epätosi

Piste $(-7,\ 1)$ ei toteuta ympyrän yhtälöä, joten piste ei ole ympyrällä.

Koska pisteen $(-7,\ 1)$ ja ympyrän keskipisteen $(-10,\ 0)$ välisen etäisyyden neliö 10 on pienempi kuin ympyrän säteen neliö $13,$ piste $(-7,\ 1)$ on ympyrän sisäpuolella.

Vastaus

a) $\sqrt{13}$

b) $(x+10)^2 + y^2 = 13$

c) sisäpuolella

A5

Olkoon päätepiste B. Määritetään pisteen B paikkavektori.

Määritetään vektorin $\overline{a} = -9\overline{i} + 12\overline{j}$ suuntainen yksikkövektori.

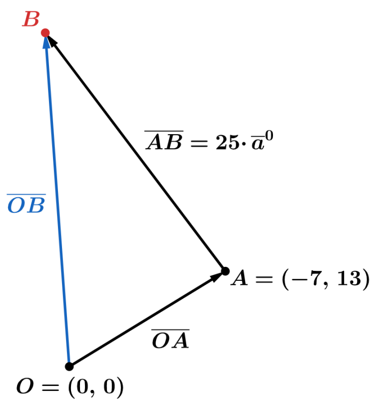
$$\overline{a}^0 = -\frac{3}{5}\overline{i} + \frac{4}{5}\overline{j}$$

Määritetään yksikkövektori CAS-laskimella.

Koska pisteestä $A = (-7,\ 13)$ siirrytään 25 pituusyksikköä vektorin $\overline{a}$ suuntaan, on vektori $\overline{AB} = 25 \cdot \overline{a}^0$.

Hahmotellaan mallikuva ja määritetään pisteen B paikkavektori.

$$\begin{aligned}\overline{OB} &= \overline{OA} + \overline{AB} \\ &= \overline{OA} + 25 \cdot \overline{a}^0 \\ &= -7\overline{i} + 13\overline{j} + 25 \cdot \left(-\frac{3}{5}\overline{i} + \frac{4}{5}\overline{j}\right) \\ &= -7\overline{i} + 13\overline{j} - 15\overline{i} + 20\overline{j} \\ &= -22\overline{i} + 33\overline{j}\end{aligned}$$

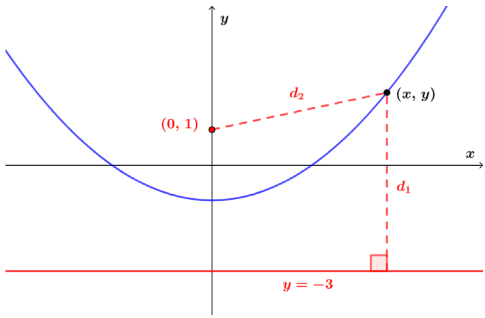


Päädytään pisteeseen $B = (-22,\ 33)$.

Vastaus
$(-22,\ 33)$

A6

a) Paraabelin jokaisen pisteen $(x,\ y)$ etäisyys johtosuorasta $y=-3$ on yhtä suuri kuin etäisyys polttopisteestä $(0,\ 1)$.



Muodostetaan lauseke pisteen $(x,\ y)$ etäisyydelle suorasta $y=-3$.

$$d_1=|y-(-3)|=|y+3|$$

Muodostetaan lauseke pisteen $(x,\ y)$ etäisyydelle pisteestä $(0,\ 1)$.

$$d_2=\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2}=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$$

Paraabelin johtosuora on vaakasuuntainen, joten paraabeli on pystysuuntaan aukeava. Paraabelin yhtälö on siis muotoa $y=ax^2+bx+c$.

Muodostetaan etäisyyksistä yhtälö ja ratkaistaan muuttuja y.

$$|y+3|=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$$

$$y=\frac{1}{8}x^2-1$$

Ratkaistaan muuttuja y CAS-laskimella.

Paraabelin yhtälö on $y=\frac{1}{8}x^2-1$.

b) Paraabeli aukeaa vaakasuuntaan, koska sen akseli on x-akselin suuntainen.

Sijoitetaan huipun $\left(-\frac{3}{2},\ 5\right)$ koordinaatit vaakasuuntaan aukeavan paraabelin huippumuotoiseen yhtälöön.

$$x - x_0 = a(y - y_0)^2 \qquad \text{Sijoitetaan } x_0 = -\frac{3}{2} \text{ ja } y_0 = 5.$$

$$x - \left(-\frac{3}{2}\right) = a(y-5)^2$$

$$x + \frac{3}{2} = a(y-5)^2$$

Piste $(11,\ 0)$ on paraabelilla, joten sen koordinaatit toteuttavat paraabelin yhtälön. Sijoitetaan koordinaatit yhtälöön, ja ratkaistaan kerroin a.

$$x + \frac{3}{2} = a(y-5)^2 \qquad \text{Sijoitetaan } x = 11 \text{ ja } y = 0.$$

$$11 + \frac{3}{2} = a(0-5)^2 \qquad \text{Ratkaistaan muuttuja } a \text{ CAS-laskimella.}$$

$$a = \frac{1}{2}$$

Paraabelin yhtälön huippumuoto on $x + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(y-5)^2$. Sievennetään yhtälö normaalimuotoon.

$$x + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(y-5)^2 \qquad \text{Ratkaistaan muuttuja } x \text{ CAS-laskimella.}$$

$$x = \frac{1}{2}y^2 - 5y + 11$$

Paraabelin yhtälön normaalimuoto on $x = \frac{1}{2}y^2 - 5y + 11$.

Vastaus

a) $y = \frac{1}{8}x^2 - 1$

b) $x = \frac{1}{2}y^2 - 5y + 11$

A7

a) Appletin perusteella vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat yhdensuuntaiset, kun $t=-2$ tai $t=2$.

Kun $t=-2$, vektorit ovat samansuuntaiset.
Kun $t=2$, vektorit ovat vastakkaissuuntaiset.

b) Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun löytyy sellainen nollasta eroava reaaliluku r, että $\overline{a}=r\overline{b}$.

Tutkitaan, onko yhtälöllä $\overline{a}=r\overline{b}$, ratkaisu.

$$\overline{a}=r\overline{b} \qquad\qquad \overline{a}=-t\overline{i}+4\overline{j} \text{ ja } \overline{b}=2\overline{i}-2t\overline{j}$$
$$-t\overline{i}+4\overline{j}=r(2\overline{i}-2t\overline{j})$$
$$-t\overline{i}+4\overline{j}=2r\overline{i}-2rt\overline{j}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöpari.

$$\begin{cases}-t=2r\\ 4=-2rt\end{cases} \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$r=1 \text{ ja } t=-2 \quad \text{tai} \quad r=-1 \text{ ja } t=2$$

Vektorit ovat siis yhdensuuntaiset, kun $t=-2$ tai $t=2$.

Kun $t=-2$, on $\overline{a}=r\overline{b}=1\cdot\overline{b}$. Koska kerroin $1>0$, ovat vektorit samansuuntaiset.

Kun $t=2$, on $\overline{a}=r\overline{b}=-1\cdot\overline{b}$. Koska kerroin $-1<0$, ovat vektorit vastakkaissuuntaiset.

Vastaus
Yhdensuuntaiset, kun $t=-2$ tai $t=2$.
Kun $t=-2$, samansuuntaiset. Kun $t=2$, vastakkaissuuntaiset.

A8

Suora on ympyrän tangentti täsmälleen silloin, kun ympyrän keskipisteen etäisyys suorasta on yhtä suuri kuin ympyrän säde.

Ympyrän $x^2 + y^2 = 10$ keskipiste on $(0,\ 0)$ ja säde $r = \sqrt{10}$.

Muokataan suoran $y = -3x + 10$ yhtälö normaalimuotoon.

$$\begin{aligned} y &= -3x + 10 \quad | +3x - 10 \\ 3x + y - 10 &= 0 \end{aligned}$$

Lasketaan keskipisteen $(0,\ 0)$ etäisyys suorasta $3x + y - 10 = 0$.

$$\begin{aligned} d &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{|3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 10|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} \\ &= \frac{|-10|}{\sqrt{10}} \\ &= {}^{\sqrt{10})} \frac{10}{\sqrt{10}} = \frac{\cancel{10}\sqrt{10}}{\cancel{10}} = \sqrt{10} \end{aligned}$$

Sijoitetaan $x_0 = 0,\ y_0 = 0,$ $a = 3,\ b = 1$ ja $c = -10$.

Ympyrän keskipisteen etäisyys suorasta on yhtä suuri kuin ympyrän säde. On osoitettu, että suora $y = -3x + 10$ on ympyrän $x^2 + y^2 = 10$ tangentti. $\square$

A9

Lähimpänä pistettä $(-3,\ 2)$ oleva suoran $-6x+8y+17=0$ piste on suoran ja sen suoran normaalin, joka kulkee pisteen $(-3,\ 2)$ kautta, leikkauspiste.

Muokataan suoran yhtälö normaalimuotoon.

$$
\begin{aligned}
-6x+8y+17&=0 && \mid +6x-17\\
8y&=6x-17 && \mid :8\\
y&=\frac{3}{4}x-\frac{17}{8}
\end{aligned}
$$

Suoran kulmakerroin on $k_1=\frac{3}{4}$. Määritetään normaalin kulmakerroin k_2.

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{4}\cdot k_2&=-1 && \mid \cdot\frac{4}{3}\\
k_2&=-\frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

Kohtisuoruusehto: $k_1k_2=-1$.

Normaali kulkee pisteen $(-3,\ 2)$ kautta ja sen kulmakerroin on $-\frac{4}{3}$. Muodostetaan normaalin yhtälö.

$$
\begin{aligned}
y-2&=-\frac{4}{3}(x-(-3))\\
y-2&=-\frac{4}{3}x-4 && \mid +2\\
y&=-\frac{4}{3}x-2
\end{aligned}
$$

$y-y_0=k(x-x_0)$

Määritetään normaalin $y=-\frac{4}{3}x-2$ ja suoran $y=\frac{3}{4}x-\frac{17}{8}$ leikkauspiste. Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} y=\frac{3}{4}x-\frac{17}{8} \\ y=-\frac{4}{3}x-2 \end{cases}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$x=\frac{3}{50}$ tai $y=-\frac{52}{25}$

Piste $(\frac{3}{50},-\frac{52}{25})$ on se suoran $-6x+8y+17=0$ piste, joka on lähimpänä pistettä $(-3,\ 2)$.

Vastaus

$(\frac{3}{50},-\frac{52}{25})$

Huomaa, että tehtävän voi ratkaista myös vektorien avulla luvun 23 esimerkin 3 tapaan.

A10

Muokataan yhtälö $x^2 + y^2 - 2px - 8py + 9p^2 + 2p = 0$

keskipistemuotoon $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

$$x^2 + y^2 - 2px - 8py + 9p^2 + 2p = 0$$

Ryhmitellään termit.

$$x^2 - 2px + y^2 - 8py = -9p^2 - 2p$$

$$x^2 - 2 \cdot p \cdot x + p^2 + y^2 - 2 \cdot 4p \cdot y + (4p)^2 = -9p^2 - 2p + p^2 + (4p)^2$$

$$(x - p)^2 + (y - 4p)^2 = 8p^2 - 2p$$

Yhtälö esittää ympyrää, kun sen oikealla puolella oleva luku eli ympyrän säteen neliö on positiivinen. Muodostetaan epäyhtälö.

$8p^2 - 2p > 0$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$p < 0$ tai $p > \frac{1}{4}$

Yhtälö $(x - p)^2 + (y - 4p)^2 = 8p^2 - 2p$ esittää siis ympyrää, kun $p < 0$ tai $p > \frac{1}{4}$.

Tällöin ympyrän keskipiste on $(p,\ 4p)$.

Nämä keskipisteet toteuttavat yhtälön $y = 4x$, joka on suoran yhtälö.

Koska $x = p$ ja $p < 0$ tai $p > \frac{1}{4}$, niin ympyröiden keskipisteet piirtävät sen osan suoraa $y = 4x$, missä $x < 0$ tai $x > \frac{1}{4}$.

Vastaus

Esittää ympyrää, kun $p < 0$ tai $p > \frac{1}{4}$. Keskipisteet muodostavat suoran $y = 4x$ sen osan, jossa $x < 0$ tai $x > \frac{1}{4}$.

B1

a) Muokataan suoran yhtälö $2x-9y+26=0$ ratkaistuun muotoon.

$$
\begin{aligned}
2x-9y+26&=0 && |-2x-26\\
-9y&=-2x-26 && |:(-9)\\
y&=\frac{2}{9}x+\frac{26}{9}
\end{aligned}
$$

Suoran kulmakerroin $k=\frac{2}{9}$.

b) Ratkaistaan suoran suuntakulma.

$$\tan\alpha=k$$

$$\tan\alpha=\frac{2}{9}$$

$$\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right)=12{,}528...^\circ\approx 13^\circ$$

c) Lasketaan pisteen $(-5,\ 3)$ etäisyys suorasta $2x-9y+26=0$.

$$
\begin{aligned}
d&=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\\
&=\frac{|2\cdot(-5)-9\cdot 3+26|}{\sqrt{2^2+(-9)^2}}\\
&=\frac{|-11|}{\sqrt{85}}\\
&=\frac{11}{\sqrt{85}}=1{,}193...\approx 1{,}2
\end{aligned}
$$

Sijoitetaan kertoimet
$a=2,\ b=-9$ ja $c=26$
ja koordinaatit $x_0=-5$ ja $y_0=3$.

Vastaus

a) $\frac{2}{9}$ **b)** 13° **c)** $1{,}2$

B2

Määritetään pisteitä $A=(-2,-5)$ ja $B=(1,-3)$ yhdistävän janan keskipiste.

$$\left(\frac{-2+1}{2},\ \frac{-5+(-3)}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2},-4\right)$$

Määritetään janan AB kulmakerroin.

$$k_1=\frac{-3-(-5)}{1-(-2)}=\frac{2}{3}$$

Janan AB keskinormaali on kohtisuorassa janaa vastaan. Määritetään keskinormaalin kulmakerroin k_2.

$$\frac{2}{3}\cdot k_2=-1 \qquad \left|\cdot\frac{3}{2}\right.$$

Kohtisuoruusehto: $k_1k_2=-1.$

$$k_2=-\frac{3}{2}$$

Keskinormaali kulkee pisteen $\left(-\frac{1}{2},-4\right)$ kautta ja sen kulmakerroin on $-\frac{3}{2}$. Muodostetaan keskinormaalin yhtälö.

$$y-(-4)=-\frac{3}{2}\left(x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$y-y_0=k(x-x_0)$

$$y+4=-\frac{3}{2}x-\frac{3}{4} \qquad |\cdot 4$$

$$4y+16=-6x-3 \qquad |+6x-3$$

$$6x+4y+19=0$$

Vastaus

$6x+4y+19=0$ $\left(y=-\frac{3}{2}x-\frac{19}{4}\right)$

B3

On etsittävä sellaiset luvut r ja s, että $\overline{a} = r\overline{u} + s\overline{v}$.

Muokataan yhtälöä.

$\overline{a} = 7\overline{i} - 15\overline{j}$

$\overline{u} = \overline{i} - \overline{j}$

$\overline{v} = \overline{i} + \overline{j}$

$$\overline{a} = r\overline{u} + s\overline{v}$$

$$7\overline{i} - 15\overline{j} = r(\overline{i} - \overline{j}) + s(\overline{i} + \overline{j}) \quad \text{Poistetaan sulkeet.}$$

$$7\overline{i} - 15\overline{j} = r\overline{i} - r\overline{j} + s\overline{i} + s\overline{j} \quad \text{Ryhmitellään } \overline{i}\text{:n ja } \overline{j}\text{:n termit.}$$

$$7\overline{i} - 15\overline{j} = (r + s)\overline{i} + (-r + s)\overline{j}$$

Komponenttiesitys on yksikäsitteinen, joten vektorien $\overline{i}$ ja $\overline{j}$ kertoimien on oltava yhtä suuret yhtälön molemmilla puolilla.

$$\begin{cases} r + s = 7 \\ -r + s = -15 \end{cases}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$r = 11$ ja $s = -4$

Siis $\overline{a} = r\overline{u} + s\overline{v} = 11\overline{u} - 4\overline{v}$

Vastaus

$\overline{a} = 11\overline{u} - 4\overline{v}$

B4

a) Jokainen annettu piste toteuttaa ympyrän yhtälön. Sijoittamalla pisteiden koordinaatit ympyrän yhtälön normaalimuotoon
$x^2+y^2+ax+by+c=0$ saadaan kolme yhtälöä. Muodostetaan yhtälöryhmä ja ratkaistaan kertoimet a, b ja c.

$$\begin{cases} (-2)^2+6^2+a\cdot(-2)+b\cdot 6+c=0 & x=-2 \text{ ja } y=6 \\ (-8)^2+3^2+a\cdot(-8)+b\cdot 3+c=0 & x=-8 \text{ ja } y=3 \\ (-5)^2+(-3)^2+a\cdot(-5)+b\cdot(-3)+c=0 & x=-5 \text{ ja } y=-3 \end{cases}$$

$a=7,\ b=-3$ ja $c=-8$

Ratkaistaan yhtälöryhmä CAS-laskimella.

Ympyrän yhtälö on
$x^2+y^2+7x-3y-8=0.$

$x^2+y^2+ax+by+c=0$

b) Jokainen annetuista pisteistä toteuttaa paraabelin yhtälön. Sijoittamalla pisteiden koordinaatit sivusuuntaan aukeavan paraabelin yhtälöön
$x=ay^2+by+c$ saadaan kolme yhtälöä. Muodostetaan yhtälöryhmä ja ratkaistaan kertoimet a, b ja c.

$$\begin{cases} -2=a\cdot 6^2+b\cdot 6+c & x=-2,\ y=6 \\ -8=a\cdot 3^2+b\cdot 3+c & x=-8,\ y=3 \\ -5=a\cdot(-3)^2+b\cdot(-3)+c & x=-5, y=-3 \end{cases}$$

$a=\frac{5}{18},\ b=-\frac{1}{2}$ ja $c=-9$

Ratkaistaan yhtälöryhmä CAS-laskimella.

Paraabelin yhtälö on $x=\frac{5}{18}y^2-\frac{1}{2}y-9.$

Vastaus

a) $x^2+y^2+7x-3y-8=0$

b) $x=\frac{5}{18}y^2-\frac{1}{2}y-9$

B5

Tutkitaan, esittääkö yhtälö ympyrää. Pyritään muokkaamaan yhtälö ympyrän keskipistemuotoon $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$.

a) Muokataan yhtälön vasemmalle puolelle lauseke $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$.

$$x^2+y^2-6x-2y-3=0$$

Ryhmitellään termit.

$$\begin{aligned}
x^2-6x\quad+y^2-2y &= 3\\
x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2+y^2-2\cdot y\cdot 1+1^2 &= 3+3^2+1^2\\
(x-3)^2+(y-1)^2 &= 3+9+1\\
(x-3)^2+(y-1)^2 &= 13
\end{aligned}$$

Yhtälö esittää ympyrää, jonka keskipiste on $(3,\ 1)$ ja säde $\sqrt{13}$.

b) Muokataan yhtälön vasemmalle puolelle lauseke $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$.

$$x^2+y^2-2x+4y+7=0$$

Ryhmitellään termit.

$$\begin{aligned}
x^2-2x\quad+y^2+4y &= -7\\
x^2-2\cdot x\cdot 1+1^2+y^2+2\cdot y\cdot 2+2^2 &= -7+1^2+2^2\\
(x-1)^2+(y+2)^2 &= -7+1+4\\
\underbrace{(x-1)^2}_{\geq 0}+\underbrace{(y+2)^2}_{\geq 0} &= \underbrace{-2}_{<0}
\end{aligned}$$

Luvun neliö on aina epänegatiivinen, joten kahden neliön summa ei voi olla negatiivinen. Täten mikään koordinaatiston piste $(x,\ y)$ ei toteuta yhtälöä.
Yhtälö ei siis esitä mitään pistejoukkoa.

c) Muokataan yhtälön vasemmalle puolelle lauseke
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$.

$$x^2 + y^2 + 8x - 4y + 20 = 0$$

Ryhmitellään termit.

$$\begin{aligned}
x^2 + 8x \quad + y^2 - 4y &= -20 \\
x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 + y^2 - 2 \cdot y \cdot 2 + 2^2 &= -20 + 4^2 + 2^2 \\
(x+4)^2 \quad + \quad (y-2)^2 &= -20 + 16 + 4 \\
(x+4)^2 \quad + \quad (y-2)^2 &= 0
\end{aligned}$$

Yhtälö saatiin ympyrän keskipistemuotoon, missä keskipiste on $(-4,\ 2)$ ja säde $\sqrt{0} = 0$.

Yhtälö esittää siis pistettä $(-4,\ 2)$.

Vastaus

a) Ympyrää, jonka keskipiste on $(3,\ 1)$ ja säde $\sqrt{13}$.

b) Ei mitään pistejoukkoa.

c) Pistettä $(-4,\ 2)$.

B6

a) Määritetään vektori pisteestä $A = (2,\ 3)$ pisteeseen $B = (5, -1)$.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (5-2)\overline{i} + (-1-3)\overline{j} \\ &= 3\overline{i} - 4\overline{j}\end{aligned}$$

b) Määritetään pisteen D paikkavektori $\overline{OD}$.

$$\overline{OD} = \overline{OB} + 2\overline{AB}$$

$B = (5, -1)$

$\overline{AB} = 3\overline{i} - 4\overline{j}$

$$\begin{aligned}&= 5\overline{i} - \overline{j} + 2\cdot(3\overline{i} - 4\overline{j}) \\ &= 5\overline{i} - \overline{j} + 6\overline{i} - 8\overline{j} \\ &= 11\overline{i} - 9\overline{j}\end{aligned}$$

Piste $D = (11,\ -9)$.

Vastaus

a) $\overline{AB} = 3\overline{i} - 4\overline{j}$

b) $D = (11,\ -9)$

B7

Tapa 1

Muodostetaan pisteiden $A = (2, 1)$ ja $B = (4, 0)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin.

$$k_1 = \frac{0-1}{4-2} = -\frac{1}{2}$$

Muodostetaan pisteiden $A = (2, 1)$ ja $C = (5, 7)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin.

$$k_2 = \frac{7-1}{5-2} = 2$$

Lasketaan kulmakertoimien tulo.

$$k_1 \cdot k_2 = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$$

Koska kulmakertoimien tulo on -1, suorat AB ja AC ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Täten kolmion kulma $A = 90°$.

Tapa 2

Muodostetaan kolmion sivuvektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$.

$$\overline{AB} = (4-2)\overline{i} + (0-1)\overline{j} = 2\overline{i} - \overline{j}$$
$$\overline{AC} = (5-2)\overline{i} + (7-1)\overline{j} = 3\overline{i} + 6\overline{j}$$

Lasketaan vektorien $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$ pistetulo.

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 6 = 6 - 6 = 0$$

Koska pistetulo on nolla, vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Täten kolmion kulma $A = 90°$.

Tapa 3

Lasketaan kolmion sivujen eli janojen AB, AC ja BC pituudet.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(4-2)^2+(0-1)^2} \\ &= \sqrt{5}\ (\approx 2{,}23) \end{aligned} \qquad A=(2,\ 1),\ B=(4,\ 0)$$

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(5-2)^2+(7-1)^2} \\ &= \sqrt{45} \\ &= 3\sqrt{5}\ (\approx 6{,}71) \end{aligned} \qquad A=(2,\ 1),\ C=(5,\ 7)$$

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(5-4)^2+(7-0)^2} \\ &= \sqrt{50} \\ &= 5\sqrt{2}\ (\approx 7{,}07) \end{aligned} \qquad B=(4,\ 0),\ C=(5,\ 7)$$

Jana BC on kolmion sivuista pisin. Tutkitaan, toteuttavatko kolmion sivujen pituudet Pythagoraan lauseen.

$$\begin{aligned} AB^2+AC^2 &= BC^2 \\ \left(\sqrt{5}\right)^2+\left(3\sqrt{5}\right)^2 &= \left(5\sqrt{2}\right)^2 \\ 50 &= 50 \\ &\text{tosi} \end{aligned}$$

Koska kolmion sivujen pituudet toteuttavat Pythagoraan lauseen, kolmio on suorakulmainen.

B8

Määritetään suorien $2x - ax - y = 0$ ja $2ax - x - 2y = 0$ kulmakertoimet.

Muokataan suoran $2x - ax - y = 0$ yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$
\begin{aligned}
2x - ax - y &= 0 \qquad && | +y \\
y &= 2x - ax \\
y &= (2-a)x
\end{aligned}
$$

Suoran kulmakerroin on $k_1 = 2 - a$.

Muokataan suoran $2ax - x - 2y = 0$ yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$
\begin{aligned}
2ax - x - 2y &= 0 \qquad && | -2ax + x \\
-2y &= -2ax + x && |: (-2) \\
y &= ax - \frac{1}{2}x \\
y &= \left(a - \frac{1}{2}\right)x
\end{aligned}
$$

Suoran kulmakerroin on $k_2 = a - \frac{1}{2}$.

Koska molemmilla suorilla on määritelty kulmakerroin kaikilla vakion a arvoilla, kumpikaan suorista ei ole pystysuora millään vakion a arvolla.

a) Suorat ovat yhdensuuntaiset, kun niiden kulmakertoimet ovat yhtä suuret. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan a.

$$2-a=a-\frac{1}{2}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$a=\frac{5}{4}$$

b) Suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, kun niiden kulmakertoimien tulo on -1. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan a.

$$(2-a)\cdot(a-\frac{1}{2})=-1$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$a=0 \quad \text{tai} \quad a=\frac{5}{2}$$

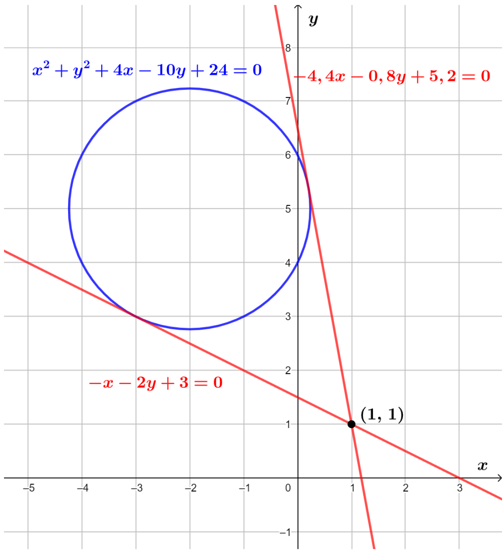
Vastaus

a) $a=\frac{5}{4}$

b) $a=0$ tai $a=\frac{5}{2}$

B9

a) Piirretään ympyrä



$$x^2+y^2+4x-10y+24=0$$ ja piste $(1,\ 1)$.

Piirretään tangentit.

Tangenttien yhtälöt ovat $-x-2y+3=0$ ja $-4,4x-0,8y+5,2=0$.

b) Muokataan ympyrän yhtälö keskipistemuotoon
$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$.

$$x^2+y^2+4x-10y+24=0$$

Ryhmitellään termit.

$$x^2+4x+y^2-10y=-24$$

Täydennetään lausekkeet neliöiksi CAS-laskimella.

$$(x+2)^2-4+(y-5)^2-25=-24 \quad | +4+25$$
$$(x+2)^2+(y-5)^2=5$$

Ympyrän keskipiste on $(–2, 5)$ ja säde $\sqrt{5}$.

Tutkitaan, onko piste $(1,\ 1)$ ympyrällä sijoittamalla pisteen koordinaatit ympyrän yhtälöön $(x+2)^2+(y-5)^2=5$.

Sijoitetaan $x=1$ ja $y=1$.

$$(x+2)^2+(y-5)^2=5$$
$$(1+2)^2+(1-5)^2=5$$
$$25=5$$

epätosi

Piste ei ole ympyrällä.

Pisteen $(1,\ 1)$ ja ympyrän keskipisteen $(-2,\ 5)$ välisen etäisyyden neliö on suurempi kuin ympyrän säteen neliö 5, joten piste $(1,\ 1)$ on ympyrän ulkopuolella. Pisteen kautta voidaan piirtää ympyrälle kaksi tangenttia.

Merkitään tangentin kulmakerrointa kirjaimella k. Tangentti kulkee pisteen $(1,\ 1)$ kautta. Muodostetaan tangentin yhtälö.

$$y-1=k(x-1)$$ $y-y_0=k(x-x_0)$

$$y-1=kx-k \qquad |-y+1$$

$$0=kx-y-k+1$$

$$kx-y-k+1=0$$

Ilmoitetaan tangentin yhtälö normaalimuodossa etäisyyden laskemista varten.

Muodostetaan lauseke ympyrän keskipisteen $(-2,\ 5)$ etäisyydelle tangentista $kx-y-k+1=0$.

$$\begin{aligned} d&=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ &=\frac{|k\cdot(-2)+(-1)\cdot 5-k+1|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}} \\ &=\frac{|-3k-4|}{\sqrt{k^2+1}} \end{aligned}$$

Sijoitetaan $x_0=-2,\ y_0=5,$ 25
$a=k,\ b=-1,\ c=-k+1$

Ympyrän keskipisteen etäisyys tangentista on yhtä suuri kuin ympyrän säde $\sqrt{5}$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kulmakerroin k.

$$\frac{|-3k-4|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{5}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$k=-\frac{11}{2} \quad \text{tai} \quad k=-\frac{1}{2}$$

Muodostetaan tangenttien yhtälöt sijoittamalla saadut kulmakertoimet tangentin yhtälöön $kx - y - k + 1 = 0$.

Kun $k = -\frac{11}{2}$, tangentin yhtälö on

$$-\frac{11}{2} \cdot x - y - \left(-\frac{11}{2}\right) + 1 = 0$$

$$-\frac{11}{2}x - y + \frac{13}{2} = 0 \quad | \cdot (-2)$$

$$11x + 2y - 13 = 0.$$

Kun $k = -\frac{1}{2}$, tangentin yhtälö on

$$-\frac{1}{2} \cdot x - y - \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0$$

$$-\frac{1}{2}x - y + \frac{3}{2} = 0 \quad | \cdot (-2)$$

$$x + 2y - 3 = 0.$$

Tangenttien yhtälöt ovat $x + 2y - 3 = 0$ ja $11x + 2y - 13 = 0$ (eli $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ ja $y = -\frac{11}{2}x + \frac{13}{2}$).

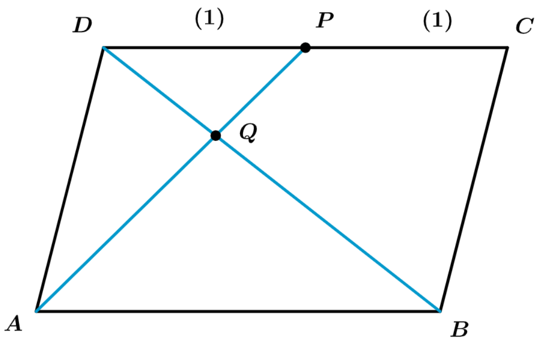
Vastaus

b) $x + 2y - 3 = 0$ ja $11x + 2y - 13 = 0$

($y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ ja $y = -\frac{11}{2}x + \frac{13}{2}$)

B10

Merkitään $\overline{AQ} = r\overline{AP}$ ja $\overline{DQ} = s\overline{DB}$, missä r ja s ovat reaalilukuja. Kertoimien r ja s selvittämiseksi tarvitaan vektoriyhtälö, joten esitetään vektori $\overline{AQ}$ kahdella tavalla. Valitaan käytettäviksi vektoreiksi $\overline{AB}$ ja $\overline{AD}$.



$$\overline{AQ} = r\overline{AP}$$

$$= r(\overline{AD} + DP)$$

$$= r(\overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{DC})$$

$$= r(\overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{AB})$$

$$= \frac{1}{2}r\overline{AB} + r\overline{AD}$$

$\overline{AP} = \overline{AD} + \overline{DP}$

$\overline{DP} = \frac{1}{2}\overline{DC}$

$\overline{DC} = \overline{AB}$

Kerrotaan sulkeet auki.

Vektori $\overline{AQ}$ on esitetty vektorien $\overline{AB}$ ja $\overline{AD}$ avulla.

$$\overline{AQ} = \overline{AD} + \overline{DQ}$$

$$= \overline{AD} + s\overline{DB}$$

$$= \overline{AD} + s(\overline{DA} + \overline{AB})$$

$$= \overline{AD} + s(-\overline{AD} + \overline{AB})$$

$$= \overline{AD} - s\overline{AD} + s\overline{AB}$$

$$= s\overline{AB} + (1-s)\overline{AD}$$

$\overline{DQ} = s\overline{DB}$

$\overline{DB} = \overline{DA} + \overline{AB}$

$\overline{DA} = -\overline{AD}$

Kerrotaan sulut auki.

Erotetaan yhteiseksi tekijäksi.

Vektori $\overline{AQ}$ on esitetty vektorien $\overline{AB}$ ja $\overline{AD}$ avulla.

Muodostetaan yhtälö.

$$\overline{AQ} = \overline{AQ}$$

$$\frac{1}{2}r\overline{AB} + r\overline{AD} = s\overline{AB} + (1-s)\overline{AD}$$

Sijoitetaan vektorille $\overline{AQ}$ saadut lausekkeet.

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}r = s \\ r = 1 - s \end{cases}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$r = \frac{2}{3}$ ja $s = \frac{1}{3}$

Siis $\overline{AQ} = \frac{2}{3}\overline{AP}$, joten piste Q jakaa janan AP suhteessa $2:1$.

Vastaus

$2:1$