

1.7 Viivästysmaksu 6 p.

Logistiikkafirma maksaa myöhästyneistä paketeista viivästyskorvasta 50€ ja lisäksi 10€ jokaisesta saapumispäivän yli menevältä päivältä.

a. Muodosta funktio $f(x)$, joka ilmaisee viivästyskorvauksen suuruuden, kun paketti myöhästyy x päivää.

b. Kuinka paljon logistiikkafirma joutuu maksamaan asiakkaalle 5 päivää myöhästyneestä paketista.

a) $f(x) = 10x + 50$ 3p

b) $f(5) = 10 \cdot 5 + 50 = 50 + 50 = 100$ 1p kaava, 1p sijoitus, 1p ratk.

vastaus: 100 euroa

2. Sievennyksiä 12 p.

a. Marja-Leena suoritti seuraavan sievennyksen.

$$\begin{aligned} & (2x - 2)(x - 3)^2 \\ &= (2x - 2)(x^2 - 2 \cdot x \cdot (-3) + (-3)^2) \\ &= (2x - 2)(x^2 + 6x - 9) \\ &= 2x^3 + 12x^2 - 18x - 2x^2 - 12x - 18 \\ &= 2x^3 + 14x^2 - 30x - 18 \end{aligned}$$

Jokaisessa välivaiheessa on vähintään yksi virhe. Korjaa virheet ja suorita sievennys oikein.

$$\begin{aligned}
& (2x-2)(x-3)^2 \\
& = (2x-2)(x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2) \quad \boxed{1\text{p}} \\
& = (2x-2)(x^2 - 6x + 9) \quad \boxed{1\text{p}} \\
& = 2x^3 - 12x^2 + 18x - 2x^2 + 12x - 18 \quad \boxed{1\text{p}} \\
& = 2x^3 - 14x^2 + 30x - 18 \quad \boxed{1\text{p}}
\end{aligned}$$

Vastaus

$$2x^3 - 14x^2 + 30x - 18$$

b. Sievennä lauseke.

$$(7x-2)^2 - 9x^2$$

Muistikaavalla

$$(7x-2)^2 - 9x^2 \quad \boxed{\text{Muistikaava 1p}}$$

$$= (7x)^2 - 2 \cdot 7x \cdot 2 + 2^2 - 9x^2 \quad \boxed{1\text{p}}$$

$$= 49x^2 - 28x + 4 - 9x^2 \quad \boxed{1\text{p}}$$

$$= 40x^2 - 28x + 4 \quad \boxed{1\text{n}}$$

3. Yhtälön ratkaisua 12 p.

a. Ratkaise yhtälö välivaiheittain.

$$2x^2 = 3x - 7$$
 kaavan pyörittely 1p

$$2x^2 - 3x + 7 = 0 \quad \text{ratkaisukaavaan sijoitus} \quad a = 2, b = -3 \text{ ja } c = 7$$

1p oikeat a, b, c; 1p oikeat sijoitukset kaavaan

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 56}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{-47}}{4}$$

2p laskeminen

koska $\sqrt{-47}$ ei ole määritelty, niin yhtälöllä ei ratkaisuja

vastaus: ei ratkaisua (millään $x \in \mathbb{R}$)

1p ratkaisu

b. Ratkaise epäyhtälö välivaiheittain.

$$(x + 2)(x + 2) \leq (x + 2)(2x - 5)$$

$$(x + 2)(x + 2) \leq (x + 2)(2x - 5) \quad \text{avataan sulut}$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 \leq x \cdot 2x - x \cdot 5 + 2 \cdot 2x - 2 \cdot 5$$

1p

$$x^2 + 4x + 4 \leq 2x^2 - 5x + 4x - 10$$

$$x^2 - 2x^2 + 4x + 5x - 4x + 4 + 10 \leq 0$$

1n

$$-x^2 + 5x + 10 \leq 0$$

Määritetään funktion $f(x) = -x^2 + 5x + 14$ nollakohdat.

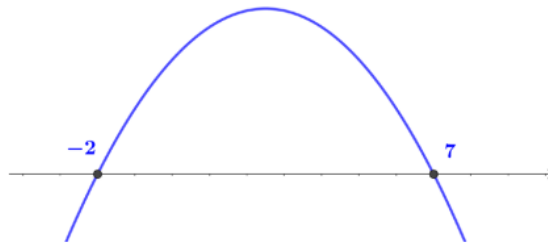
$$-x^2 + 5x + 14 = 0 \quad | \quad a = -1, b = 5, c = 14$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 14}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-5 \pm \sqrt{81}}{-2} = \frac{-5 \pm 9}{-2}$$

$$x = \frac{-5+9}{-2} = \frac{4}{-2} = -2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-5-9}{-2} = \frac{-14}{-2} = 7$$

1p, oikeat a, b ja c

Hahmotellaan funktion $f(x) = -x^2 + 5x + 14$ kuvaajaparaabeli, joka on alaspäin aukeava, koska $a = -1 < 0$.



Funktion f arvo on epäpositiivinen, eli epäyhtälö $-x^2 + 5x + 14 \leq 0$ toteutuu, kun $x \leq -2$ tai $x \geq 7$.

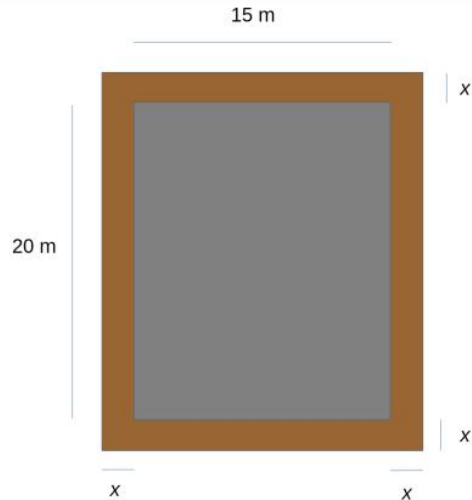
1p laskeminen, 1p oikeat arvot

Vastaus 1p, vastaus oikeassa

$$x \leq -2 \quad \text{tai} \quad x \geq 7$$

4. Mökin terassi 12 p.

Viljon mökki on suorakaiteen muotoinen ja sen mitat ovat $15,0 \text{ m} \times 20,0 \text{ m}$. Viljo rakensi mökin ympärille tasaleveän terassin, jonka pinta-ala on $200,0 \text{ m}^2$. Mikä on terassin leveys?



Kun terassin leveyttä merkitään kirjaimella x , saadaan terassin pinta-
alalle lauseke $(20 + 2x)(15 + 2x) - 20 \cdot 15 = 4x^2 + 70x$.

4p

Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$4x^2 + 70x = 200$$

| CAS-laskin

3p, sievenny

$$x = -20(\text{m}) \text{ tai } x = 2,5(\text{m})$$

3p, ratkaisu

Terassin leveys ei voi olla negatiivinen, joten se on 2,5 m.

2p, lopullinen ratkaisu

Vastaus

2,5 m

5. Selvitä k (12 p.)

Määritä kaikki sellaiset vakion k arvot, joilla yhtälöllä $kx^2 - 6x + 3k = 0$ on tasan yksi ratkaisu.

Jos $k = 0$, sievenee yhtälö muotoon

$$0 \cdot x^2 - 6x + 3 \cdot 0 = 0$$

$$-6x = 0 \quad | :(-6)$$

$$x = 0$$

2p

ja sillä on siis tasan yksi ratkaisu.

Jos $k \neq 0$, on kyseessä toisen asteen yhtälö ja sillä on täsmälleen yksi ratkaisu, jos sen diskriminantti on 0 . Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$D = 0 \quad | \quad a = k, b = -6, c = 3k$$

$$(-6)^2 - 4 \cdot k \cdot 3k = 0$$

$$k = -\sqrt{3} \quad \text{tai} \quad k = \sqrt{3}$$

2p $D=0$, 1p oikeat a b c

2p oikea lauseke

2p oikein laskettu

Yhtälöllä on siis tasan yksi ratkaisu, jos

$$k = -\sqrt{3} \quad \text{tai} \quad k = 0 \quad \text{tai} \quad k = \sqrt{3}.$$

3p

Vastaus

$$k = -\sqrt{3} \quad \text{tai} \quad k = 0 \quad \text{tai} \quad k = \sqrt{3}$$

6. Funktioita 12 p.

Olkoon $f(x) = -x - 2$, $g(x) = \frac{4}{5}x + 2$ ja $h(x) = \frac{2}{7}x + 6$.

- Millä muuttujan x kokonaislukuarvoilla funktio $g(x)$ saa pienempiä arvoja kuin $h(x)$?
- Millä muuttujan x kokonaislukuarvoilla funktio $g(x)$ saa suurempia arvoja kuin $f(x)$?
- Millä muuttujan x kokonaislukuarvoilla funktion $g(x)$ arvo on funktioiden $f(x)$ ja $h(x)$ välissä?

a) Laskimella

$$g(x) < h(x) \quad \boxed{1\text{p}}$$

$$\frac{4}{5}x + 2 < \frac{2}{7}x + 6 \quad \boxed{1\text{p}}$$

$$x < \frac{70}{9}$$

$$x < 7,7 \quad \boxed{1\text{p}}$$

Vastaus: 7,7 pienemmät kokonaiskuvut ovat 7, 6, 5, ... (1p)

b) Laskimella saadaan:

$$f(x) < g(x)$$

$$-x - 2 < \frac{4}{5}x + 2 \quad \boxed{1\text{p}}$$

$$-\frac{20}{9} < \frac{x}{5} \quad \boxed{1\text{p}}$$

$$-2,2... < \frac{x}{5} \quad \boxed{1\text{p}}$$

Vastaus: -2,2 suuremmat kokonaiskuvut ovat -2, -1, 0, ... (1p)

c) Yhdistetään a- ja b-kohtien ehdot (saatu laskimella)

$$f(x) < g(x) < h(x) \quad \boxed{1\text{p}}$$

$$-x - 2 < \frac{4}{5}x + 2 < \frac{2}{7}x + 6$$

$$-\frac{20}{9} < x < \frac{70}{9} \quad \boxed{1\text{p}}$$

$$-2,2\dots < x < 7,7\dots \quad \boxed{1\text{p}}$$

Koska x on kokonaisluku, niin epäyhtälö toteutuu x :n arvoilla

Vastaus: $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ja $7.$ 1p

c. Jaa mahdollisimman yksinkertaisiin tekijöihin.

$$y^3 + y^2 - y - 1$$

$$y^3 + y^2 - y - 1 \quad | \quad \text{yhteiseksi tekijäksi } y^2 \text{ ja } -1$$

$$= y^2 \cdot (y + 1) - 1 \cdot (y + 1) \quad | \quad \text{yhteiseksi tekijäksi } (y + 1) \quad \boxed{2\text{p, eri tekijä } 1\text{p}}$$

$$= (y + 1) \cdot (y^2 - 1) \quad | \quad \text{muistikaavalla } y^2 - 1^2 = (y - 1)(y + 1) \quad \boxed{1\text{p}}$$

$$= (y + 1)(y - 1)(y + 1) \quad \boxed{1\text{p}}$$