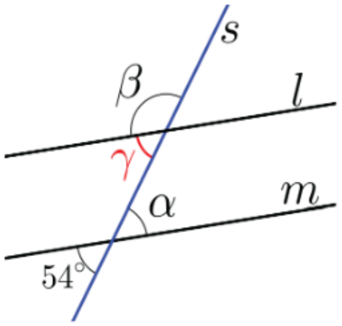
Taitopuntari 1

Vertaa omaa ratkaisuasi malliratkaisuun ja anna itsellesi pisteet.
Testistä voi saada enintään 12 pistettä.
Jos saat vähintään 8 pistettä, olet oppinut tästä luvusta perustaidot.
Huomaa, että tämä testi ei kerro, onko osaamisesi kiitettävää tasoa.

a)



Ristikulmat α ja $54°$ ovat yhtä suuret.

$\alpha = 54°$ 2p

Suora s on kulman $54°$ ja kulman γ vasen kylki, joten ne ovat samankohtaiset kulmat. Koska suorat l ja m ovat yhdensuuntaiset, ovat samankohtaiset kulmat yhtä suuret.

$\gamma = 54°$ 2p

Kulma β on kulman γ vieruskulma, joten

$\beta = 180° - 54° = 126°.$ 2p

b) Kolmion kulmien summa on $180°$. 2p

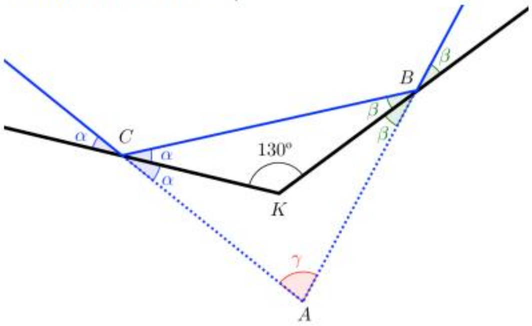
Lasketaan kulman α suuruus.

$$\alpha + 38° + 90° = 180° \quad \text{2p}$$
$$\alpha + 128° = 180° \quad \big| -128°$$
$$\alpha = 52° \quad \text{2p}$$

Vastaus
a) $\alpha = 54°$ ja $\beta = 126°$
b) $\alpha = 52°$

1.21

Valonsäde heijastuu peilistä samassa kulmassa kuin missä se tulee peiliin. Piirretään mallikuva ja käytetään kuvan merkintöjä. Tulevan ja lähtevän säteen välinen kulma on γ.



Kolmion KBC kulmien summasta saadaan yhteys kulmien α ja β välille.

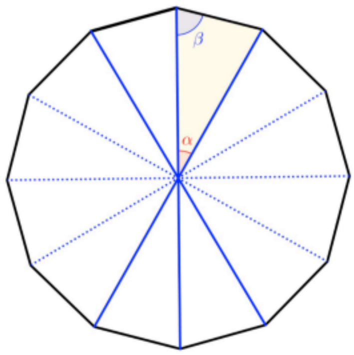
$$\begin{aligned} \alpha+\beta+130^\circ &= 180^\circ && \vert -130^\circ \\ \alpha+\beta &= 50^\circ && \vert -\beta \\ \beta &= 50^\circ-\alpha \end{aligned}$$

Muodostetaan yhtälö kolmion ABC kulmien summan perusteella ja ratkaistaan säteiden välinen kulma γ

$$\begin{aligned} 2\beta+2\alpha+\gamma &= 180^\circ && \vert -2\beta-2\alpha \\ \gamma &= 180^\circ-2\beta-2\alpha && \vert \beta=50^\circ-\alpha \\ &= 180^\circ-2(50^\circ-\alpha)-2\alpha \\ &= 180^\circ-100^\circ+2\alpha-2\alpha \\ &= 80^\circ \end{aligned}$$

Vastaus
80°

2.7



Säännöllinen 12-kulmio koostuu kahdestatoista yhtenevästä tasakylkisestä kolmiosta.

Kolmioiden huippukulmat α muodostavat täyden kulman. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan huippukulman α suuruus.

$$12\alpha = 360°$$
$$\alpha = \frac{360°}{12} = 30°$$

Kolmion kulmien summa on $180°$. Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kantakulman β suuruus.

$$\alpha + 2\beta = 180°$$
$$30° + 2\beta = 180° \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$\beta = 75°$$

Vastaus
$\alpha = 30°$ ja $\beta = 75°$

3.8

a) Lävistäjän suuntaa tutkimalla havaitaan, että pituudet 3 ja 5 vastaavat toisiaan ja pituudet 6 ja x vastaavat toisiaan.

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x.

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{x} \qquad \text{Kerrotaan ristiin.}$$
$$3x = 30 \quad |:3$$
$$x = 10$$

b) Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan y.

$$\frac{3}{5} = \frac{y}{16} \qquad \text{Kerrotaan ristiin.}$$
$$5y = 48 \quad |:5$$
$$y = \frac{48}{5} (= 9\tfrac{3}{5} = 9{,}6)$$

c) Mittakaava on vastinpituuksien suhde.

$$\frac{5}{3} = 5:3 \ \ (\text{tai } \frac{3}{5} = 3:5)$$

Vastaus
a) $x = 10$
b) $y = \frac{48}{5}\left(= 9\frac{3}{5} = 9{,}6\right)$
c) $5:3$ $(\text{tai } 3:5)$

Taitopuntari 3

Vertaa omaa ratkaisuasi malliratkaisuun ja anna itsellesi pisteet.
Testistä voi saada enintään 12 pistettä.
Jos saat vähintään 8 pistettä, olet oppinut tästä luvusta perustaidot.
Huomaa, että tämä testi ei kerro, onko osaamisesi kiitettävää tasoa.

a) Merkitään laivan korkeutta kirjaimella x.

Kootaan tiedot taulukkoon.

	Pituus	**Korkeus**
Purjelaiva (m)	147	x
Pienoismalli (cm)	73,5	34

2p

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x.

$$\frac{147}{73,5} = \frac{x}{34}$$ 2p

Vastinpituuksien suhteet
ovat yhtä suuret.
Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 68 \text{ (m)}$$ 2p

Laivan korkeus on 68 m.

b) Purjelaivan pituus oli 147 m.

Pienoismallin pituus on 73,5 cm = 0,735 m. 1p

Mittakaava on vastinpituuksien suhde.

$$\frac{0,735 \text{ m}}{147 \text{ m}}$$ 2p

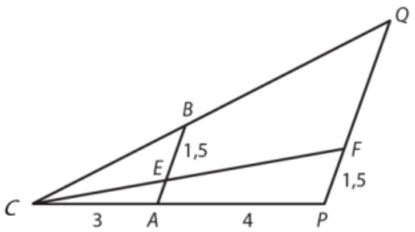
Verrataan pienoismallin
mittoja todellisiin mittoihin.
Lasketaan suhteen tarkka
arvo laskimella.

$$= \frac{1}{200}$$ 1p

Pienoismallin mittakaava on 1 : 200. 1p

Vastaus
a) 68 m
b) 1 : 200

3.19



Kolmiot CAE ja CPF ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

- Kolmioissa on yhteinen kulma C.
- Koska janat AB ja PQ ovat yhdensuuntaiset, kulmat CAE ja CPF ovat samankohtaisina kulmina yhtä suuret.

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan janan AE pituus.

$$\frac{AE}{PF} = \frac{CA}{CP}$$

$$\frac{AE}{1{,}5} = \frac{3}{7}$$

$$AE = 0{,}642857...$$

Kolmiot CPQ ja CAB ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

- Kolmioissa on yhteinen kulma C.
- Koska janat AB ja PQ ovat yhdensuuntaiset, kulmat CAB ja CPQ ovat samankohtaisina kulmina yhtä suuret.

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan janan PQ pituus.

$$\frac{PQ}{AB} = \frac{CP}{CA}$$

$$\frac{PQ}{1{,}5 + 0{,}642857...} = \frac{7}{3}$$

$$PQ = 5$$

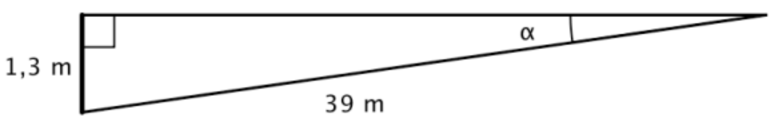
Lasketaan janan FQ pituus.

$$FQ = PQ - PF = 5 - 1{,}5 = 3{,}5$$

Vastaus

$FQ = 3{,}5$

5.18



Merkitään kysytyn kulman suuruutta kirjaimella α.

Muodostetaan yhtälö sinin avulla ja ratkaistaan α.

$$\sin\alpha = \frac{1{,}3}{39}$$

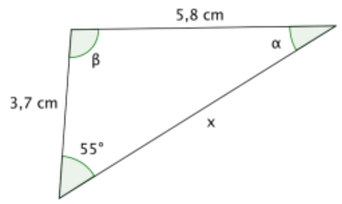
$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1{,}3}{39}\right) = 1{,}91...^\circ \approx 1{,}9^\circ$$

Vastaus

$1{,}9^\circ$

6.5

Piirretään tilanteesta kuva.



Selvitetään ensin kulman α suuruus sinilauseen avulla.

$$\frac{3{,}7}{\sin\alpha}=\frac{5{,}8}{\sin 55°}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

Rajataan tulos välille $0° < \beta < 180°$.

$\alpha = 31{,}504...°$ tai $\alpha = 148{,}49...°$

Kulman β suuruus saadaan selville kolmion kulmien summan avulla.

- Kun $\alpha = 31{,}504...° \approx 32°$, niin
  $\beta = 180° - 55° - 31{,}504...° = 93{,}495...° \approx 93°$
  Tämä kelpaa kolmion kulmaksi. Kun $\alpha \approx 32°$, niin $\beta \approx 93°$.
- Kun $\alpha = 148{,}49° \approx 148°$, niin
  $\beta = 180° - 55° - 148{,}49...° = -23{,}49...°$
  Tämä ei kelpaa kolmion kulmaksi, joten myöskään arvo $\alpha \approx 148°$ ei ole mahdollinen.

Sivun pituus x saadaan sinilauseen avulla.

$$\frac{x}{\sin\beta}=\frac{5{,}8}{\sin 55°}$$

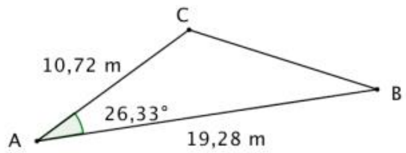
Ratkaistaan CAS-laskimella.

$x = 7{,}067... \approx 7{,}1$ (cm)

Muut kulmat ovat 32° ja 93° sekä kolmas sivu 7,1 cm.

Vastaus
kulmat 32º ja 93º sekä sivu 7,1 cm

6.6



Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A=\frac{1}{2}ab\sin\gamma \qquad \left|\begin{array}{l} a = 19{,}28 \\ b = 10{,}72 \\ \gamma = 26{,}33° \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\cdot 19{,}28\cdot 10{,}72\cdot \sin 26{,}33° \\ &= 45{,}8358... \\ &\approx 45{,}84\ (\text{m}^2) \end{aligned}$$

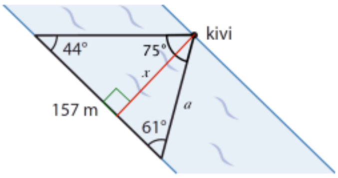
Kolmion pinta-ala on 45,84 m².

Vastaus
45,84 m²

6.9

Täydennetään kuvaan kysytty joen leveys x ja kolmas kulma

$180° - 44° - 61° = 75°$.



Lasketaan suorakulmaisen kolmion kateetin a pituus sinilauseen avulla.

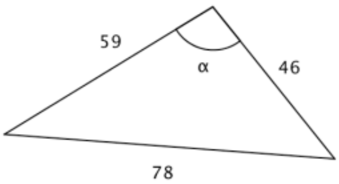
$$\frac{a}{\sin 44°} = \frac{157}{\sin 75°} \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$a = 112{,}908...\ \text{(cm)}$$

Joen leveys saadaan suorakulmaisen kolmion avulla.

$$\begin{aligned}\sin 61° &= \frac{x}{a}\\ x &= a\sin 61°\\ &= 112{,}908...\cdot \sin 61°\\ &= 98{,}752...\\ &\approx 99\ \text{(m)}\end{aligned}$$

Vastaus
99 m

7.4



Kolmion suurin kulma on pisimmän sivun vastainen kulma.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha \qquad a = 46;\ b = 59;\ c = 78 \text{ ja } \gamma = \alpha$$

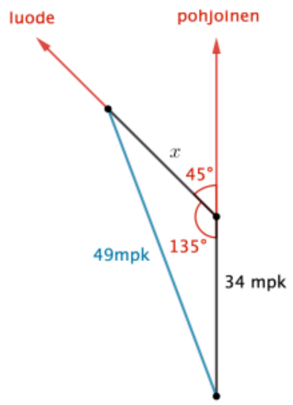
$$\begin{aligned}78^2 &= 59^2 + 46^2 - 2\cdot 59\cdot 46\cdot\cos\alpha\\ 2\cdot 59\cdot 46\cdot\cos\alpha &= 59^2 + 46^2 - 78^2\\ \cos\alpha &= \frac{59^2 + 46^2 - 78^2}{2\cdot 59\cdot 46} = \frac{-487}{5428}\\ \alpha &= \cos^{-1}\left(-\frac{487}{5428}\right) = 95{,}14...° \approx 95{,}1°\end{aligned}$$

Vastaus
95,1°

Huomaa:
Voit ratkaista yhtälön myös CAS-laskimella.
Rajoita ratkaisu välille $0° < \alpha < 180°$.

7.14

Kääntyessään kohti luodetta alus kääntyy kulman $45°$.
Syntyvän kolmion kulmaksi saadaan $180° - 45° = 135°$.



Ratkaistaan luoteeseen ajetun matkan pituus x kosinilauseella.

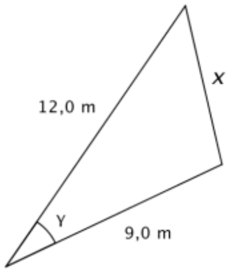
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$
$$49^2 = x^2 + 34^2 - 2 \cdot x \cdot 34 \cdot \cos 135° \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$x = -66{,}73... \text{ tai } x = 18{,}65...$$

Kolmion sivun pituus on positiivinen luku, joten

$x = 18{,}65...$ mpk ≈ 19 mpk.

Vastaus
19 mpk

7.17



Määritetään tunnettujen sivujen välinen kulma pinta-alan avulla.

$A = \frac{1}{2}bc\sin\gamma$

$27{,}0 = \frac{1}{2} \cdot 12{,}0 \cdot 9{,}0 \cdot \sin\gamma$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$\gamma = 30°$ tai $\gamma = 150°$

Kolmannen sivun pituus x saadaan kosinilauseella.

$x^2 = 12{,}0^2 + 9{,}0^2 - 2 \cdot 12{,}0 \cdot 9{,}0 \cdot \cos\gamma$

$= 225 - 216\cos\gamma$

- Tapaus $\gamma = 30°$:

  $x^2 = 225 - 216\cos 30° = 37{,}93...$

  $x = -\sqrt{37{,}93...} = -6{,}15...$ tai $x = \sqrt{37{,}93...} = 6{,}15...$

  Sivun pituus on positiivinen luku, joten $x = 6{,}15...\ \text{m} \approx 6{,}2\ \text{m}$.

- Tapaus $\gamma = 150°$:

  $x^2 = 225 - 216\cos 150° = 412{,}06...$

  $x = -\sqrt{412{,}06...} = -20{,}29...$ tai $x = \sqrt{412{,}06...} = 20{,}29...$

  Sivun pituus on positiivinen luku, joten $x = 20{,}29...\ \text{m} \approx 20{,}3\ \text{m}$.

Kolmion kolmannen sivun pituus on 6,2 m tai 20,3 m.

Vastaus
6,2 m tai 20,3 m

Taitopuntari 8

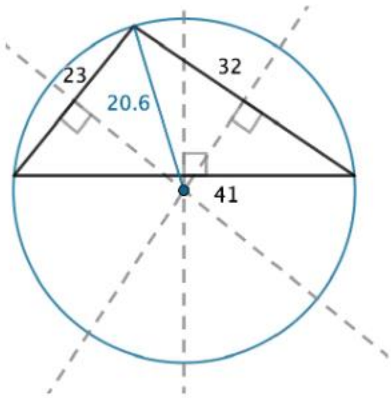
Vertaa omaa ratkaisuasi malliratkaisuun ja anna itsellesi pisteet.
Testistä voi saada enintään 12 pistettä.
Jos saat vähintään 8 pistettä, olet oppinut tästä luvusta perustaidot.
Huomaa, että tämä testi ei kerro, onko osaamisesi kiitettävää tasoa.

Kolmio piirretty oikein. 3p

a) Määritetään kolmion sivujen keskinormaalit ja keskinormaalien leikkauspiste. 1p

Piirretään ympyrä keskinormaalien leikkauspisteen ja jonkin kolmion kärkipisteen avulla. 1p

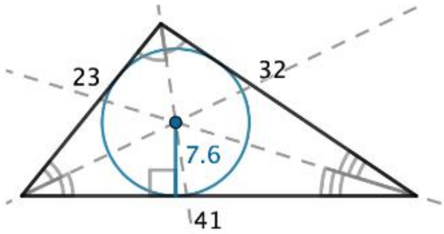
Ympäri piirretyn ympyrän säde on 20,6. 1p



b) Määritetään kulmanpuolittajien leikkauspiste.
Piirretään jollekin kolmion sivulle normaali, joka kulkee ympyrän keskipisteen kautta. 1p

Piirretään ympyrä kulmanpuolittajien leikkauspisteen ja tunnetun kehäpisteen avulla. 1p

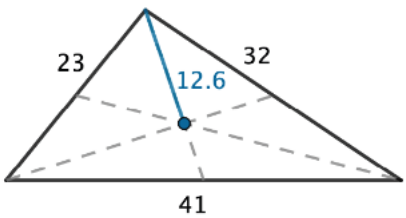
Sisään piirretyn ympyrän säde on 7,6 1p



c) Määritetään kolmion sivujen keskipisteet ja keskijanojen leikkauspiste eli painopiste. 1p

Mitataan painopisteen etäisyys suurimman eli pisimmän sivun vastaisen kulman kärjestä. 1p

Painopisteen etäisyys suurimman kulman kärjestä on 12,6. 1p

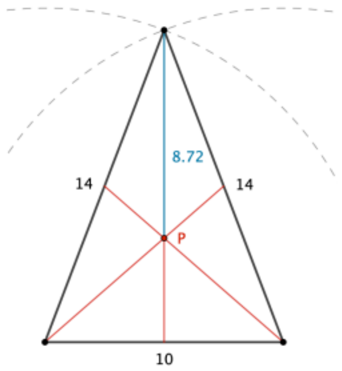


Vastaus
a) 20,6
b) 7,6
c) 12,6

8.2

Piirretään jana, jonka pituus on 10.
Piirretään janan päätepisteet keskipisteinä ympyrät, joiden säteet ovat 14.
Ympyröiden leikkauspiste on kolmion huippukulma.

Painopiste on kolmion keskijanojen leikkauspiste. Piirretään keskijanat kolmion kärjistä vastakkaisten sivujen keskipisteisiin ja keskijanojen leikkauspiste P. Mitataan painopisteen P ja huippukulman välinen etäisyys.



Painopisteen etäisyys kolmion huippukulman kärjestä on 8,7.

Vastaus
8,7

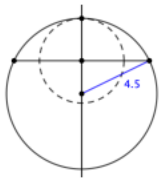
10.11

a)

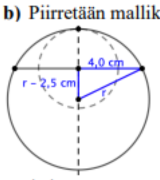
Piirretään jana, jonka pituus on 8,0.

Piirretään janalle keskinormaali.
Merkitään janan ja keskinormaalin leikkauspiste.
Piirretään, jonka säde on 2,5 ja keskipiste on janan ja keskinormaalin leikkauspiste.
Merkitään keskinormaalin ja ympyrän leikkauspiste.

Piirretään uusi ympyrä kolmen pisteen eli janan päätepisteiden sekä keskinormaalin ja 2,5-säteisen ympyrän leikkauspisteen kautta.
Merkitään uuden ympyrän keskipiste.
Piirretään ympyrän säde janan päätepisteestä ympyrän keskipisteeseen.
Mitataan säteen pituus.
Säteen pituus on 4,5 cm.



b) Piirretään mallikuva.



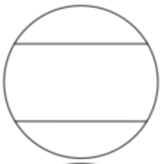
Ratkaistaan säteen pituus Pythagoraan lauseella.

$$(r-2{,}5)^2+4^2=r^2 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$r=4{,}45$$
$$\approx 4{,}5 \text{ (cm)}$$

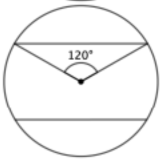
Vastaus
a) 4,5 cm
b) 4,5 cm

10.10

Piirretään mallikuva.



Pizza jakaantuu kahdeksi yhteneväksi segmentiksi ja niiden väliin jääväksi alueeksi.



Koska jokaisessa viipaleessa yhtä paljon reunaa, on yhden segmentin kaaren pituus $\frac{1}{3}$ ympyrän kehän pituudesta. Tällöin kaarta vastaava keskuskulma on $\frac{1}{3}$ täydestä kulmasta eli $\frac{1}{3}\cdot 360° = 120°$.

Pizzan halkaisija on 28 cm eli pizzan säde on 14 cm.

Ympyräsektorin pinta-ala on $\frac{120°}{360°}\cdot\pi\cdot 14^2 = 205,250...$ (cm^2).

Kolmion pinta-ala on $\frac{1}{2}\cdot 14\cdot 14\cdot \sin 120° = 84,870...$ (cm^2)

Segmentin pinta-ala on
$205,250...\text{ cm}^2 - 84,870...\text{ cm}^2 = 120,380...\text{ cm}^2 \approx 120\text{ cm}^2$.

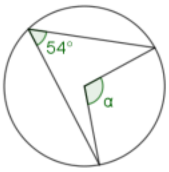
Toinen segmentti on yhtä suuri.

Segmenttien väliin jäävän alueen pinta-ala on
$\pi\cdot 14^2 - 2\cdot 120,380... = 374,991... \approx 375$ (cm^2)

Vastaus
Viipaleiden pinta-alat ovat 120 cm^2, 375 cm^2 ja 120 cm^2.

11.1

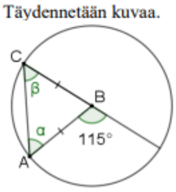
a)



Kulma α on keskuskulma ja samaa kaarta vastaavan kehäkulma on $54°$.
$\alpha = 2\cdot 54° = 108°$

Keskuskulma on kaksi kertaa niin suuri kuin kehäkulma.

b) Täydennetään kuvaa.

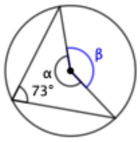


Kulma β on kehäkulma. Samaa kaarta vastaava keskuskulma on $115°$.
$\beta = \frac{1}{2}\cdot 115° = 57,5°$

Kehäkulma on puolet samaa kaarta vastaavasta keskuskulmasta.

Kolmio ABC on tasakylkinen kolmio. Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret, joten $\alpha = \beta = 57,5°$.

c) Täydennetään kuvaa.



Kulma β on keskuskulma, ja samaa kaarta vastaava kehäkulma on $73°$.

$\beta = 2 \cdot 73° = 146°$

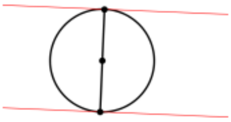
Keskuskulma on kaksi kertaa niin suuri kuin kehäkulma.

Kulmat α ja β muodostavat täysikulman.
$\alpha = 360° - 146° = 214°$.

Vastaus
a) 108°
b) 57,5°
c) 214°

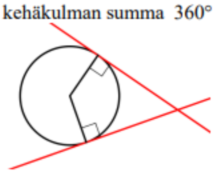
12.9

a) Jos tangentit on piirretty halkaisijan päätypisteisiin, ne eivät leikkaa toisiaan. Väite on epätosi.

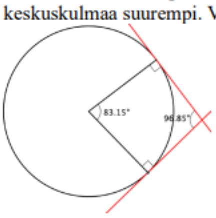


b) Ympyrän tangentti on aina kohtisuorassa sivuamispisteeseen piirrettyä sädettä vastaan. Täten tangentti on sivuamipisteeseen piirretyn säteen normaali. Väite on tosi.

c) Tangenttikulman ja sitä vastaava keskuskulma on kaksi kulmaa nelikulmiossa, jossa kaksi muuta kulmaa ovat 90°. Koska nelikulmion kulmien summa on aina 360°, on tangenttikulman ja sitä vastaavan kehäkulman summa $360° - 2 \cdot 90° = 180°$. Väite on tosi.



d) Jos keskuskulma on pienempi kuin $90°$, tangenttikulma on keskuskulmaa suurempi. Väite on epätosi.

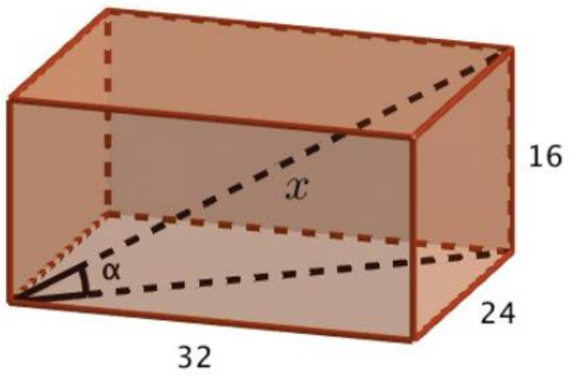


Vastaus
a) epätosi **b)** tosi
c) tosi **d)** epätosi

Taitopuntari 13

Vertaa omaa ratkaisuasi malliratkaisuun ja anna itsellesi pisteet.
Testistä voi saada enintään 12 pistettä.
Jos saat vähintään 8 pistettä, olet oppinut tästä luvusta perustaidot.
Huomaa, että tämä testi ei kerro, onko osaamisesi kiitettävää tasoa.

a) Piirretään kuva geometriaohjelmalla.



Kappaleen muoto oikeanlainen 1p
Molemmat lävistäjät oikein 2p
Kulma merkitty oikein 1p

b) Lasketaan avaruuslävistäjän pituus x.

$x^2 = 32^2 + 24^2 + 16^2$ Ratkaistaan CAS-laskimella. 2p
$x \approx 43$ tai $x \approx -43$ 1p

Pituus on positiivinen luku, joten $x \approx 43$ cm. 1p

Jos yhtälön negatiivinen ratkaisu puuttuu, niin b-kohdasta enintään 3p.

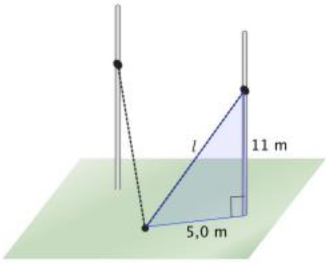
c) Lasketaan kulman α suuruus.

$$\sin\alpha \approx \frac{16}{43{,}0813}$$ 2p

$$\alpha \approx \sin^{-1}\left(\frac{16}{43{,}0813}\right) \approx 22°$$ 2p

Vastaus
b) 43 cm
c) 22°

13.19

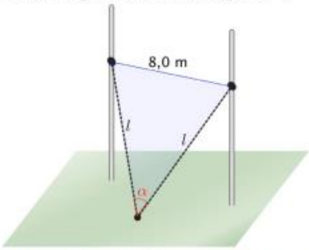


Lasketaan tukivaijerin pituus l.

$l^2 = 5^2 + 11^2$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$l = \pm\sqrt{146}$

Pituus on positiivinen luku, joten $l = \sqrt{146}$.



Lasketaan vaijereiden välisen kulman suuruus kosinilauseella.

$8{,}5^2 = l^2 + l^2 - 2 \cdot l \cdot l \cdot \cos\alpha$

$72{,}25 = 2l^2 - 2l^2 \cos\alpha$ Sijoitetaan $l^2 = 146$.

$72{,}25 = 2 \cdot 146 - 2 \cdot 146 \cos\alpha$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

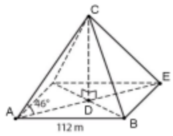
$\alpha = 41{,}186...^\circ \approx 41^\circ$

Vastaus

41°

15.5

a)



Kolmio ADB on suorakulmainen ja tasakylkinen ($AD = BD$).
Ratkaistaan kateetin AD pituus.

$AD^2 + BD^2 = 112^2$ Sijoitetaan $AD = DB$.

$AD^2 + AD^2 = 112^2$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$AD = 79{,}19...$ tai $AD = -79{,}19...$

Pituus on positiivinen luku, joten $AD = 79{,}19...$ m.
Kolmio ACD on suorakulmainen.
Ratkaistaan sivusärmän AC pituus.

$\cos 46° = \frac{79{,}19...}{AC}$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$AC = 114{,}00... \approx 114$ (m)

b) **Tapa 1.** Sivutahko ACB on tasakylkinen kolmio. Merkitään huippukulman ACB suuruutta kirjaimella α ja ratkaistaan se kosinilauseella.

$112^2 = 114{,}00...^2 + 114{,}00...^2 - 2 \cdot 114{,}00... \cdot 114{,}00... \cdot \cos\alpha$

$\alpha = 58{,}83...° \approx 59°$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

Tapa 2. Sivutahkolle ACB piirretty korkeusjana muodostaa suorakulmaisen kolmion, jonka hypotenuusan pituus on $114{,}00...$ m ja kanta 56 m. Merkitään suorakulmaisen kolmion huippukulman suuruutta kirjaimella α.

$\sin\alpha = \frac{56}{114{,}00...}$

$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{56}{114{,}00...}\right) = 29{,}42...°$

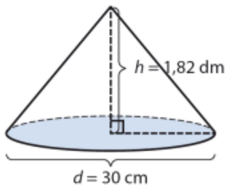
Sivutahkon ACB huippukulman suuruus on
$2\alpha = 2 \cdot 29{,}42...° = 58{,}83...° \approx 59°$.

Vastaus

a) 114 m **b)** 59°

15.12

a) Piirretään kuva.



Kartion korkeus $h = 1{,}82$ dm ja pohjan säde $r = 15$ cm $= 1{,}5$ dm.
Lasketaan tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}A_p h \\ &= \frac{1}{3}\cdot \pi r^2 \cdot h \\ &= \frac{1}{3}\cdot \pi \cdot 1{,}5^2 \cdot 1{,}82 \\ &= 4{,}28... \\ &\approx 4{,}3\ (\text{dm}^3) \end{aligned}$$

Tilavuus on $4{,}3\ \text{dm}^3 = 4{,}3$ L.

b) Kartion korkeus $h = 1{,}82$ dm $= 0{,}182$ m
ja pohjan säde $r = 15$ cm $= 0{,}15$ m.
Ratkaistaan sivujanan pituus s.

$s^2 = 0{,}15^2 + 0{,}182^2$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$s = 0{,}235...$ tai $s = -0{,}235...$

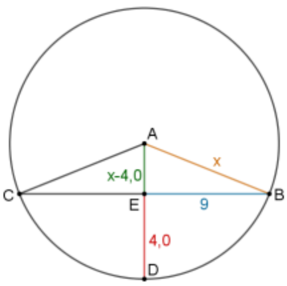
Pituus on positiivinen luku, joten $s = 0{,}235...$ m.
Lasketaan vaipan pinta-ala.

$$\begin{aligned} A_v &= \pi r s \\ &= \pi \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}235... \\ &= 0{,}111... \\ &\approx 0{,}11\ \text{m}^2 \end{aligned}$$

Vastaus

a) 4,3 L **b)** 0,11 m²

16.15



Ratkaistaan pallon säde x Pythagoraan lauseella.

$r^2 = (r-4)^2 + 9^2$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$r = 12{,}125$

Lasketaan pallosegmentin muotoisen kuopan tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \pi h^2\left(r - \frac{h}{3}\right) \\ &= \pi \cdot 4{,}0^2 \cdot \left(12{,}125 - \frac{4{,}0}{3}\right) \\ &= 542{,}44... \\ &\approx 540\ (\text{cm}^3) \end{aligned}$$

Vastaus

540 cm^3

16.8

Lasketaan messinkisen kuulan tilavuus.

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad \text{tiheys} = \frac{\text{massa}}{\text{tilavuus}}$$

$$V = \frac{m}{\rho}$$

$$V = \frac{4{,}000\ \text{kg}}{8400\ \text{kg/m}^3}$$

$$V = 0{,}00047619\ \text{m}^3$$

Ratkaistaan kuulan säde r.

$$0{,}00047619 = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$r = 0{,}04844...\ \text{(m)}$$

Lasketaan kuulan halkaisija.

$$\begin{aligned} d &= 2r \\ &= 2 \cdot 0{,}04844...\ \text{m} \\ &= 0{,}09688...\ \text{m} \\ &= 9{,}688...\ \text{cm} \\ &\approx 9{,}7\ \text{cm} \end{aligned}$$

Vastaus
9,7 cm