



# *Kuinka ratkoa sanallisia tehtäviä geometriassa?*

---

Tuomaksen vaiheet ja vinkit menestykseen\*

\*Vaiheet ja vinkit eivät välttämättä johda menestykseen kaikissa tilanteissa. Saattaa sisältää pähkinää.



# *1. Lue tehtävänanto huolellisesti!*

**7.9**



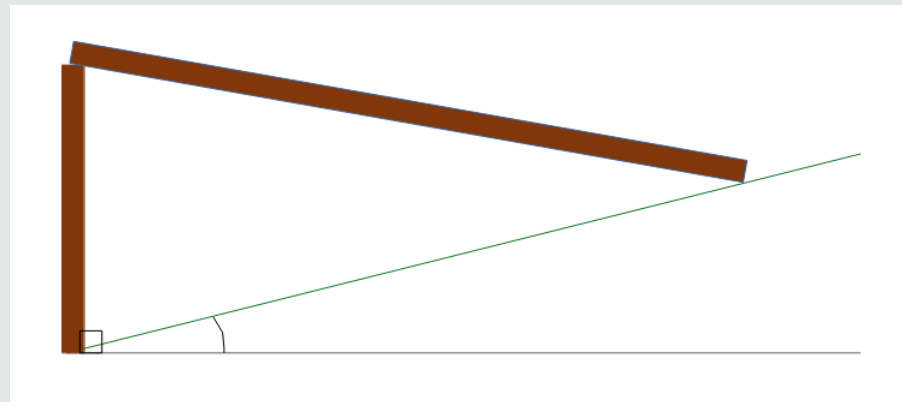
Tasaisesti viettävän rinteeseen kaltevuuskulma on  $9,0^\circ$ . Rinteessä kasvanut pystysuora mänty katkesi 3,5 metrin korkeudelta ja latvaosa taittui ylärinteeseen osuen 5,3 metrin päähän tyvestä irtoamatta tyviosasta.

**b)** Laske männyn alkuperäinen pituus.

”Hmm... okei eli meillä on siis rinne tietyssä kulmassa ja taittunut mänty. Tiedetään kulman lisäksi kaksi pituutta ja männyn alkuperäinen pituus täytyisi laskea.”

## 2. Piirrä tilanteesta mallikuva!

- Mallikuvan ei tarvitse olla kaunis eikä täydellinen, kunhan se on **selkeä**!
- Hyödynnä halutessasi **värejä**, erilaisia viivoja ym.
- Myöskään pituuksien ja kulmien ei tarvitse olla oikean suuruisia/oikeassa suhteessa toisiinsa!
- *Joskus voi tosin helpottaa, jos esimerkiksi piirtää ympyrälle keskipisteen kolmion sivujen keskinormaalien avulla.*



7.9

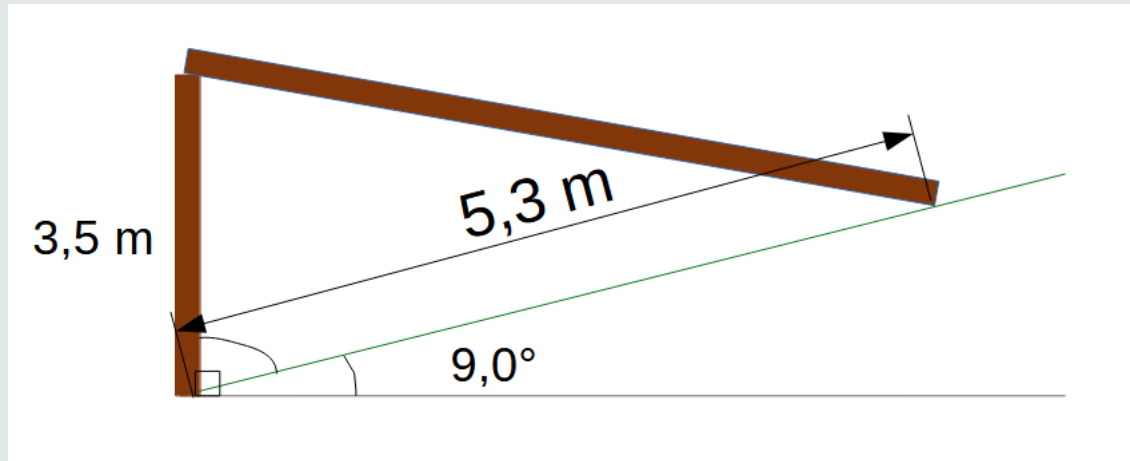


Tasaisesti viettävän rinteeseen kaltevuuskulma on  $9,0^\circ$ . Rinteessä kasvanut pystysuora mänty katkesi 3,5 metrin korkeudelta ja latvaosa taittui ylärinteeseen osuen 5,3 metrin päähän tyvestä irtoamatta tyviosasta.

**b)** Laske männyn alkuperäinen pituus.

### *3. Kirjoita kuvaan kaikki tehtävänannossa kerrotut mitat sekä muut tiedot!*

- Pituudet, korkeudet, kulmien suuruudet ym.



7.9

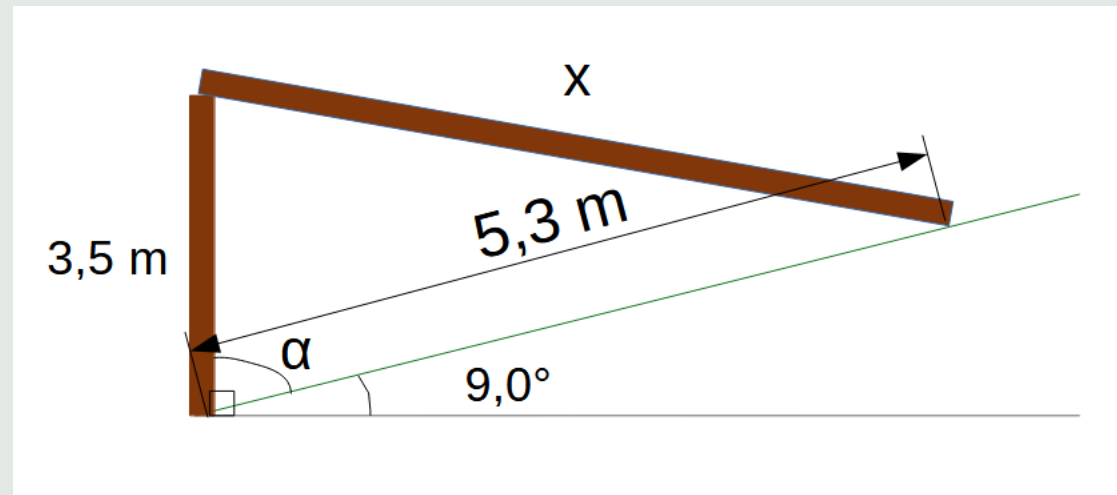


Tasaisesti viettävän rinteeseen kasvanut pystysuora mänty katkesi 3,5 metrin korkeudelta ja latvaosa taittui ylärinteeseen osuen 5,3 metrin päähän tyvestä irtoamatta tyviosasta.

**b)** Laske männyn alkuperäinen pituus.

## 4. Nimeä kuvaan tuntemattomat asiat!

- Esim. pituudet  $a$ ,  $b$ ,  $x$ ,  $y$ ... ja kulmat  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ...



7.9



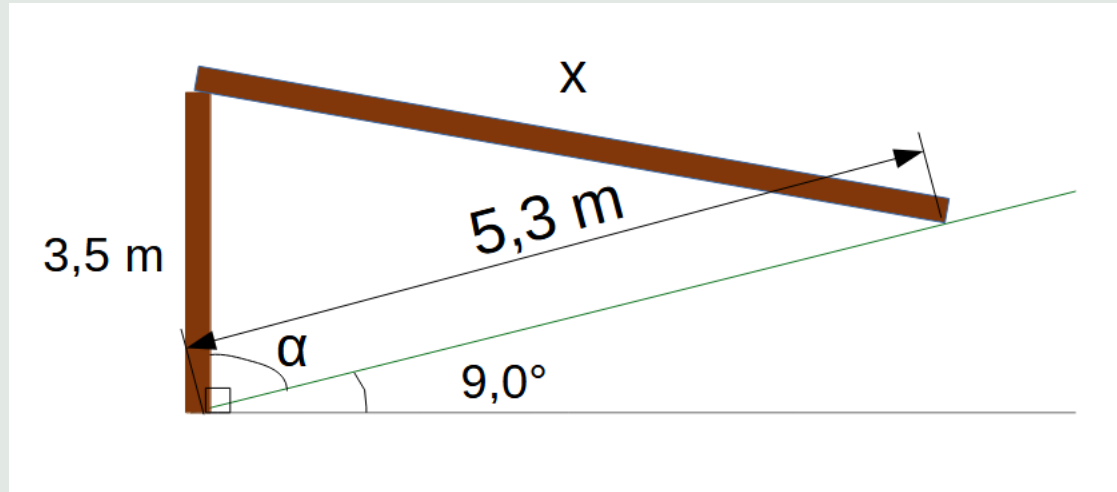
Tasaisesti viettävän rinteeseen kaltevuuskulma on  $9,0^\circ$ . Rinteessä kasvanut pystysuora mänty katkesi  $3,5$  metrin korkeudelta ja latvaosa taittui ylärinteeseen osuen  $5,3$  metrin päähän tyvestä irtoamatta tyviosasta.

**b)** Laske männyn alkuperäinen pituus.

## 5. Pohdi, mitä kuvioita kuvassa on sekä mitä lauseita niihin liittyy!

- Tällä kurssilla esiintyy erityisesti paljon kolmioita.
- Esim. suorakulmaiselle kolmiolle sini, kosini ja tangentti sekä Pythagoraan lause ja kaikille kolmioille sinilause sekä kosinilause.
- *Lauseet ovat matematiikassa tehokkaita ja tärkeitä työkaluja!*

”Kuvassa on ainakin erilaisia kulmia sekä kolmio, joka ei vaikuta suorakulmaiselta. Voisinkohan hyödyntää sinilauseetta tai kosinilauseetta?”



7.9



Tasaisesti viettävän rinteeseen kaltevuuskulma on  $9,0^\circ$ . Rinteessä kasvanut pystysuora mänty katkesi  $3,5$  metrin korkeudelta ja latvaosa taittui ylärinteeseen osuen  $5,3$  metrin päähän tyvestä irtoamatta tyviosasta.

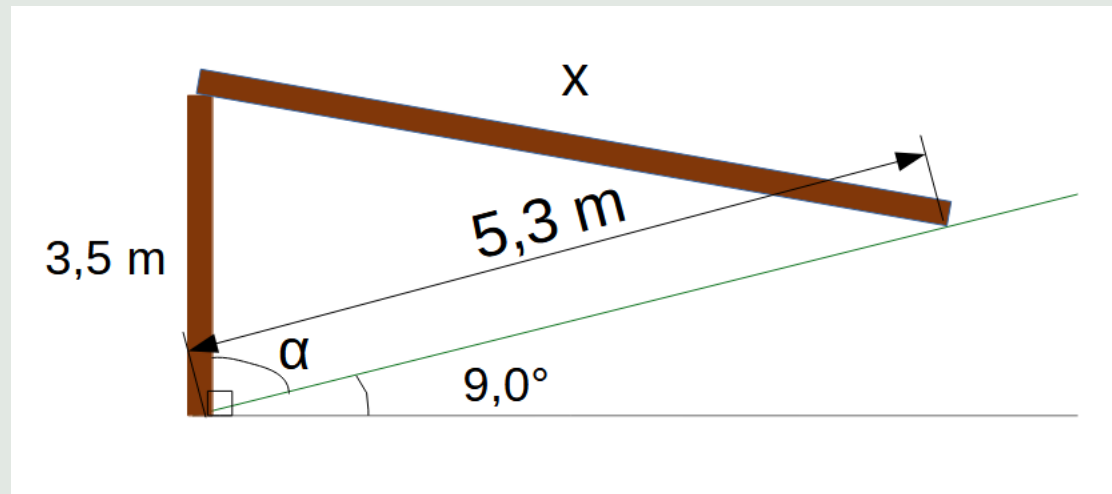
**b)** Laske männyn alkuperäinen pituus.

## 6. Pohdi, minkä tuntemattoman voisit ratkaista ensin ja ratkaise se.

Ratkaistaan kulma  $\alpha$ .

$$\alpha = 90^\circ - 9,0^\circ = 81,0^\circ$$

”Mänty on kasvanut pystysuorassa ja  $9,0^\circ$  kulma tiedetään, joten voin ratkaista kulman  $\alpha$ .”



7.9



Tasaisesti viettävän rinteen kaltevuuskulma on  $9,0^\circ$ . Rinteessä kasvanut pystysuora mänty katkesi 3,5 metrin korkeudelta ja latvaosa taittui ylärinteeseen osuen 5,3 metrin päähän tyvestä irtoamatta tyviosasta.

b) Laske männyn alkuperäinen pituus.

## 7. Pohdi, minkä tuntemattoman voisit ratkaista sitten ja ratkaise se.

"Hei!!! Nyt kun tiiän kulman  $\alpha$  suuruuden ja kolmion kahden sivun pituudet, niin voin ratkaista kolmannen sivun pituuden  $x$  kosinilauseen avulla! Tuo sivu on nyt kulman  $\alpha$  vastainen, joten se tulee kaavassa  $c$ :n paikalle. Ja kulman  $\gamma$  paikalle tulee sitten tietysti kulma  $\alpha$ . Kaavassa  $a$  ja  $b$  on kulman viereisten sivujen pituuksia eli 3,5 m ja 5,3 m."

Ratkaistaan kulma  $\alpha$ .

$$\alpha = 90^\circ - 9,0^\circ = 81,0^\circ$$

Ratkaistaan sitten männyn latvaosan pituus  $x$  kosinilauseen avulla.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

$$x = \pm \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}$$

$$x = \pm \sqrt{(3,5 \text{ m})^2 + (5,3 \text{ m})^2 - 2 \cdot 3,5 \text{ m} \cdot 5,3 \text{ m} \cdot \cos 81,0^\circ}$$

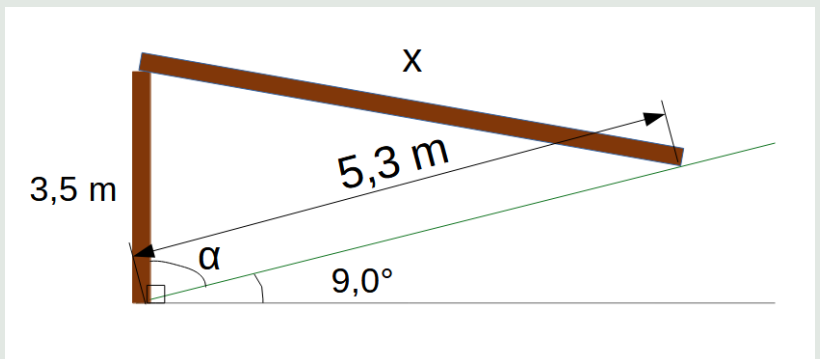
Koska pituus ei voi olla negatiivinen, niin laskimella saadaan männyn latvaosan pituudeksi noin 5,877 m.

7.9



Tasaisesti viettävän rinteeseen kaltevuuskulma on  $9,0^\circ$ . Rinteessä kasvanut pystysuora mänty katkesi 3,5 metrin korkeudelta ja latvaosa taittui ylärinteeseen osuen 5,3 metrin päähän tyvestä irtoamatta tyviosasta.

b) Laske männyn alkuperäinen pituus.





# 8. Toista vaihetta 7 niin monta kertaa kuin tarvitset!

”Sitten saan männyn koko alkuperäisen pituuden lisäämällä latvaosan pituuden  $x$  alemman osan pituuteen.”

Ratkaistaan kulma  $\alpha$ .

$$\alpha = 90^\circ - 9,0^\circ = 81,0^\circ$$

Ratkaistaan sitten männyn latvaosan pituus  $x$  kosinilauseen avulla.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

$$x = \pm \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}$$

$$x = \pm \sqrt{(3,5 \text{ m})^2 + (5,3 \text{ m})^2 - 2 \cdot 3,5 \text{ m} \cdot 5,3 \text{ m} \cdot \cos 81,0^\circ}$$

Koska pituus ei voi olla negatiivinen, niin laskimella saadaan männyn latvaosan pituudeksi noin 5,877 m. Lasketaan vielä männyn alkuperäinen pituus.

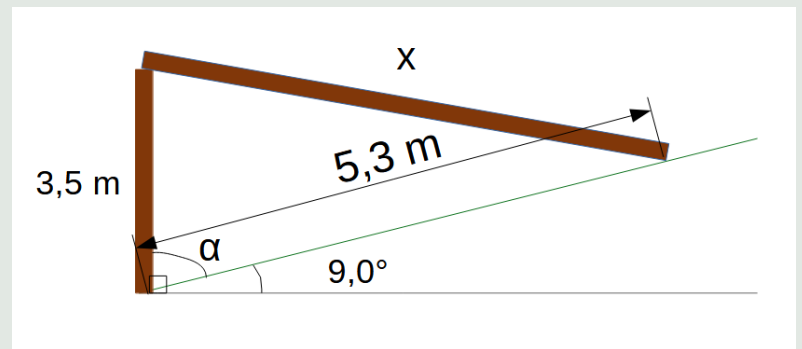
$$3,5 \text{ m} + 5,877 \text{ m} = 9,377 \text{ m} \approx 9,4 \text{ m}$$

7.9



Tasaisesti viettävän rinteeseen kaltevuuskulma on  $9,0^\circ$ . Rinteessä kasvanut pystysuora mänty katkesi 3,5 metrin korkeudelta ja latvaosa taittui ylärinteeseen osuen 5,3 metrin päähän tyvestä irtoamatta tyviosasta.

b) Laske männyn alkuperäinen pituus.



# *Huomioita ratkaisuihin*

- Muista mainita **käyttämäsi lauseet** sekä esittää **käyttämäsi kaavat** symbolein!
- Usein kannattaa **sieventää yhtälöt mahdollisimman pitkälle** ennen lukuarvojen sijoittamista.
- Käytä laskutehtävissä **tarkkoja arvoja tai riittävän tarkkoja välituloksia** (ainakin **2 merkitsevää numeroa enemmän** kuin mitä vastaukseen halutaan)!

Ratkaistaan kulma  $\alpha$ .

$$\alpha = 90^\circ - 9,0^\circ = 81,0^\circ$$

Ratkaistaan sitten männyn latvaosan pituus  $x$  kosinilauseen avulla.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

$$x = \pm \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}$$

$$x = \pm \sqrt{(3,5 \text{ m})^2 + (5,3 \text{ m})^2 - 2 \cdot 3,5 \text{ m} \cdot 5,3 \text{ m} \cdot \cos 81,0^\circ}$$

Koska pituus ei voi olla negatiivinen, niin laskimella saadaan männyn latvaosan pituudeksi noin 5,877 m. Lasketaan vielä männyn alkuperäinen pituus.

$$3,5 \text{ m} + 5,877 \text{ m} = 9,377 \text{ m} \approx 9,4 \text{ m}$$

## 9. Muista pyöristää lopullinen vastaus oikeaan tarkkuuteen ja kirjoittaa sanallinen vastaus!

Ratkaistaan kulma  $\alpha$ .

$$\alpha = 90^\circ - 9,0^\circ = 81,0^\circ$$

Ratkaistaan sitten männyn latvaosan pituus  $x$  kosinilauseen avulla.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

$$x = \pm \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}$$

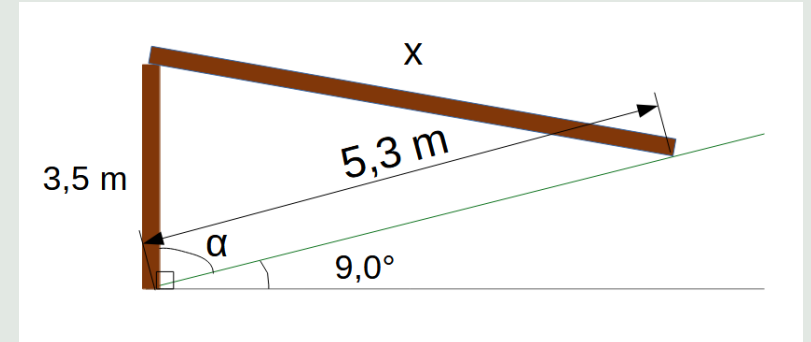
$$x = \pm \sqrt{(3,5 \text{ m})^2 + (5,3 \text{ m})^2 - 2 \cdot 3,5 \text{ m} \cdot 5,3 \text{ m} \cdot \cos 81,0^\circ}$$

Koska pituus ei voi olla negatiivinen, niin laskimella saadaan männyn latvaosan pituudeksi noin 5,877 m.

Lasketaan vielä männyn alkuperäinen pituus.

$$3,5 \text{ m} + 5,877 \text{ m} = 9,377 \text{ m} \approx 9,4 \text{ m}$$

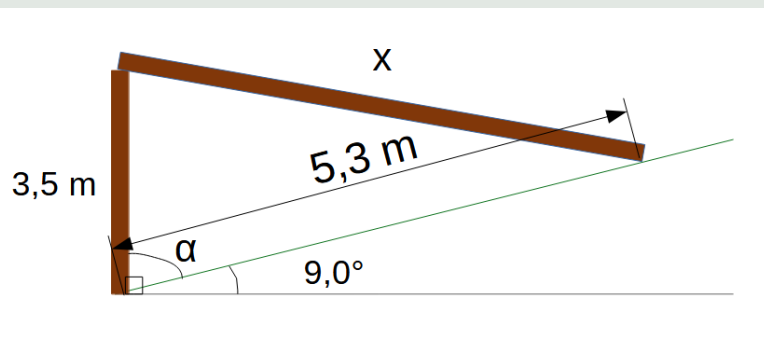
V: Männyn alkuperäinen pituus oli siis 9,4 metriä.



# 10. Pohdi, onko laskemasi tulos järkevä.

**7.9** Tasaisesti viettävän rinteeseen kaltevuuskulma on  $9,0^\circ$ . Rinteessä kasvanut pystysuora mänty katkesi  $3,5$  metrin korkeudelta ja latvaosa taittui ylärinteeseen osuen  $5,3$  metrin päähän tyvestä irtoamatta tyviosasta.

**b)** Laske männyn alkuperäinen pituus.



Ratkaistaan kulma  $\alpha$ .

$$\alpha = 90^\circ - 9,0^\circ = 81,0^\circ$$

Ratkaistaan sitten männyn latvaosan pituus  $x$  kosinilauseen avulla.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

$$x = \pm \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}$$

$$x = \pm \sqrt{(3,5 \text{ m})^2 + (5,3 \text{ m})^2 - 2 \cdot 3,5 \text{ m} \cdot 5,3 \text{ m} \cdot \cos 81,0^\circ}$$

Koska pituus ei voi olla negatiivinen, niin laskimella saadaan männyn latvaosan pituudeksi noin  $5,877$  m. Lasketaan vielä männyn alkuperäinen pituus.

$$3,5 \text{ m} + 5,877 \text{ m} = 9,377 \text{ m} \approx 9,4 \text{ m}$$

V: Männyn alkuperäinen pituus oli siis  $9,4$  metriä.

# *Lisähuomioita*

---

- Älä säikähdä, jos et heti tiedä, miten tehtävä ratkeaa tai mitä kaikkea pitäisi ratkaista (**eivät opettajatkaan aina tiedä** 😊), vaan lähde ratkaisemaan tehtävää **vaihe vaiheelta**. Geometrian tehtävät **eivät usein ole helppoja ja lyhyitä**.
- Kannattaa kirjoittaa vastauksiin **"ihan oikeaa tekstiä"** (esim. "Ratkaistaan sitten männyn latvaosan pituus  $x$  kosinilauseen avulla.") ja **sanallistaa koko ajatteluprosessi!** Älä anna hyvän päättelyn ja pohdinnan mennä hukkaan, vaan **tuota päättelysi esille!**
- Jos tehtävän ratkaisu vaatii aikaa ja pohdintaa, niin **valjasta se vahvuudeksi!**

# *Eli lyhyesti*

---

1. Lue **tehtävänanto** huolellisesti!
2. Piirrä **mallikuva**!
3. Kirjoita kuvaan se, **mitä tiedetään**!
4. Nimeä kuvaan **tuntemattomat** asiat!
5. Pohdi, mitä **kuvioita** ja **lauseita** tilanteeseen liittyy!
- 6. Ratkaise** jokin **tuntematon**!
7. Ratkaise **seuraava tuntematon**!
8. Ratkaise **tuntemattomia vaihe vaiheelta**, kunnes päädyt lopulliseen vastaukseen!
9. Muista **pyöristys** ja **sanallinen vastaus**!
10. Pohdi tuloksen **järkevyyttä**!

## Keskeiset sisällöt

- kuvioiden ja kappaleiden yhdenmuotoisuus
- sini- ja kosinilause
- monikulmioihin liittyvien pituuksien, kulmien ja pinta-alojen laskeminen
- ympyrän ja sen osien ja siihen liittyvien suorien geometriaa
- suoraan lieriöön ja suoraan kartioon sekä palloon liittyvien pituuksien, pinta-alojen ja tilavuuksien laskeminen

# Tukiopetuksen ohjelma

## Omatoimista tehtävien ratkointia:

- Kertausmoniste
- Aiemmin kurssilla lasketut tehtävät
- Jos haluat tietynlaisen tehtävän ratkottavaksi, kysy!

Kysy, kysy, kysy!!!

## Jos et tiedä, mistä aloittaa, niin pohdi, mitkä kurssin keskeisistä sisällöistä vaativat eniten kertausta:

- kpl 3 (erityisesti kk-lause) ja 4 + kertaustehtävät
- kpl 6 ja 7 + kertaustehtävät (huomioi erityisesti "Yleisiä tehtäviä kolmioista")
- Kpl 2 (monikulmioiden pinta-aloja sekä kulmien suuruuksia) sekä 5, 6 ja 7 (kolmion sivujen pituuksia, kulmien suuruuksia sekä pinta-alan sinikaava kappaleessa 6). Myös kpl 8 tärkeä, kunhan muut kolmiokappaleet ovat hallussa! + kertaustehtävät
- Kpl 9–12 (haastavia asioita esimerkiksi segmentin pinta-ala ja tangenttiin liittyvät laskut) + kertaustehtävät
- Kpl 13–16 + kertaustehtävät