

## K1.

$$x^5 - 2x^3 - x + 7$$

- a) Korkeimman asteen termi on  $x^5$ , joten polynomin asteluku on 5.
- b) Kolmannen asteen termi on  $-2x^3$ .
- c) Voidaan ajatella, että toisen asteen termi on  $0 \cdot x^2$ , jonka kerroin on 0.
- d) Ensimmäisen asteen termi on  $-x = -1 \cdot x$ , jonka kerroin on  $-1$ .
- d) Vakiotermin on 7.

### Vastaus

- a) 5
- b)  $-2x^3$
- c) 0
- d)  $-1$
- e) 7

## K2.

$$\begin{aligned}\text{a)} \quad & (5x^2 + 3x - 2) + (x^2 - 4x + 5) \\ & = 5x^2 + 3x - 2 + x^2 - 4x + 5 \\ & = 6x^2 - x + 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b)} \quad & (-5x^2 + 7x) - (-4x^2 + 8x - 3) \\ & = -5x^2 + 7x + 4x^2 - 8x + 3 \\ & = -x^2 - x + 3\end{aligned}$$

### Vastaus

$$\text{a)} \quad 6x^2 - x + 3$$

$$\text{b)} \quad -x^2 - x + 3$$

### **K3.**

$$\begin{aligned}(3x-5)(2x+5) &= 3x \cdot 2x + 3x \cdot 5 - 5 \cdot 2x - 5 \cdot 5 \\ &= 6x^2 + 15x - 10x - 25 \\ &= 6x^2 + 5x - 25\end{aligned}$$

Oikeat välivaiheet ovat c, e ja i.

#### **Vastaus**

c, e ja i

## K4.

$$\begin{aligned}\text{a)} \quad & 5x^2 - 2x(3x - 4) \\ & = 5x^2 - 2x \cdot 3x - 2x \cdot (-4) \\ & = 5x^2 - 6x^2 + 8x \\ & = -x^2 + 8x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b)} \quad & 2x - (7x - 3)(-x + 5) \\ & = 2x - (7x \cdot (-x) + 7x \cdot 5 - 3 \cdot (-x) - 3 \cdot 5) \\ & = 2x - (-7x^2 + 35x + 3x - 15) \\ & = 2x - (-7x^2 + 38x - 15) \\ & = 2x + 7x^2 - 38x + 15 \\ & = 7x^2 - 36x + 15\end{aligned}$$

### Vastaus

$$\text{a)} \quad -x^2 + 8x$$

$$\text{b)} \quad 7x^2 - 36x + 15$$

## K5.

Korjaukset on merkitty punaisella värillä.

Aino:

$$(3x-5)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 5 + 5^2 = 9x^2 - 30x + 25$$

Dimitri:

$$(2y+1)^2 = (2y)^2 + 2 \cdot 2y \cdot 1 + 1^2 = 4y^2 + 4y + 1$$

## K6.

a)  $(7x - 2)^2$   
 $= (7x)^2 - 2 \cdot 7x \cdot 2 + 2^2$   
 $= 49x^2 - 28x + 4$

b)  $(5x + 1)^2$   
 $= (5x)^2 + 2 \cdot 5x \cdot 1 + 1^2$   
 $= 25x^2 + 10x + 1$

c)  $(-x - 6)^2$   
 $= (-x)^2 - 2 \cdot (-x) \cdot 6 + 6^2$   
 $= x^2 + 12x + 36$

### Vastaus

a)  $49x^2 - 28x + 4$

b)  $25x^2 + 10x + 1$

c)  $x^2 + 12x + 36$

## K7.

$$\text{a) } \left(x^3 + \frac{1}{3}\right)^2$$

$$= (x^3)^2 + 2 \cdot x^3 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$= x^6 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{9}$$

$$\text{b) } (-x^3 + x)^2$$

$$= (-x^3)^2 + 2 \cdot (-x^3) \cdot x + x^2$$

$$= x^6 - 2x^4 + x^2$$

$$\text{c) } \left(\frac{3}{4}x^2 - 1\right)^2$$

$$= \left(\frac{3}{4}x^2\right)^2 - 2 \cdot \frac{3}{4}x^2 \cdot 1 + 1^2$$

$$= \frac{9}{16}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 1$$

### Vastaus

$$\text{a) } x^6 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{9}$$

$$\text{b) } x^6 - 2x^4 + x^2$$

$$\text{c) } \frac{9}{16}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 1$$

## K8.

$$\begin{aligned}\text{a) } & (2x-3)(2x+3) \\ & = (2x)^2 - 3^2 \\ & = 4x^2 - 9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } & (x^2+4)(x^2-4) \\ & = (x^2)^2 - 4^2 \\ & = x^4 - 16\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{c) } & (3x-9)(x+3) \\ & = 3x \cdot x + 3x \cdot 3 - 9 \cdot x - 9 \cdot 3 \\ & = 3x^2 + 9x - 9x - 27 \\ & = 3x^2 - 27\end{aligned}$$

### Vastaus

- a)  $4x^2 - 9$
- b)  $x^4 - 16$
- c)  $3x^2 - 27$

## K9.

$$\begin{aligned}\text{a) } & 5(x+2)(x-2) \\ & = 5(x^2 - 2^2) \\ & = 5(x^2 - 4) \\ & = 5x^2 - 20\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } & x^2 - 2(x+3)(x-3) \\ & = x^2 - 2(x^2 - 3^2) \\ & = x^2 - 2(x^2 - 9) \\ & = x^2 - 2x^2 + 18 \\ & = -x^2 + 18\end{aligned}$$

### Vastaus

$$\text{a) } 5x^2 - 20$$

$$\text{b) } -x^2 + 18$$

## K10.

$$\begin{aligned}\text{a)} \quad & (\sqrt{3} + \sqrt{7})(\sqrt{3} - \sqrt{7}) \\ & = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{7})^2 \\ & = 3 - 7 \\ & = -4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b)} \quad & (2\sqrt{7} + 1)^2 \\ & = (2\sqrt{7})^2 + 2 \cdot 2\sqrt{7} \cdot 1 + 1^2 \\ & = 4 \cdot 7 + 4\sqrt{7} + 1 \\ & = 28 + 4\sqrt{7} + 1 \\ & = 4\sqrt{7} + 29\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{c)} \quad & (3 - \sqrt{7})^2 \\ & = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{7} + (\sqrt{7})^2 \\ & = 9 - 6\sqrt{7} + 7 \\ & = -6\sqrt{7} + 16\end{aligned}$$

### Vastaus

a)  $-4$

b)  $4\sqrt{7} + 29$

c)  $-6\sqrt{7} + 16$

## K11.

a)  $6x - (5 - 4x) - 3(x + 3) = 0$

$$6x - 5 + 4x - 3x - 9 = 0$$

$$7x - 14 = 0 \quad | +14$$

$$7x = 14 \quad | :7$$

$$x = 2$$

b)  $\frac{x+1}{2} - \frac{2x+6}{6} = \frac{x}{3} - 1 \quad | \cdot 6$

$$\overset{3}{\cancel{6}} \cdot \frac{x+1}{\underset{1}{\cancel{2}}} - \overset{1}{\cancel{6}} \cdot \frac{2x+6}{\underset{1}{\cancel{6}}} = \overset{2}{\cancel{6}} \cdot \frac{x}{\underset{1}{\cancel{3}}} - 6 \cdot 1$$

$$3(x+1) - (2x+6) = 2x - 6$$

$$3x + 3 - 2x - 6 = 2x - 6$$

$$x - 3 = 2x - 6 \quad | +3 - 2x$$

$$x - 2x = -6 + 3$$

$$-x = -3 \quad | \cdot (-1)$$

$$x = 3$$

### Vastaus

a)  $x = 2$

b)  $x = 3$

## K12.

a)  $25x^2 - 9$   
 $= (5x)^2 - 3^2$   
 $= (5x + 3)(5x - 3)$

b)  $x^3 - 9x$   
 $= x(x^2 - 9)$   
 $= x(x^2 - 3^2)$   
 $= x(x + 3)(x - 3)$

c)  $x^4 - 81$   
 $= (x^2)^2 - 9^2$   
 $= (x^2 + 9)(x^2 - 9)$   
 $= (x^2 + 9)(x^2 - 3^2)$   
 $= (x^2 + 9)(x + 3)(x - 3)$

### Vastaus

a)  $(5x + 3)(5x - 3)$

b)  $x(x + 3)(x - 3)$

c)  $(x^2 + 9)(x + 3)(x - 3)$

### K13.

$$\begin{aligned}\text{a)} \quad & 25x^2 - 10x + 1 \\ & = (5x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot 1 + 1^2 \\ & = (5x - 1)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b)} \quad & 3x^2 + 12x + 12 \\ & = 3(x^2 + 4x + 4) \\ & = 3(x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2) \\ & = 3(x + 2)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{c)} \quad & x^3 - 2x^2 + x \\ & = x(x^2 - 2x + 1) \\ & = x(x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2) \\ & = x(x - 1)^2\end{aligned}$$

#### Vastaus

$$\text{a)} \quad (5x - 1)^2$$

$$\text{b)} \quad 3(x + 2)^2$$

$$\text{c)} \quad x(x - 1)^2$$

## K14.

a)  $x(x+2) - 5(x+2)$   
 $= (x-5)(x+2)$

b)  $y^3 + y^2 - y - 1$   
 $= y^2(y+1) - 1 \cdot (y+1)$   
 $= (y^2 - 1)(y+1)$   
 $= (y^2 - 1^2)(y+1)$   
 $= (y+1)(y-1)(y+1)$   
 $= (y+1)(y+1)(y-1)$

c)  $z^3 - 3z^2 + 2z - 6$   
 $= z^2(z-3) + 2(z-3)$   
 $= (z^2 + 2)(z-3)$

### Vastaus

a)  $(x-5)(x+2)$

b)  $(y+1)(y+1)(y-1)$

c)  $(z^2 + 2)(z-3)$

## K15.

Kuvio on suorakulmio, josta on leikattu pois pienempi suorakulmio. Muodostetaan pinta-alan lauseke.

$$5x \cdot 4x - 2(x+1) \cdot (x-1) = 18x^2 + 2 \quad \text{Sievennetään CAS-laskimella.}$$

Toisaalta pinta-ala on 74.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $x$ .

$$18x^2 + 2 = 74 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = -2 \quad \text{tai} \quad x = 2$$

Kuvion sivun pituus on positiivinen luku, joten  $x = 2$ .

### Vastaus

$$x = 2$$

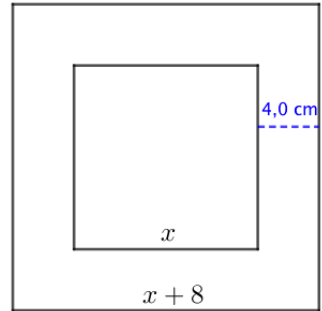
## K16.

Merkitään maalauksen sivun pituutta kirjaimella  $x$ .

Maalauksen kehys on neliö, josta on leikattu pois pienempi neliö.

Kehyksen pinta-ala on  $544 \text{ cm}^2$ .

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $x$ .



$$(x + 8)^2 - x^2 = 544$$

$$x = 30 \text{ (cm)}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

Lasketaan maalauksen pinta-ala.

$$30 \text{ cm} \cdot 30 \text{ cm} = 900 \text{ cm}^2$$

**Vastaus**

$$900 \text{ cm}^2$$

## K17.

- a) Kaksi pariton lukua ovat aina muotoa  $2m + 1$  ja  $2n + 1$ , missä  $m$  ja  $n$  ovat jotkin kokonaisluvut.

Tehtävänä on osoittaa, että luku  $(2m + 1) + (2n + 1)$  on parillinen.

Lasketaan lukujen  $2m + 1$  ja  $2n + 1$  summa.

$$\begin{aligned}(2m + 1) + (2n + 1) &= 2m + 1 + 2n + 1 \\ &= 2m + 2n + 2 \\ &= 2m + 2n + 2 \cdot 1 \\ &= 2 \cdot (m + n + 1)\end{aligned}$$

Koska luku  $(2m + 1) + (2n + 1)$  on luvun 2 ja kokonaisluvun  $m + n + 1$  tulo, niin se on parillinen.

Väite on näin todistettu.  $\square$

Kirjoitetaan oletus (eli lähtötiedot) näkyviin.

Kirjoitetaan väite näkyviin.

Aloitetaan päättely oletuksesta.

Muokataan summa muotoon, josta nähdään, että se on parillinen.

Tehdään tarvittavat päätelmät.

b) Kaksi pariton lukua ovat aina muotoa  $2m + 1$  ja  $2n + 1$ , missä  $m$  ja  $n$  ovat jotkin kokonaisluvut.

Tehtävänä on osoittaa, että luku  $(2m + 1) - (2n + 1)$  on parillinen.

Lasketaan lukujen  $2m + 1$  ja  $2n + 1$  erotus.

$$\begin{aligned}(2m + 1) - (2n + 1) &= 2m + 1 - 2n - 1 \\ &= 2m - 2n \\ &= 2m - 2n \\ &= 2 \cdot (m - n)\end{aligned}$$

Koska luku  $(2m + 1) - (2n + 1)$  on luvun 2 ja kokonaisluvun  $m - n$  tulo, niin se on parillinen.

Väite on näin todistettu.  $\square$

Kirjoitetaan oletus (eli lähtötiedot) näkyviin.

Kirjoitetaan väite näkyviin.

Aloitetaan päättely oletuksesta.

Muokataan summa muotoon, josta nähdään, että se on parillinen.

Tehdään tarvittavat päätelmät.

## K18.

Tehtävänä on osoittaa, että  $\sqrt{7-2\sqrt{10}} = \sqrt{5} - \sqrt{2}$ .

Osoitetaan, että neliöjuuren määritelmät molemmat ehdot toteutuvat.

1) Koska  $5 > 2$ , niin  $\sqrt{5} > \sqrt{2}$  ja  $\sqrt{5} - \sqrt{2} \geq 0$ .

$$\begin{aligned} 2) & (\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 \\ &= (\sqrt{5})^2 - 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 \\ &= 5 - 2\sqrt{10} + 2 \\ &= 7 - 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

Kohtien 1 ja 2 perusteella  $\sqrt{7-2\sqrt{10}} = \sqrt{5} - \sqrt{2}$ .  $\square$

## K19.

**Tapa 1.** Sievennetään summan lauseke polynomiksi ilman laskinta.

$$\begin{aligned}P(x) + Q(x) &= 5x^2 - ax + 4 - (bx^2 - 7x + 3) + 8x^2 + x + c \\&= 5x^2 - ax + 4 - bx^2 + 7x - 3 + 8x^2 + x + c \\&= 13x^2 - bx^2 + 8x - ax + 1 + c \\&= (13 - b)x^2 + (8 - a)x + c + 1\end{aligned}$$

Summa on nolla kaikilla muuttujan  $x$  arvoilla, jos

$$\begin{array}{lcl}13 - b = 0 & \text{ja} & 8 - a = 0 & \text{ja} & c + 1 = 0 \\b = 13 & & a = 8 & & c = -1.\end{array}$$

**Tapa 2.** Sievennetään summan lauseke polynomiksi CAS-laskimella.

Määritellään laskimeen

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + 3 \quad \text{ja} \quad Q(x) = 2x^4 + 6x^3.$$

Sievennetään summan lauseke laskimella.

$$P(x) + Q(x) = (13 - b)x^2 + (8 - a)x + c + 1$$

Summa on nolla kaikilla muuttujan  $x$  arvoilla, jos

$$\begin{array}{lcl}13 - b = 0 & \text{ja} & 8 - a = 0 & \text{ja} & c + 1 = 0 \\b = 13 & & a = 8 & & c = -1.\end{array}$$

**Vastaus**

$$a = 8, \quad b = 13 \quad \text{ja} \quad c = -1$$

## K20.

**Tapa 1.** Sievennetään lauseke polynomiksi ilman laskinta.

$$\begin{aligned}(2x^2 - 1) \cdot P(x) - x \cdot Q(x) \\ &= (2x^2 - 1)(x^3 - 4x^2 + 3) - x(2x^4 + 6x^3) \\ &= 2x^5 - 8x^4 + 6x^2 - x^3 + 4x^2 - 3 - 2x^5 - 6x^4 \\ &= -14x^4 - x^3 + 10x^2 - 3\end{aligned}$$

Polynomien korkeimman asteen termi on  $-14x^4$ , joten sen asteluku on 4.

**Tapa 2.** Sievennetään lauseke polynomiksi CAS-laskimella.

Määritellään laskimeen

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + 3 \quad \text{ja} \quad Q(x) = 2x^4 + 6x^3.$$

Sievennetään lauseke laskimella.

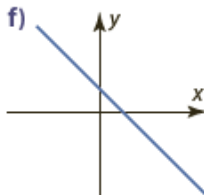
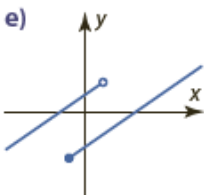
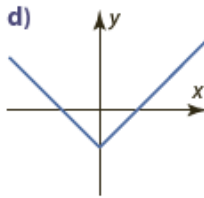
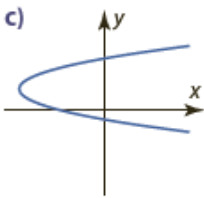
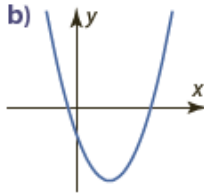
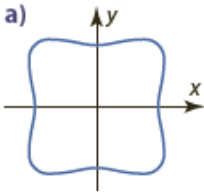
$$(2x^2 - 1) \cdot P(x) - x \cdot Q(x) = -14x^4 - x^3 + 10x^2 - 3$$

Polynomien korkeimman asteen termi on  $-14x^4$ , joten sen asteluku on 4.

**Vastaus**

4

## K21



Funktio liittää jokaiseen määrittelyjoukon lukuun **täsmälleen** yhden arvojoukon luvun.

Jonkin funktion  $f(x)$  kuvaajia voivat olla b, d ja f. Kaikissa muissa kuvaajissa jotain  $x$ :n arvoa vastaa useampi kuin yksi  $y$ :n arvo,

### Vastaus

b, d ja f

## K22

a)  $4(x-1) = 2x-5$

$$4x-4 = 2x-5 \quad | -2x+4$$

$$4x-2x = 4-5$$

$$2x = -1 \quad | :2$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

b)  $\frac{x}{3} - \frac{1-x}{2} = 2 \quad | \cdot 6$

$$6 \cdot \frac{x}{3} - 6 \cdot \frac{1-x}{2} = 6 \cdot 2$$

$$2x - 3(1-x) = 12$$

$$2x - 3 + 3x = 12$$

$$5x - 3 = 12 \quad | +3$$

$$5x = 15 \quad | :5$$

$$x = 3$$

## Vastaus

a)  $x = -\frac{1}{2}$

b)  $x = 3$

## K23

a)

$$14x - 6 \geq 3 + 5x \quad | -5x + 6$$

$$14x - 5x \geq 3 + 6$$

$$9x \geq 9 \quad | :9 (> 0)$$

$$x \geq 1$$

b)

$$\frac{3-x}{3} + 1 < \frac{x}{6} - 2 \quad | \cdot 6 (> 0)$$

$$6 \cdot \frac{3-x}{3} + 6 \cdot 1 < 6 \cdot \frac{x}{6} - 6 \cdot 2$$

$$2 \cdot (3-x) + 6 < x - 12$$

$$6 - 2x + 6 < x - 12$$

$$12 - 2x < x - 12 \quad | -12 - x$$

$$-2x - x < -12 - 12$$

$$-3x < -24 \quad | :(-3) (< 0)$$

$$x > 8$$

c)

$$\frac{5+12x}{4} \leq 3x - \frac{3}{7} \quad | \cdot 28 (> 0)$$

$$28 \cdot \frac{5+12x}{4} \leq 28 \cdot 3x - 28 \cdot \frac{3}{7}$$

$$7 \cdot (5+12x) \leq 84x - 4 \cdot 3$$

$$35 + 84x \leq 84x - 12 \quad | -84x$$

$$35 \leq -12$$

epätosi

Epäyhtälöä ei toteuta mikään reaaliluku.

## Vastaus

a)  $x \geq 1$  b)  $x > 8$  c) ei ratkaisuja

## K24

Funktion  $f$  kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joka leikkaa  $y$ -akselin kohdassa  $y = 0$ . Funktion  $f$  nollakohdat ovat

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \approx \pm 0,7.$$

Kuvaaja on numero 3.

Funktion  $g$  kuvaaja on laskeva suora.

Kuvaaja on numero 1.

Funktion  $h$  kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joka leikkaa  $y$ -akselin kohdassa  $y = 2$ . Kuvaaja on numero 4.

Funktion  $i$  kuvaaja on nouseva suora.

Kuvaaja on numero 6.

Funktion  $j$  kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joka leikkaa  $y$ -akselin kohdassa  $y = 2$ . Funktion  $j$  kuvaajaparaabelin huippu ei ole  $y$ -akselilla.

Kuvaaja on numero 5.

Funktion  $k$  kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joka leikkaa  $y$ -akselin kohdassa  $y = 2$ . Funktion  $k$  nollakohdat ovat

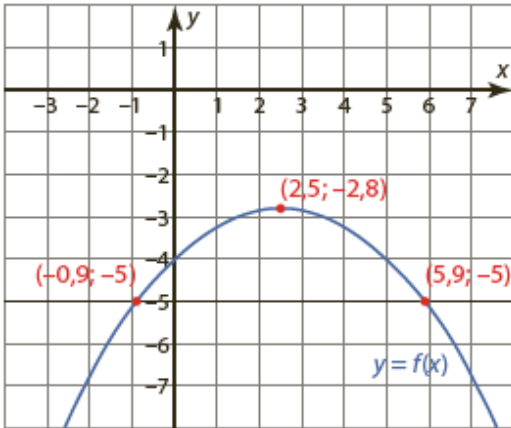
$$x = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1,4.$$

Kuvaaja on numero 2.

## Vastaus

$f-3$ ,  $g-1$ ,  $h-4$ ,  $i-6$ ,  $j-5$ ,  $k-2$

## K25



- a) Huippupiste on  $(2,5; -2,8)$ .
- b) Yhtälön  $-51x^2 + x - 4 = 0$  ratkaisut ovat funktion  $f$  nollakohtat. Koska funktiolla  $f$  ei ole nollakohtia, ei yhtälöllä ole ratkaisuja.
- c) Yhtälön  $-51x^2 + x - 4 = -5$  ratkaisuna ovat ne  $x$ :n arvot, joilla  $f(x) = -5$ .

Ratkaisut löytyvät suoran  $x = -5$  ja kuvaajan  $y = f(x)$  leikkauskohdista  $x \approx -0,9$  ja  $x \approx 5,9$ .

### Vastaus

- a)  $(2,5; -2,8)$   
b) ei ratkaisuja.  
c)  $x \approx -0,9$  tai  $x \approx 5,9$

## K26

a)  $5x^2 + 25x = 0$

$$5x(x+5) = 0$$

$$5x = 0 \quad \text{tai} \quad x + 5 = 0$$

$$x = 0 \qquad \qquad x = -5$$

b)  $4x^2 - 16 = 0$

$$4x^2 = 16$$

$$x^2 = \frac{16}{4}$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \sqrt{4} = 2 \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{4} = -2$$

### Vastaus

a)  $x = -5$  tai  $x = 0$

b)  $x = -2$  tai  $x = 2$

## K27

a)

$$2x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{4}$$

$$= \frac{-5 \pm 3}{4}$$

$$x = \frac{-5 - 3}{4} = -2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-5 + 3}{4} = -\frac{1}{2}$$

b)

$$2x^2 - 3x + 7 = 0$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7}}{2 \cdot 2}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{9 - 56}}{4}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{-47}}{4}$$

Koska diskriminantti on negatiivinen, yhtälöllä ei ole ratkaisuja.

### Vastaus

a)  $x = -2$  tai  $x = -\frac{1}{2}$

b) ei ratkaisuja

## K28

Ratkaistaan yhtälö  $f(x) = g(x)$ .

$$x^2 - 9 = (x - 2)^2$$

$$x^2 - 9 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2$$

$$x^2 - 9 = x^2 - 4x + 4 \quad | -x^2 + 4x + 9$$

$$x^2 - x^2 + 4x = 4 + 9$$

$$4x = 13$$

$$x = \frac{13}{4}$$

**Vastaus**

$$x = \frac{13}{4}$$

## K29

a) Ratkaistaan nollakohdat.

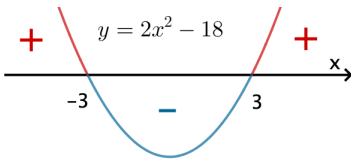
$$2x^2 - 18 = 0$$

$$2x^2 = 18$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \sqrt{9} = 3 \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{9} = -3$$

Hahmotellaan kuvaaja ja päätellään epäyhtälön ratkaisu.



Epäyhtälö  $2x^2 - 18 \leq 0$  toteutuu, kun  $-3 \leq x \leq 3$ .

b) Ratkaistaan nollakohdat.

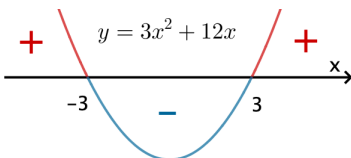
$$3x^2 + 12x = 0$$

$$3x(x + 4) = 0$$

$$3x = 0 \quad \text{tai} \quad x + 4 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = -4$$

Hahmotellaan kuvaaja ja päätellään epäyhtälön ratkaisu.



Epäyhtälö  $3x^2 + 12x > 0$  toteutuu, kun  $x < -4$  tai  $x > 0$ .

c) Ratkaistaan nollakohdat.

$$2x^2 + 3x + 4 = 0$$

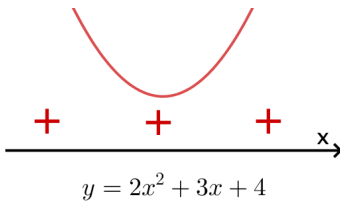
$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 16}}{4}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{-7}}{4}$$

ei nollakohtia

Hahmotellaan kuvaaja ja päätellään epäyhtälön ratkaisu.



Epäyhtälö  $2x^2 + 3x + 4 > 0$  toteutuu kaikilla  $x$ :n arvoilla.

### Vastaus

a)  $-3 \leq x \leq 3$

b)  $x < -4$  tai  $x > 0$

c) Epäyhtälö toteutuu kaikilla muuttujan  $x$  arvoilla.

### K30

a) Sievennetään epäyhtälö.

$$2x + 4 \geq x^2$$

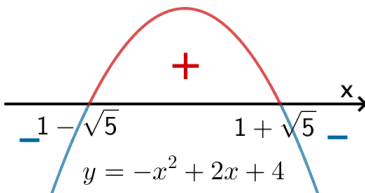
$$-x^2 + 2x + 4 \geq 0$$

Ratkaistaan nollakohdat.

$$-x^2 + 2x + 4 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 4}}{2 \cdot (-1)} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16}}{-2} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{-2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 \cdot 5}}{-2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{-2} \\ &= \frac{-2(1 \mp \sqrt{5})}{-2} = 1 \pm \sqrt{5} \\ x &= 1 - \sqrt{5} \quad \text{tai} \quad x = 1 + \sqrt{5} \end{aligned}$$

Hahmotellaan kuvaaja ja päätellään epäyhtälön ratkaisu.



Epäyhtälö  $2x^2 + 4 \geq x^2$  eli  $-x^2 + 2x^2 + 4 \geq 0$  toteutuu, kun

$$1 - \sqrt{5} \leq x \leq 1 + \sqrt{5}.$$

b) Sievennetään epäyhtälö.

$$(2-x)^2 \geq x-2$$

$$2^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + x^2 \geq x-2$$

$$4 - 4x + x^2 \geq x-2$$

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0$$

Ratkaistaan nollakohdat.

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

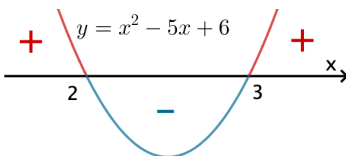
$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$= \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x = \frac{5-1}{2} = 2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{5+1}{2} = 3$$

Hahmotellaan kuvaaja ja päätellään epäyhtälön ratkaisu.



Epäyhtälö  $(2-x)^2 \geq x-2$  eli  $x^2 - 5x + 6 \geq 0$  toteutuu, kun  $x \leq 2$  tai  $x \geq 3$ .

**Vastaus**

a)  $1 - \sqrt{5} \leq x \leq 1 + \sqrt{5}$

b)  $x \leq 2$  tai  $x \geq 3$

### K31

a) Sievennetään epäyhtälö.

$$\begin{aligned}\frac{16x-7}{4}+7 &> \frac{2+8x}{2} && | \cdot 4 \\ 4 \cdot \frac{16x-7}{4} + 4 \cdot 7 &> 4 \cdot \frac{2+8x}{2} \\ 16x-7+28 &> 2(2+8x) \\ 16x-7+28 &> 4+16x && | -16x \\ 21 &> 4 \\ \text{tosi}\end{aligned}$$

Epäyhtälö toteutuu kaikilla muuttujan  $x$  arvoilla.

b) Sievennetään epäyhtälö.

$$\begin{aligned}\sqrt{2}x+9 &< \sqrt{8}x+3 && | -\sqrt{8}x-9 \\ \sqrt{2}x-\sqrt{8}x &< 3-9 \\ (\sqrt{2}-\sqrt{8})x &< -6 \\ (\sqrt{2}-2\sqrt{2})x &< -6 \\ -\sqrt{2}x &< -6 && | :(-\sqrt{2}) \text{ (<0)} \\ x &> \frac{6}{\sqrt{2}} \\ x &> \frac{6\sqrt{2}}{2} \\ x &> 3\sqrt{2}\end{aligned}$$

Epäyhtälö toteutuu, kun  $x > 3\sqrt{2}$ .

### Vastaus

a) Epäyhtälö toteutuu kaikilla muuttujan  $x$  arvoilla.

b)  $x > 3\sqrt{2}$

## K32

$$f(x) = x^2 + bx + 1$$

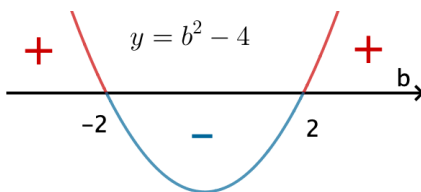
Funktion nollakohdat ovat yhtälön  $x^2 + bx + 1 = 0$  ratkaisuja. Nollakohtien lukumäärä voidaan päätellä diskriminantin

$$D = b^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = b^2 - 4$$

merkin avulla.

Ratkaistaan diskriminantin nollakohdat.

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ b^2 - 4 &= 0 \\ b^2 &= 4 \\ b &= \pm\sqrt{4} = \pm 2 \end{aligned}$$



Havaitaan, että

$D > 0$ , kun  $b < -2$  tai  $b > 2$ ,

$D = 0$ , kun  $b = -2$  tai  $b = 2$

$D < 0$ , kun  $-2 < b < 2$ .

a) Funktiolla  $f$  on kaksi nollakohtaa, kun  $D > 0$ .

Tämä toteutuu esimerkiksi, kun  $b = 3$ .

b) Funktiolla  $f$  on yksi nollakohta, kun  $D = 0$ .

Tämä toteutuu esimerkiksi, kun  $b = 2$ .

c) Funktiolla  $f$  ei ole yhtään nollakohtaa, kun  $D < 0$ .

Tämä toteutuu esimerkiksi, kun  $b = 0$ .

### Vastaus

a) esimerkiksi  $b = 3$    b) esimerkiksi  $b = 2$    c) esimerkiksi  $b = 0$

### K33

Päätellään 2. asteen yhtälön ratkaisujen lukumäärä diskriminantin avulla.

a)  $-x^2 - 10x - 25 = 0$

$$D = (-10)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-25) = 100 - 100 = 0$$

Koska  $D = 0$ , ratkaisuja on yksi.

b)  $2x^2 + 3x - 6 = 0$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 9 + 48 = 57 > 0$$

Koska  $D > 0$ , ratkaisuja on kaksi.

c)  $x^2 + 3x - 2 = 6x - 5$        $| -6x - 5$   
 $x^2 - 3x + 3 = 0$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 9 - 12 = -3 < 0$$

Koska  $D < 0$ , yhtälöllä ei ole ratkaisuja.

### Vastaus

- a) 1
- b) 2
- c) 0

### K34

a) Ensimmäisen asteen polynomifunktio on muotoa  $f(x) = ax + b$ .  
Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan kertoimet  $a$  ja  $b$ .

$$\begin{cases} f(4) = -1 \\ f(-2) = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \cdot 4 + b = -1 \\ a \cdot (-2) + b = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + b = -1 & | \cdot 1 \\ -2a + b = 4 & | \cdot 2 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} 4a + b = -1 \\ -4a + 2b = 8 \end{cases}$$

$$3b = 7$$

$$b = \frac{7}{3}$$

$$4a + b = -1 \quad \left| b = \frac{7}{3} \right.$$

$$4a + \frac{7}{3} = -1$$

$$4a = -1 - \frac{7}{3}$$

$$4a = -\frac{10}{3} \quad | :4$$

$$a = -\frac{10}{12} = -\frac{5}{6}$$

Funktion  $f$  lauseke on  $f(x) = -\frac{5}{6}x + \frac{7}{3}$ .

b) Funktion  $f$  nollakohta löydetään ratkaisemalla yhtälö  $f(x) = 0$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ -\frac{5}{6}x + \frac{7}{3} &= 0 && | \cdot 6 \\ -6 \cdot \frac{5}{6}x + 6 \cdot \frac{7}{3} &= 0 \\ -5x + 14 &= 0 && | -14 \\ -5x &= -14 && | :(-5) \\ x &= \frac{-14}{-5} = \frac{14}{5} = 2\frac{4}{5} \end{aligned}$$

Funktion  $f$  nollakohta on  $x = \frac{14}{5} = 2\frac{4}{5}$ .

### Vastaus

a)  $f(x) = -\frac{5}{6}x + \frac{7}{3}$

b)  $x = 2\frac{4}{5}$

## K35

a) Jos valmistuminen myöhästyy  $x$  päivää, viivästyskorvaus on

$$K(x) = 5000 + 90x = 90x + 5000 \text{ (€)}.$$

b) Kolmelta viikolta eli  $3 \cdot 7 = 21$  vuorokaudelta maksettava viivästyskorvaus on

$$K(21) = 90 \cdot 21 + 5000 = 6890 \text{ (€)}.$$

### Vastaus

a)  $K(x) = 90x + 5000$

b) 6890 €

## K36

Merkitään Ollin valitsemia peräkkäisiä kokonaislukuja  $x$  ja  $x+1$ .

Lukujen tulo on pienempi kuin niiden summa.

Ratkaistaan epäyhtälö.

$$x \cdot (x+1) < x + (x+1)$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$-0,61... < x < 1,61...$$

Koska  $x$  on kokonaisluku, niin epäyhtälö toteutuu, kun  $x = 0$  tai  $x = 1$ .

Jos  $x = 0$ , niin  $x + 1 = 0 + 1 = 1$ .

Jos  $x = 1$ , niin  $x + 1 = 1 + 1 = 2$ .

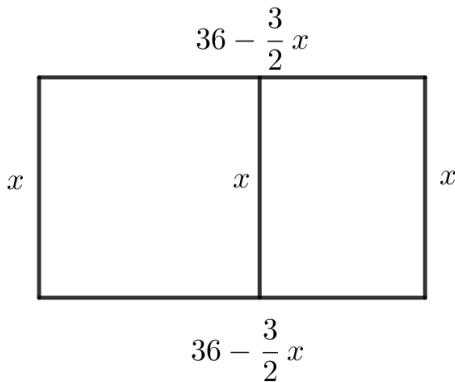
Ollin valitsemat peräkkäiset kokonaisluvut ovat 0 ja 1 tai 1 ja 2.

### Vastaus

Luvut ovat 0 ja 1 tai 1 ja 2.

### K37

a) Aitaverkkoa on käytössä 72 m. Väliseinään ja kahteen muuhun väliseinän suuntaiseen sivuun aitaverkkoa kuluu  $3x$  metriä. Kahteen muuhun sivuun aitaverkkoa jää  $72 - 3x$  metriä, joten kahden muun sivun pituudet ovat  $\frac{72-3x}{2} = 36 - \frac{3}{2}x$  metriä.



b) Aitauksen sivujen pituuksien on oltava positiivisia, joten

$$x > 0$$

ja

$$36 - \frac{3}{2}x > 0 \quad \text{eli} \quad x < 24.$$

Siis on oltava  $0 < x < 24$ .

Aitauksen pinta-ala on

$$A(x) = (36 - \frac{3}{2}x) \cdot x = -\frac{3}{2}x^2 + 36x, \quad \text{missä} \quad 0 < x < 24.$$

c) Funktion  $A(x)$  kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten se saa suurimman arvonsa paraabelin huipussa, mikäli huippu osuu välille  $0 < x < 24$ .

$$\text{Huipun } x\text{-koordinaatti on } x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-36}{2 \cdot (-1,5)} = 12.$$

Koska  $0 < 12 < 24$ , niin funktio  $A(x)$  saa suurimman arvonsa, kun  $x = 12$ .

d) Aitauksen pinta-ala on suurin, kun väliseinän suuntaisten sivujen pituudet ovat  $x = 12$  (m) ja muiden sivujen pituudet

$$\frac{72 - 3x}{2} = \frac{72 - 3 \cdot 12}{2} = 18 \text{ (m)}.$$

Aitauksen leveyden on oltava 12 m ja pituuden 18 m.

### Vastaus

a)  $x$  ja  $36 - \frac{3}{2}x$  (metriä)

b)  $A(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 36x$ , missä  $0 < x < 24$

c)  $x = 12$

d) leveys on 12 m ja pituus 18 m

## K38

Sievennetään yhtälöä.

$$(3x+1)^2 = kx - 3$$

$$(3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 1 + 1^2 = kx - 3$$

$$9x^2 + 6x + 1 = kx - 3 \quad | -kx + 3$$

$$9x^2 + 6x - kx + 4 = 0$$

$$9x^2 + (6-k)x + 4 = 0$$

Tutkittavalla toisen asteen yhtälöllä ei ole ratkaisua, kun diskriminantti on negatiivinen.

$$D = b^2 - 4ac$$

$$= (6-k)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4$$

$$= 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot k + k^2 - 144$$

$$= k^2 - 12k - 108$$

Ratkaistaan epäyhtälö  $D < 0$ .

$$D < 0$$

$$k^2 - 12k - 108 < 0$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$-6 < k < 18$$

**Vastaus**

$$-6 < k < 18$$

### K39

Jaetaan yhtälön  $4kx^2 - 6x + 3k = 0$  tarkastelu kahteen osaan.

1) Kun  $k \neq 0$ , tutkittavana on toisen asteen yhtälö.

Ratkaisuja on kaksi, kun diskriminantti on positiivinen.

$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac \\ &= (-6)^2 - 4 \cdot 4k \cdot 3k \\ &= 36 - 48k^2 \end{aligned}$$

Ratkaistaan epäyhtälö  $D > 0$ .

$$\begin{aligned} D &> 0 \\ 36 - 48k^2 &> 0 \end{aligned}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$\frac{\sqrt{3}}{2} < k < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$|k \neq 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} < k < 0 \quad \text{tai} \quad 0 < k < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2) Kun  $k = 0$ , yhtälö on ensimmäistä astetta.

Ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned} 4 \cdot 0 \cdot x^2 - 6x + 3 \cdot 0 &= 0 \\ -6x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Ratkaisuja on vain yksi, joten arvo  $k = 0$  ei kelpaa.

**Vastaus**

$$\frac{\sqrt{3}}{2} < k < 0 \quad \text{tai} \quad 0 < k < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

## K40

a) Appletin liikusäätimellä havaitaan, että funktion  $f$  kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka huippu on  $x$ -akselin yläpuolella, kun  $-4 < a < 0$ .

Funktio  $f$  näyttäisi saavan ainoastaan positiivisia arvoja, kun  $-4 < a < 0$ .

b) Funktion  $f(x) = 9x^2 + 3ax - a$  kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

Siis funktio  $f$  saa vain positiivisia arvoja, kun sillä ei ole yhtään nollakohtaa. Yhtälöllä  $f(x) = 0$  eli yhtälöllä  $9x^2 + 3ax - a = 0$  ei siis saa olla yhtään ratkaisua, joten diskriminantin on oltava negatiivinen.

$$D < 0$$

$$(3a)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-a) < 0 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$-4 < a < 0$$

Siis  $f$  saa vain positiivisia arvoja, kun  $-4 < a < 0$ .

### Vastaus

$$-4 < a < 0$$

## K41

On ratkaistava, millä muuttujan  $x$  kokonaislukuarvoilla epäyhtälö

$$f(x) < g(x) < h(x)$$

toteutuu.

$$f(x) < g(x) < h(x)$$

$$-x - 2 < \frac{4}{5}x + 2 < \frac{2}{7}x + 6$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$-\frac{20}{9} < x < \frac{70}{9}$$

$$-2,2... < x < 7,7...$$

Koska  $x$  on kokonaisluku, niin epäyhtälö toteutuu  $x$ :n arvoilla

$-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$  ja  $7$ .

### Vastaus

Muuttuja  $x$  saa arvot  $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$  tai  $7$ .

## K42

$$\begin{array}{l} x + 3 > px \quad | -px + 3 \\ x - px > -3 \\ (1-p)x > 3 \end{array}$$

Jaetaan epäyhtälön tarkastelu kolmeen osaan.

1)  $1-p > 0$  eli  $p < 1$

$$\begin{array}{l} (1-p)x > 3 \quad | : (1-p) (> 0) \\ x > \frac{3}{1-p} \end{array}$$

2)  $1-p < 0$  eli  $p > 1$

$$\begin{array}{l} (1-p)x > 3 \quad | : (1-p) (< 0) \\ x < \frac{3}{1-p} \end{array}$$

3)  $1-p = 0$  eli  $p = 1$

Sijoitetaan  $p = 1$  alkuperäiseen yhtälöön.

$$\begin{array}{l} x + 3 > px \quad | p = 1 \\ x + 3 > 1 \cdot x \quad | -x \\ x - x + 3 > 0 \\ 3 > 0 \\ \text{tosi} \end{array}$$

Epäyhtälö toteutuu kaikilla muuttujan  $x$  arvoilla.

Kootaan yhteen saadut tulokset kohdista 1, 2 ja 3.

Kun  $p < 1$ , niin  $x > \frac{3}{1-p}$ .

Kun  $p = 1$ , niin epäyhtälö toteutuu kaikilla muuttujan  $x$  arvoilla..

Kun  $p > 1$ , niin  $x < \frac{3}{1-p}$ .

### Vastaus

$$\begin{cases} x > \frac{3}{1-p}, & \text{kun } p < 1 \\ x \in \mathbf{R}, & \text{kun } p = 1 \\ x < \frac{3}{1-p}, & \text{kun } p > 1 \end{cases}$$

## K43

- a) Luvun  $-49$  viides juuri merkitään  $\sqrt[5]{-49}$ .

Lasketaan lausekkeen  $\sqrt[5]{-49}$  kolmidesimaalinen likiarvo laskimella.

$$\sqrt[5]{-49} = -2,1779\dots \approx -2,178$$

- b) Luvun  $135$  neljäs juuri merkitään  $\sqrt[4]{135}$ .

Lasketaan lausekkeen  $\sqrt[4]{135}$  kolmidesimaalinen likiarvo laskimella.

$$\sqrt[4]{135} = 3,4086\dots \approx 3,409$$

- c) Luvun  $-625$  neljäs juuri merkitään  $\sqrt[4]{-625}$ .

Koska luku  $-625$  on negatiivinen, niin sen neljättä juurta ei ole määritelty.

- d) Luvun  $300$  seitsemäs juuri merkitään  $\sqrt[7]{300}$ .

Lasketaan lausekkeen  $\sqrt[7]{300}$  kolmidesimaalinen likiarvo laskimella.

$$\sqrt[7]{300} = 2,2587\dots \approx 2,259$$

### Vastaus

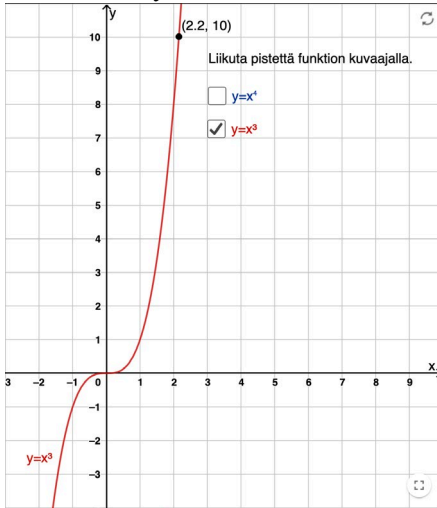
a)  $\sqrt[5]{-49} \approx -2,178$

b)  $\sqrt[4]{135} \approx 3,409$

c)  $\sqrt[7]{300} \approx 2,259$

# K44

a) Määritetään yhtälön  $x^3 = 10$  ratkaisujen likiarvot appletilla.



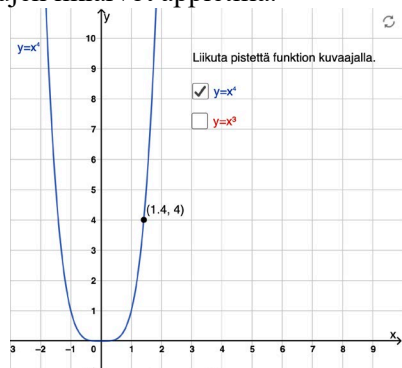
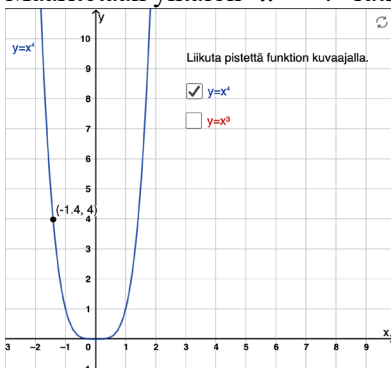
$$f(x) = -x^5 + 3x^3 - x^2 + 1$$
$$x \approx 2,2$$

b) Muokataan yhtälöä.

$$3x^4 = 12 \quad | :3$$

$$x^4 = 4$$

Määritetään yhtälön  $x^4 = 4$  ratkaisujen likiarvot appletilla.



$$x \approx -1,4 \text{ tai } x \approx 1,4$$

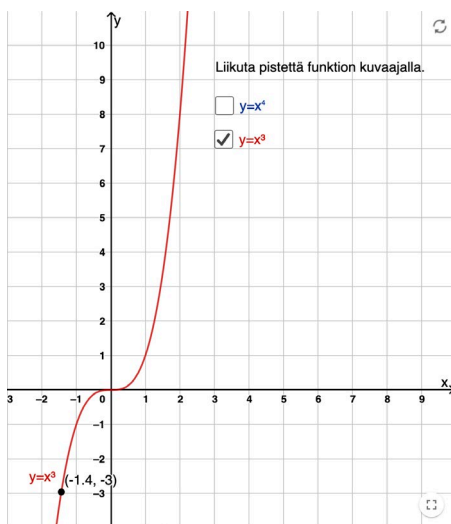
c) Muokataan yhtälöä.

$$5x^3 + 15 = 0$$

$$5x^3 = -15 \quad | :5$$

$$x^3 = -3$$

Määritetään yhtälön  $x^3 = -3$  ratkaisujen likiarvot appletilla.



$$x \approx -1,4$$

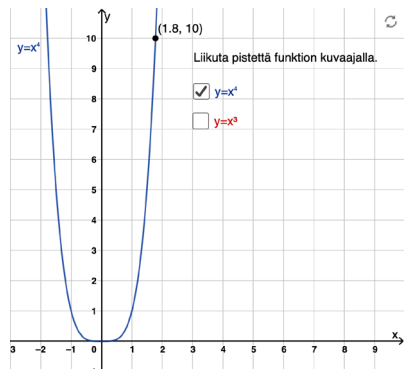
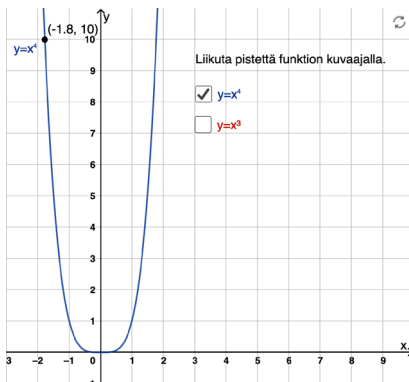
d) Muokataan yhtälöä.

$$2x^4 - 20 = 0$$

$$2x^4 = 20 \quad | :2$$

$$x^4 = 10$$

Määritetään yhtälön  $x^4 = 10$  ratkaisujen likiarvot appletilla.



$$x \approx -1,8 \text{ tai } x \approx 1,8$$

**Vastaus**

a)  $x \approx 2,2$

b)  $x \approx -1,4$  tai  $x \approx 1,4$

c)  $x \approx -1,4$

d)  $x \approx -1,8$  tai  $x \approx 1,8$

## K45

- a)  $4x^4 = 64$   $| :4$  Ratkaistaan ensin  $x^4$ .  
 $x^4 = 16$  Yhtälöllä on kaksi ratkaisua.  
 $x = \sqrt[4]{16} = 2$  tai  $x = -\sqrt[4]{16} = -2$  Juurten tarkat arvot.
- b)  $x^5 + 45 = 0$   $| -45$  Ratkaistaan ensin  $x^5$ .  
 $x^5 = -45$  Yhtälöllä on yksi ratkaisu.  
 $x = \sqrt[5]{-45} = -\sqrt[5]{45}$  Juuren tarkka arvo.
- c)  $(x-4)^4 = 81$   
 $x-4 = \sqrt[4]{81} = 3$  tai  $x-4 = -\sqrt[4]{81} = -3$   $| +4$   
 $x = 7$   $x = 1$

## Vastaus

- a)  $x = -2$  tai  $x = 2$   
b)  $x = \sqrt[5]{-45} = -\sqrt[5]{45}$   
c)  $x = 1$  tai  $x = 7$

## K46

Merkitään vuosittaista muutoskerrointa kirjaimella  $x$ . Asukasmäärä tulee joka vuosi  $x$ -kertaiseksi.

- a) Vuoden 2017 alun asukasmäärä tulkitaan samaksi kuin vuoden 2016 lopun. Vuoden 2016 ja vuoden 2019 lopun välillä on  $2019 - 2016 = 3$  vuotta. Asukasmäärä on aluksi 117 740.

Kolmen vuoden kuluttua asukasmäärä on  $x^3 \cdot 117\,740$ . Asukasmäärän tulee olla 119 100. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $x$ .

$$x^3 \cdot 117\,740 = 119\,100 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = 1,0038\dots \approx 1,004$$

Asukasmäärä tulee vuodessa 1,004-kertaiseksi, joten väkiluku on 100,4 % edellisen vuoden väkiluvusta.

Asukasmäärän vuotuinen kasvuprosentti on ollut  $100,4\% - 100\% = 0,4\%$ .

- b) Vuoden 2020 alun asukasmäärä tulkitaan samaksi kuin vuoden 2019 lopun. Vuoden 2016 ja vuoden 2019 lopun välillä on  $2030 - 2019 = 11$  vuotta. Asukasmäärä on aluksi 119 110.

Yhdentoista vuoden kuluttua asukasmäärä on  $x^{11} \cdot 119\,100$ .

Asukasmäärän tulee olla 127 000. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $x$ .

$$x^{11} \cdot 119\,100 = 127\,000 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = 1,0058\dots \approx 1,006$$

Asukasmäärä tulee vuodessa 1,006-kertaiseksi, joten väkiluku on 100,6 % edellisen vuoden väkiluvusta.

Asukasmäärän vuotuisen kasvuprosentin tulisi olla

$100,6\% - 100\% = 0,6\%$  eli  $0,6 - 0,4 = 0,2$  prosenttiyksikköä suurempi.

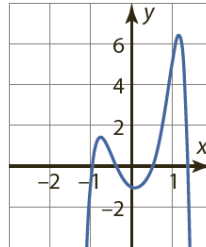
### Vastaus

- a) 0,4 %      b) 0,2 prosenttiyksikköä

## K47

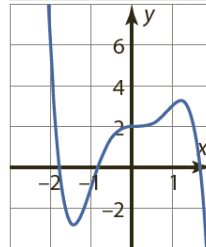
- a) Funktion kuvaaja laskee rajatta muuttujan arvojen pienentyessä tai kasvaessa rajatta.

Sen asteluku on **parillinen** ja korkeimman asteen termin kerroin **negatiivinen**.



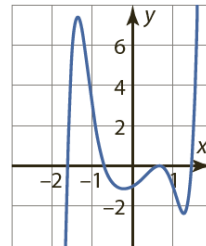
- b) Funktion kuvaaja nousee rajatta muuttujan arvojen pienentyessä rajatta ja laskee rajatta muuttujan arvojen kasvaessa rajatta.

Sen asteluku on **pariton** ja korkeimman asteen termin kerroin **negatiivinen**.



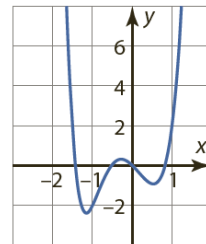
- c) Funktion kuvaaja laskee rajatta muuttujan arvojen pienentyessä rajatta ja nousee rajatta muuttujan arvojen kasvaessa rajatta.

Sen asteluku on **pariton** ja korkeimman asteen termin kerroin **positiivinen**.



- d) Funktion kuvaaja nousee rajatta muuttujan arvojen pienentyessä tai kasvaessa rajatta.

Sen asteluku on **parillinen** ja korkeimman asteen termin kerroin **positiivinen**.

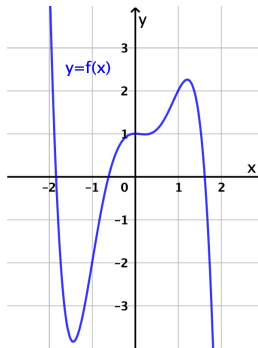


### Vastaus

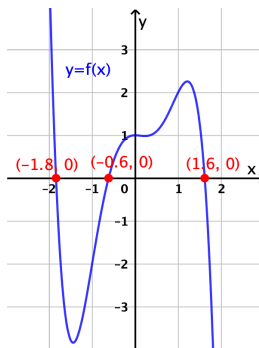
- a) asteluku parillinen, kerroin negatiivinen  
b) asteluku pariton, kerroin negatiivinen  
c) asteluku pariton, kerroin positiivinen  
d) asteluku parillinen, kerroin positiivinen

# K48

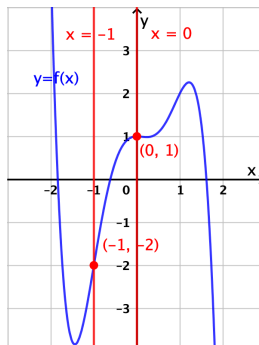
Piirretään funktion  $f$  kuvaaja geometriaohjelmalla.



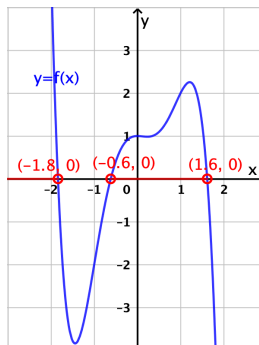
- a) Kuvaajan perusteella funktion nollakohdat ovat  $x \approx -1,8$ ,  $x \approx -0,6$  ja  $x \approx 1,6$ .



- b) Kuvaajan perusteella  $f(-1) = -2$  ja  $f(0) = 1$ .



- c) Kuvaajan perusteella funktion arvot ovat positiivisia, kun  $x < -1,8$  tai  $-0,6 < x < 1,6$ .



### Vastaus

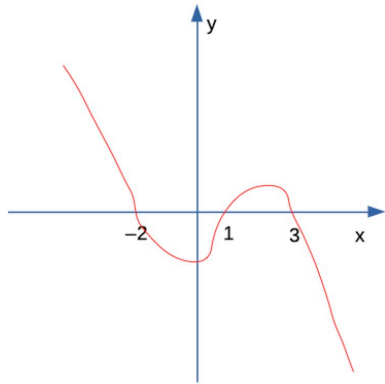
- a)  $x \approx -1,8$ ,  $x \approx -0,6$  ja  $x \approx 1,6$   
b)  $f(-1) = -2$ ,  $f(0) = 1$   
c)  $x < -1,8$  tai  $-0,6 < x < 1,6$ .

## K49

Kolmannen asteen polynomifunktion nollakohdat ovat  $x = -2$ ,  $x = 1$  ja  $x = 3$ . Sen korkeimman asteen termin kerroin  $-2$  on negatiivinen.

Funktion kuvaaja nousee rajatta muuttujan arvojen pienentyessä rajatta ja laskee rajatta muuttujan arvojen kasvaessa rajatta.

Hahmotellaan funktion kuvaaja (esimerkiksi kynällä ja paperilla tai jollakin piirto-ohjelmalla) tietojen perusteella.



Funktion arvot ovat positiivisia, kun  $x < -2$  tai  $1 < x < 3$ .

### Vastaus

$x < -2$  tai  $1 < x < 3$

## K50

a)  $(x-5)(x-3)(x+1)=0$

$x-5=0$  tai  $x-3=0$  tai  $x+1=0$

$x=5$                        $x=3$                        $x=-1$

Käytetään tulon nollasääntöä.

Ratkaistaan  $x$ .

b)

$x^4 - 2x^3 + x^2 = 0$

$x^2(x^2 - 2x + 1) = 0$

$x^2 = 0$  tai  $x^2 - 2x + 1 = 0$  Ratkaistaan  $x$ .

$x = 0$                        $x^2 - 2 \cdot x + 1^2 = 0$                        $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

Voit myös käyttää toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa.

$(x-1)^2 = 0$

$x-1 = 0$

$x = 1$

### Vastaus

a)  $x = -1, x = 3$  tai  $x = 5$

b)  $x = 0$  tai  $x = 1$

# K51

a)

$$6x^3 - 2x^2 + 24x - 8 = 0$$

Erotetaan kahden ensimmäisen termin yhteinen tekijä  $2x^2$  ja kahden viimeisen termin yhteinen tekijä 8.

$$2x^2(3x-1) + 8 \cdot (3x-1) = 0$$

Erotetaan yhteinen tekijä  $3x-1$ .

$$(3x-1)(2x^2+8) = 0$$

Käytetään tulon nollasääntöä.

$$3x-1=0 \quad \text{tai} \quad 2x^2+8=0$$

Ratkaistaan  $x$ .

$$x = \frac{1}{3} \qquad 2x^3 = -8$$

ei ratkaisuja

b)

$$x^4 - 6x^2 - 7 = 0$$

$$(x^2)^2 - 6x^2 - 7 = 0 \quad \text{Sijoitetaan } x^2 = t.$$

$$t^2 - 6t - 7 = 0$$

$$\begin{aligned} t &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{6 \pm \sqrt{64}}{2} \\ &= \frac{6 \pm 8}{2} \\ t &= \frac{6+8}{2} = 7 \quad \text{tai} \quad t = \frac{6-8}{2} = -1 \end{aligned}$$

Ratkaistaan muuttuja  $x$ .

$$x^2 = 7 \quad \text{tai} \quad x^2 = -1$$

$$x = \sqrt{7} \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{7} \quad \text{ei ratkaisuja}$$

**Vastaus**

$$\mathbf{a)} \quad x = \frac{1}{3} \qquad \mathbf{b)} \quad x = -\sqrt{7} \quad \text{tai} \quad x = \sqrt{7}$$

## K52

Merkitään lukua kirjaimella  $x$ .

Luvun  $x$  kuutio:  $x^3$

Luvun  $x$  neljäs potenssi:  $x^4$

Luvun  $x$  viides potenssi:  $x^5$

Luvun  $x$  neljännen ja viidennen potenssin keskiarvo:  $\frac{x^4 + x^5}{2}$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $x$

$$x^3 = \frac{x^4 + x^5}{2} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = -2, \quad x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 1$$

**Vastaus**

$-2, 0$  ja  $1$

## K53

a) Ratkaistaan nollakohdat.

$$3x^2 - 18x - 48 = 0 \quad |:3$$

$$x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16)}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{6 \pm 10}{2}$$

$$x = \frac{6-10}{2} = -2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{6+10}{2} = 8$$

Jaetaan polynomi tekijöihin.

$$3x^2 - 18x - 48 \quad a(x - x_1)(x - x_2),$$

$$\text{jossa } a = 3, \quad x_1 = -2 \quad \text{ja} \quad x_2 = 8.$$

$$= 3 \cdot (x - (-2))(x - 8)$$

$$= 3(x + 2)(x - 8)$$

b) Ratkaistaan nollakohdat.

$$4x^3 + 2x^2 - 2x = 0$$

$$2x(2x^2 + x - 1) = 0$$

$$2x = 0 \quad \text{tai} \quad 2x^2 + x - 1 = 0$$

$$x = 0 \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$x = \frac{-1-3}{4} = -1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$$

Jaetaan polynomi tekijöihin.

$$4x^3 - x^2 - 6x$$

$$= 2x \cdot 2(x - (-1))(x - \frac{1}{2})$$

$$= 2x(x+1) \cdot 2 \cdot (x - \frac{1}{2})$$

$$= 2x(x+1)(2x - \frac{1}{2})$$

**Vastaus**

$$\mathbf{a)} \quad 3x^2 - 18x - 48 = 3(x+2)(x-8) \quad \mathbf{b)} \quad 4x^3 + 2x^2 - 2x = 2x(x+1)(2x-1)$$

## K54

Kolmannen asteen polynomifunktiolla voi olla enintään kolme nollakohtaa.

Nollakohdat ovat  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 0$  ja  $x_3 = 4$ , joten tekijät ovat

$$x - x_1 = x - (-2) = x + 2,$$

$$x - x_2 = x - 0 = x,$$

$$x - x_3 = x - 4.$$

Funktion lauseke on siis muotoa  $a \cdot x \cdot (x + 2) \cdot (x - 4)$ , missä  $a \neq 0$ .

Kolmannen asteen termin kerroin on 3 eli  $a = 3$ .

Funktion lauseke on siis  $3x(x + 2)(x - 4)$ .

Funktion lausekkeesta voidaan kertoa sulkeet auki, jolloin saadaan  $3x^3 - 6x^2 - 24x$ .

### Vastaus

$$3x^3 - 6x^2 - 24x$$

## K55

Polynomilla  $P$  on jaollinen binomeilla  $x+1 = x - (-1)$  ja  $x-2$ , jos ja vain jos  $x = -1$  ja  $x = 2$  ovat sen nollakohta.

Muodostetaan kaksi yhtälöä.

$$\begin{array}{rcl} P(-1) = 0 & & P(2) = 0 \\ (-1)^3 + a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 2 = 0 & & 2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 2 = 0 \\ a - b = -1 & & 4a + 2b = -10 \end{array}$$

Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan vakiot  $a$  ja  $b$ .

$$\begin{cases} a - b = -1 \\ 4a + 2b = -10 \end{cases}$$

$$a = -2, b = -1$$

**Vastaus**

$$a = -2, b = -1$$

## K56

Kolmannen asteen polynomifunktiolla on enintään kolme nollakohtaa. Kolmannen asteen polynomifunktion lauseke on muotoa

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Tiedetään, että funktiolla  $f$  on kaksinkertainen nollakohta  $x = -1$ , joten funktion lauseke on

$$f(x) = a(x - (-1))(x - (-1))(x - x_3) = a(x + 1)(x + 1)(x - x_3).$$

Lisäksi tiedetään, että  $f(0) = 2$  ja  $f(1) = 4$ . Muodostetaan kaksi yhtälöä.

$$\begin{array}{ll} f(0) = 2 & f(1) = 4 \\ a(0 + 1)(0 + 1)(0 - x_3) = 2 & a(1 + 1)(1 + 1)(1 - x_3) = 4 \\ -ax_3 = 2 & 4a - 4ax_3 = 4 \end{array}$$

Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan  $a$  ja  $x_3$ .

$$\begin{cases} -ax_3 = 2 \\ 4a - 4ax_3 = 4 \end{cases}$$

$$a = -1, x_3 = 2$$

Funktion lauseke on  $f(x) = -1 \cdot (x + 1)(x + 1)(x - 2) = -x^3 + 3x + 2$  ja kolmas nollakohta  $x = 2$ .

### Vastaus

$$f(x) = -x^3 + 3x + 2, x = 2$$

## K57

a) Tutkitaan polynomifunktion  $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 2x$  merkkiä.

Polynomifunktio voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdissa. Ratkaistaan funktion  $f$  nollakohdat.

$$4x^3 + 2x^2 - 2x = 0$$

Erotetaan yhteinen tekijä  $2x$ .

$$2x(2x^2 + x - 1) = 0$$

Käytetään tulon nollasääntöä.

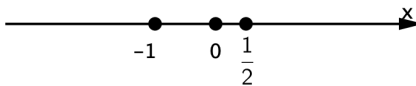
$$2x = 0 \quad \text{tai} \quad 2x + x - 1 = 0$$

$$x = 0 \qquad x = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2}$$

$$= \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$x = \frac{-1 + 3}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1 - 3}{4} = -1$$

Nollakohdat jakavat lukusuoran neljään osaan. Lasketaan kultakin osaväliltä yksi funktion  $f$  arvo.



$$f(-2) = -20 < 0$$

Osavälillä  $]-\infty, -1[$  merkki on miinus.

$$f(-0,5) = 1 > 0$$

Osavälillä  $]-1, 0[$  merkki on plus.

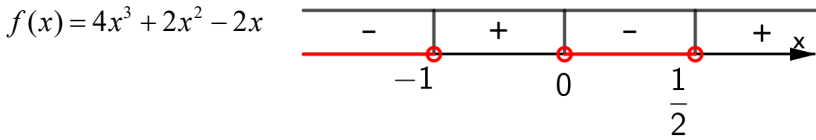
$$f(0,25) = -0,3125 < 0$$

Osavälillä  $]0, \frac{1}{2}[$  merkki on miinus.

$$f(1) = 4 > 0$$

Osavälillä  $] \frac{1}{2}, \infty[$  merkki on plus.

Laaditaan funktion  $f$  merkkikaavio



Epäyhtälö  $4x^3 + 2x^2 - 2x < 0$  toteutuu, kun  $x < -1$  tai  $0 < x < \frac{1}{2}$ .

b) Tutkitaan polynomifunktion  $f(x) = 3x^5 - 12x^3$  merkkiä.

Polynomifunktio voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdissa. Ratkaistaan funktion  $f$  nollakohdat.

$$3x^5 - 12x^3 = 0$$

Erotetaan yhteinen tekijä  $3x^3$ .

$$3x^3(x^2 - 4) = 0$$

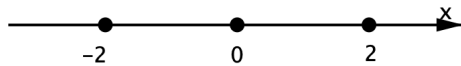
Käytetään tulon nollasääntöä.

$$3x^3 = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 - 4 = 0$$

$$x = 0 \quad x^2 = 4$$

$$x = 2 \quad \text{tai} \quad x = -2$$

Nollakohdat jakavat lukusuoran neljään osaan. Lasketaan kullakin osaväliltä yksi funktion  $f$  arvo.



$$f(-10) = -288\,000 < 0$$

Osavälillä  $]-\infty, -2[$  merkki on miinus.

$$f(-1) = 9 > 0$$

Osavälillä  $]-2, 0[$  merkki on plus.

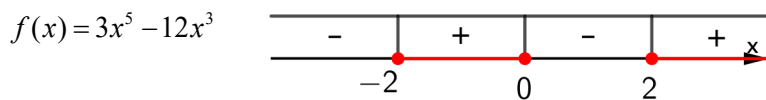
$$f(1) = -9 < 0$$

Osavälillä  $]0, 2[$  merkki on miinus.

$$f(10) = 288\,000 > 0$$

Osavälillä  $]2, \infty[$  merkki on plus.

Laaditaan funktion  $f$  merkkikaavio



Epäyhtälö  $3x^5 - 12x^3 \geq 0$  toteutuu, kun  $-2 \leq x \leq 0$  tai  $x \geq 2$ .

**Vastaus**

a)  $x < -2$  tai  $0 < x < \frac{1}{2}$

b)  $-2 \leq x \leq 0$  tai  $x \geq 2$

## K58

a) Tutkitaan polynomifunktion  $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 2x$  merkkiä.

Polynomifunktio voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdissa. Ratkaistaan funktion  $f$  nollakohdat.

$$4x^3 + 2x^2 - 2x = 0$$

Erotetaan yhteinen tekijä  $2x$ .

$$2x(2x^2 + x - 1) = 0$$

Käytetään tulon nollasääntöä.

$$2x = 0 \quad \text{tai} \quad 2x + x - 1 = 0$$

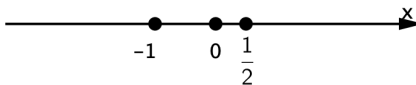
$$x = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2}$$

$$= \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$x = \frac{-1 + 3}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1 - 3}{4} = -1$$

Nollakohdat jakavat lukusuoran neljään osaan. Lasketaan kultakin osaväliltä yksi funktion  $f$  arvo.



$$f(-2) = -20 < 0$$

Osavälillä  $]-\infty, -1[$  merkki on miinus.

$$f(-0,5) = 1 > 0$$

Osavälillä  $]-1, 0[$  merkki on plus.

$$f(0,25) = -0,3125 < 0$$

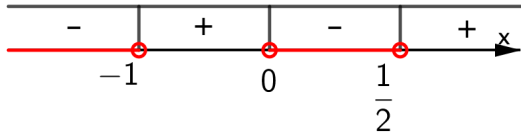
Osavälillä  $]0, \frac{1}{2}[$  merkki on miinus.

$$f(1) = 4 > 0$$

Osavälillä  $] \frac{1}{2}, \infty[$  merkki on plus.

Laaditaan funktion  $f$  merkkikaavio

$$f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 2x$$



Epäyhtälö  $4x^3 + 2x^2 - 2x < 0$  toteutuu, kun  $x < -1$  tai  $0 < x < \frac{1}{2}$ .

b) Tutkitaan polynomifunktion  $f(x) = 3x^5 - 12x^3$  merkkiä.

Polynomifunktio voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdissa. Ratkaistaan funktion  $f$  nollakohdat.

$$3x^5 - 12x^3 = 0$$

Erotetaan yhteinen tekijä  $3x^3$ .

$$3x^3(x^2 - 4) = 0$$

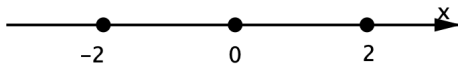
Käytetään tulon nollasääntöä.

$$3x^3 = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 - 4 = 0$$

$$x = 0 \quad x^2 = 4$$

$$x = 2 \quad \text{tai} \quad x = -2$$

Nollakohdat jakavat lukusuoran neljään osaan. Lasketaan kullakin osaväliltä yksi funktion  $f$  arvo.



$$f(-10) = -288\,000 < 0$$

Osavälillä  $]-\infty, -2[$  merkki on miinus.

$$f(-1) = 9 > 0$$

Osavälillä  $]-2, 0[$  merkki on plus.

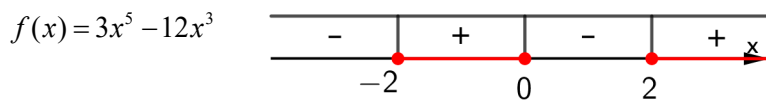
$$f(1) = -9 < 0$$

Osavälillä  $]0, 2[$  merkki on miinus.

$$f(10) = 288\,000 > 0$$

Osavälillä  $]2, \infty[$  merkki on plus.

Laaditaan funktion  $f$  merkkikaavio



Epäyhtälö  $3x^5 - 12x^3 \geq 0$  toteutuu, kun  $-2 \leq x \leq 0$  tai  $x \geq 2$ .

**Vastaus**

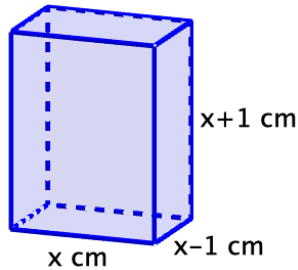
a)  $x < -2$  tai  $0 < x < \frac{1}{2}$

b)  $-2 \leq x \leq 0$  tai  $x \geq 2$

## K59

Piirretään mallikuva ja merkitään yksittäisen tiilen pituutta kirjaimella  $x$ .

Kun tiilen pituus on  $x$  cm, sen leveys on  $x - 1$  cm ja korkeus  $x + 1$  cm.



Tiilen tilavuuden lauseke on

$$x(x-1)(x+1) = x^3 - x.$$

Tiilien tilavuus on välillä  $120 \text{ cm}^3$  ja  $990 \text{ cm}^3$ . Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan  $x$ .

$$120 \leq x^3 - x \leq 990 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$5 \leq x \leq 10$$

Tiilien pituus vaihtelee 5 cm:n ja 10 cm:n välillä.

### Vastaus

5 cm:n ja 10 cm:n välillä

# K60

a) Ratkaistaan nimittäjien nollakohdat.

$$x-1=0 \quad \text{ja} \quad x=0 \\ x=1$$

Funktion  $f$  määrittelyehto on  $x \neq 1$  ja  $x \neq 0$ .

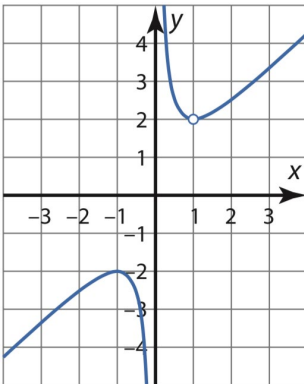
Funktion  $f$  määrittelyjoukko on  $\mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$ .

b) Lasketaan funktion arvo kohdassa  $x = -1$ .

$$f(-1) = \frac{(-1)^2 - (-1)}{-1-1} + \frac{1}{-1} = \frac{2}{-2} - 1 = -1 - 1 = -2$$

Funktion arvoa kohdassa  $x = 1$  ei ole määritelty.

c) Piirretään funktion kuvaaja.



**Vastaus**

a)  $\mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$     b)  $f(-1) = -2$ ,  $f(1)$  ei määritelty

# K61

a) Nimittäjän  $3x$  nollakohta on  $x=0$ .

Funktion  $f$  määrittelyehto on  $x \neq 0$ .

$$f(x) = \frac{6x^2 - 15x}{3x} = \frac{\cancel{3x}^1(2x-5)}{\cancel{3x}_1} = 2x - 5$$

b) Lasketaan nimittäjän nollakohdat.

$$8x - 4 = 0$$

$$8x = 4 \quad | :8$$

$$x = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Funktion  $f$  määrittelyehto on  $x \neq \frac{1}{2}$ .

$$f(x) = \frac{10x - 5}{8x - 4} = \frac{5 \cdot \cancel{(2x-1)}^1}{4 \cdot \cancel{(2x-1)}_1} = \frac{5}{4}$$

c) Nimittäjän  $7-x$  nollakohta on  $x=7$ .

Funktion  $f$  määrittelyehto on  $x \neq 7$ .

$$f(x) = \frac{x-7}{7-x} = \frac{x-7}{-x+7} = \frac{\cancel{x-7}^1}{-(\cancel{x-7})_1} = \frac{1}{-1} = -1$$

d) Nimittäjän  $7+x$  nollakohta on  $x=-7$ .

Funktion  $f$  määrittelyehto on  $x \neq -7$ .

$$f(x) = \frac{x^2 - 49}{7+x} = \frac{x^2 - 7^2}{7+x} = \frac{\cancel{(x+7)}^1(x-7)}{\cancel{x+7}_1} = x - 7$$

## Vastaus

a)  $f(x) = 2x - 5$ , kun  $x \neq 0$    b)  $f(x) = \frac{5}{4}$ , kun  $x \neq \frac{1}{2}$

c)  $f(x) = -1$ , kun  $x \neq 7$    d)  $f(x) = x - 7$ , kun  $x \neq -7$

## K62

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{x^{1+x}}{1-x} + \frac{x^{1-x}}{1+x} \\ &= \frac{x(1+x)}{(1+x)(1-x)} + \frac{x(1-x)}{(1+x)(1-x)} \\ &= \frac{x+x^2}{1-x^2} + \frac{x-x^2}{1-x^2} \\ &= \frac{x+x^2+x-x^2}{1-x^2} \\ &= \frac{2x}{1-x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1+x}{x^2} \\ &= \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2} + \frac{1+x}{x^2} \\ &= \frac{x-1+1+x}{x^2} \\ &= \frac{2\cancel{x}^1}{x^{\cancel{2}_1}} \\ &= \frac{2}{x} \end{aligned}$$

### Vastaus

$$\text{a)} \quad \frac{2x}{1-x^2}, \text{ missä } x \neq -1 \text{ ja } x \neq 1$$

$$\text{b)} \quad \frac{2}{x}, \text{ missä } x \neq 0$$

## K63

a) Ratkaistaan nimittäjien nollakohdat.

$$x+1=0$$

$$x=-1$$

$$x^2+x=0$$

$$x(x+1)=0$$

$$x=0 \quad \text{tai} \quad x+1=0$$

$$x=0 \quad \quad \quad x=-1$$

Funktion  $f$  määrittelyehto on  $x \neq -1$  ja  $x \neq 0$ .

b) Sievennetään funktio lauseke.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{x+1} - \frac{x}{x^2+x} \\ &= \overset{x)}{\frac{2}{x+1}} - \frac{x}{x(x+1)} \\ &= \frac{2x}{x(x+1)} - \frac{x}{x(x+1)} \\ &= \frac{2x-x}{x^2+x} \\ &= \frac{\overset{1}{\cancel{x}}}{\underset{1}{\cancel{x}}(x+1)} \\ &= \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

Lasketaan funktion arvo.

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{-\frac{2}{3}+1} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 1 \cdot \frac{3}{1} = 3$$

**Vastaus**

a)  $x \neq -1$  ja  $x \neq 0$

b)  $f(x) = \frac{1}{x+1}$ ,  $f\left(-\frac{2}{3}\right) = 3$

## K64

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{2x-1}{x+1} \cdot \frac{x^2-1}{4x-2} \\ &= \frac{(2x-1)(x^2-1)}{(x+1)(4x-2)} \\ &= \frac{\overset{1}{(2x-1)} \overset{1}{(x+1)}(x-1)}{\underset{1}{(x+1)} \cdot \underset{1}{2} \underset{1}{(2x-1)}} \\ &= \frac{x-1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & (x^2-4x) \cdot \frac{5x}{2x-8} \\ &= \frac{x^2-4x}{1} \cdot \frac{5x}{2x-8} \\ &= \frac{x^2-4x}{1} \cdot \frac{5x}{2x-8} \\ &= \frac{(x^2-4x) \cdot 5x}{1 \cdot (2x-8)} \\ &= \frac{\overset{1}{x} \overset{1}{(x-4)} \cdot 5x}{1 \cdot \underset{1}{2} \underset{1}{(x-4)}} \\ &= \frac{5x^2}{2} = \frac{5}{2}x^2 \end{aligned}$$

### Vastaus

$$\text{a)} \frac{x-1}{2}, \text{ missä } x \neq \frac{1}{2} \text{ ja } x \neq 1 \quad \text{b)} \frac{5}{2}x^2, \text{ missä } x \neq 4$$

## K65

a) Ratkaistaan nimittäjien nollakohdat.

$$\begin{array}{rcl} x-1=0 & & 2x+1=0 \\ x=1 & & 2x=-1 \quad | :2 \\ & & x=-\frac{1}{2} \end{array}$$

Funktion  $f$  määrittelyehto on  $x \neq -\frac{1}{2}$  ja  $x \neq 1$ .

b) Sievennetään funktion lauseke.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4x^2-1}{x-1} \cdot \frac{3x-3}{2x+1} \\ &= \frac{(4x^2-1) \cdot (3x-3)}{(x-1) \cdot (2x+1)} && 4x^2-1 = (2x)^2-1^2 \\ &= \frac{\overset{1}{(2x+1)} \overset{1}{(2x-1)} \cdot 3 \overset{1}{(x-1)}}{\underset{1}{(x-1)} \cdot \underset{1}{(2x+1)}} \\ &= 3(2x-1) \\ &= 6x-3 \end{aligned}$$

Lasketaan funktion arvo.

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 6 \cdot \frac{1}{3} - 3 = 2 - 3 = -1$$

**Vastaus**

a)  $x \neq -\frac{1}{2}$  ja  $x \neq 1$     b)  $f(x) = 6x - 3$ ,  $f\left(\frac{1}{3}\right) = -1$

## K66

a) Selvitetään ensin funktion  $f$  määrittelyehto.

Ratkaistaan nimittäjän nollakohdat.

$$3x - 6 = 0$$

$$3x = 6 \quad | :3$$

$$x = 2$$

Funktion  $f$  määrittelyehto on  $x \neq 2$ .

Ratkaistaan funktion  $f$  nollakohdat.

$$\frac{x^2 - 4}{3x - 6} = 0 \quad | \cdot (3x - 6) \quad (\neq 0)$$

$$x^2 - 4 = 0 \quad | +4$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \sqrt{4} = 2 \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{4} = -2$$

Ratkaisu  $x = 2$  ei toteuta määrittelyehtoa  $x \neq 2$ .

Funktion nollakohta on  $x = -2$ .

- b) Nimittäjän  $5x$  nollakohta on  $x=0$ .  
Funktion  $f$  määrittelyehto on  $x \neq 0$ .

Ratkaistaan funktion  $f$  nollakohdat.

$$\frac{12x^2 - 4x}{5x} = 0 \quad | \cdot 5x \neq 0$$

$$12x^2 - 4x = 0$$

$$4x(3x - 1) = 0$$

$$4x = 0 \quad \text{tai} \quad 3x - 1 = 0$$

$$x = 0 \quad 3x = 1 \quad | :3$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Ratkaisu  $x=0$  ei toteuta määrittelyehtoa  $x \neq 0$ .

Funktion nollakohta on  $x = \frac{1}{3}$ .

### Vastaus

a)  $x = -2$

b)  $x = \frac{1}{3}$

## K67

a) Nimittäjien nollakohta on  $x = 0$ .

Yhtälön määrittelyehto on  $x \neq 0$ .

Ratkaistaan yhtälö.

$$\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x} = 5 \quad | \cdot x^2 \quad (\neq 0)$$

$$\frac{4 \overset{1}{\cancel{x^2}}}{\underset{1}{\cancel{x^2}}} - \frac{\overset{1}{\cancel{x^2}}}{\underset{1}{\cancel{x}}} = 5x^2$$

$$4 - x = 5x^2$$

$$-5x^2 - x + 4 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 4}}{2 \cdot (-5)} = \frac{1 \pm \sqrt{81}}{-10} = \frac{1 \pm 9}{-10}$$

$$x = \frac{1+9}{-10} = -1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{1-9}{-10} = \frac{-8}{-10} = \frac{4}{5}$$

Molemmat ratkaisut toteuttavat määrittelyehdon.

b) Ratkaistaan nimittäjien nollakohdat.

$$2x - 1 = 0$$

$$x + 1 = 0$$

$$2x = 1 \quad | :2$$

$$x = -1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Yhtälön määrittelyehto on  $x \neq -1$  ja  $x \neq \frac{1}{2}$ .

Ratkaistaan yhtälö.

$$\frac{4}{2x-1} - \frac{1}{x+1} = 1 \quad | \cdot (2x-1)(x+1) \quad (\neq 0)$$

$$\frac{4(x+1) \overset{1}{\cancel{(2x-1)}}}{\overset{1}{\cancel{2x-1}}} - \frac{\overset{1}{\cancel{(x+1)}}(2x-1)}{\overset{1}{\cancel{x+1}}} = (x+1)(2x-1)$$

$$4(x+1) - (2x-1) = 2x^2 + x + 2x - 1$$

$$4x + 4 - 2x + 1 = 2x^2 - x - 1$$

$$-2x^2 + 4x - 2x - x + 4 + 1 + 1 = 0$$

$$-2x^2 + x + 6 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 6}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{-4} = \frac{-1 \pm 7}{-4}$$

$$x = \frac{-1+7}{-4} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1-7}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2$$

Molemmat ratkaisut toteuttavat määrittelyehdon.

**Vastaus**

$$\mathbf{a)} \quad x = -1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{4}{5} \quad \mathbf{b)} \quad x = -\frac{3}{2} \quad \text{tai} \quad x = 2$$

## K68

a) Sievennetään lauseke CAS-laskimella.

$$\frac{x+2}{x-2} + \frac{5x}{x^2-2x} = \frac{x+7}{x-2}$$

Oikea vaihtoehto on siis 2.

*Sievennys GeoGebran CAS-laskimella.*

Murtoluvuksi  $\left( \frac{x+2}{x-2} + \frac{5x}{x^2-2x} \right)$

→  $\frac{x+7}{x-2}$

b) Sievennetään lauseke CAS-laskimella.

$$1-3x + \frac{x+2}{x-2} = \frac{-3x^2+8x}{x-2}$$

Oikea vaihtoehto on siis 4.

*Sievennys GeoGebran CAS-laskimella.*

Murtoluvuksi  $\left( 1 - 3x + \frac{x+2}{x-2} \right)$

→  $\frac{-3x^2+8x}{x-2}$

c) Sievennetään lauseke CAS-laskimella.

$$\frac{x+2}{x} + \frac{x}{x-2} = \frac{2x^2-4}{x^2-2x}$$

Oikea vaihtoehto on siis 1.

*Sievennys GeoGebran CAS-laskimella.*

Murtoluvuksi  $\left(\frac{x+2}{x} + \frac{x}{x-2}\right)$

→  $\frac{2x^2-4}{x^2-2x}$

d) Sievennetään lauseke CAS-laskimella.

$$\frac{x}{x-2} \cdot \left(3 - \frac{1}{x}\right) = \frac{3x-1}{x-2}$$

Oikea vaihtoehto on siis 3.

*Sievennys GeoGebran CAS-laskimella.*

Murtoluvuksi  $\left(\frac{x}{x-2} \left(3 - \frac{1}{x}\right)\right)$

→  $\frac{3x-1}{x-2}$

**Vastaus**

**a) 2 b) 4 c) 1 c) 3**

## K69

Lasketaan nimittäjän nollakohdat.

$$4x^2 + 11x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3)}}{2 \cdot 4} = \frac{-11 \pm 13}{8}$$

$$x = \frac{-11 + 13}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-11 - 13}{8} = \frac{-24}{8} = -3$$

Funktion määrittelyehto on  $x \neq -3$  ja  $x \neq \frac{1}{4}$ , joten funktion määrittelyjoukko on  $\mathbf{R} \setminus \{-3, \frac{1}{4}\}$ .

Supistetaan lauseke.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3 + 6x^2 + 9x}{4x^2 + 11x - 3} \\ &= \frac{x(x^2 + 6x + 9)}{4(x - (-3))(x - \frac{1}{4})} \\ &= \frac{x(x+3)^{\frac{1}{2}}}{4 \cancel{(x+3)} (x - \frac{1}{4})} \\ &= \frac{x(x+3)}{4(x - \frac{1}{4})} = \frac{x^2 + 3x}{4x - 1} \end{aligned}$$

Jaetaan nimittäjä tekijöihin  
nollakohtien perusteella:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Osoittajassa on binomin neliö:

$$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x + 3)^2.$$

**Vastaus**

määrittelyjoukko  $\mathbf{R} \setminus \{-3, \frac{1}{4}\}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{4x - 1}$

## K70

Merkitään osallistujien lukumäärä kirjaimella  $x$ .

Lopulta jokainen osallistuja joutui maksamaan  $\frac{702}{x}$  euroa.

Ilmoittautuneita oli viisi vähemmän, joten heitä oli  $x - 5$  henkeä.

Ennakoitu maksu osallistujaa kohden oli  $\frac{702}{x - 5}$  euroa.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $x$ .

$$\frac{702}{x} = \frac{702}{x - 5} - 15$$

Toteunut maksu oli 15 euroa vähemmän kuin alkuperäinen maksu.

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = -13 \quad \text{tai} \quad x = 18$$

Osallistujien lukumäärä on positiivinen luku, joten  $x = 18$ .

Matkalle osallistui 18 henkilöä.

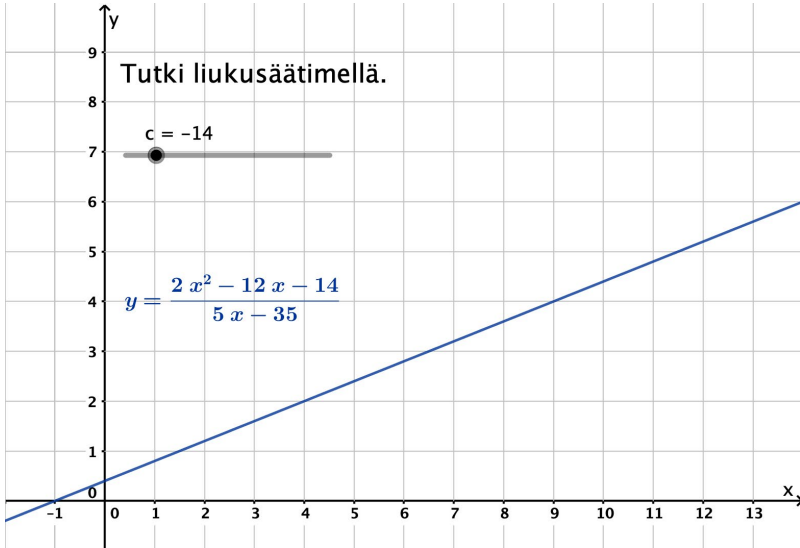
Jokainen osallistuja maksoi  $\frac{702 \text{ €}}{18} = 39 \text{ €}$ .

### Vastaus

Retkelle osallistui 18 henkeä ja jokainen heistä maksoi 39 euroa.

# K71

- a) Appletin perusteella funktion  $f$  lauseke voidaan supistaa, kun  $c = -14$ .



- b) Lasketaan nimittäjän nollakohta.

$$5x - 35 = 0$$

$$5x = 35 \quad | :5$$

$$x = 7$$

Funktion määrittelyehto on  $x \neq 7$ .

Sievennetään lauseke.

$$f(x) = \frac{2x^2 - 12x + c}{5x - 35} = \frac{2x^2 - 12x + c}{5(x - 7)}$$

Lauseketta voidaan supistaa vain, kun  $x-7$  on osoittajan tekijä. Tällöin  $x=7$  on oltava osoittajan nollakohta. Ratkaistaan  $c$ .

$$2 \cdot 7^2 - 12 \cdot 7 + c = 0 \quad \text{Kun } x=7 \text{ osoittajan arvo on } 0.$$

$$14 + c = 0 \quad | -14$$

$$c = -14$$

Siis lauseketta voidaan supistaa vain, kun  $c = -14$ .

Ratkaistaan osoittajan nollakohdat ja jaetaan osoittaja tekijöihin.

$$2x^2 - 12x - 14 = 0 \quad | :2$$

$$x^2 - 6x - 7 = 0$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7)}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{6 \pm 8}{2}$$

$$x = \frac{6+8}{2} = 7 \quad \text{tai} \quad x = \frac{6-8}{2} = -1$$

$$2x^2 - 12x - 14 \quad ax^2 + bx + c$$

$$= 2(x-7)(x+1) \quad = a(x-x_1)(x-x_2)$$

Supistetaan funktion lauseke.

$$f(x) = \frac{2x^2 - 12x - 14}{5x - 35} = \frac{2 \overset{1}{\cancel{(x-7)}}(x+1)}{5 \underset{1}{\cancel{(x-7)}}} = \frac{2x+2}{5}$$

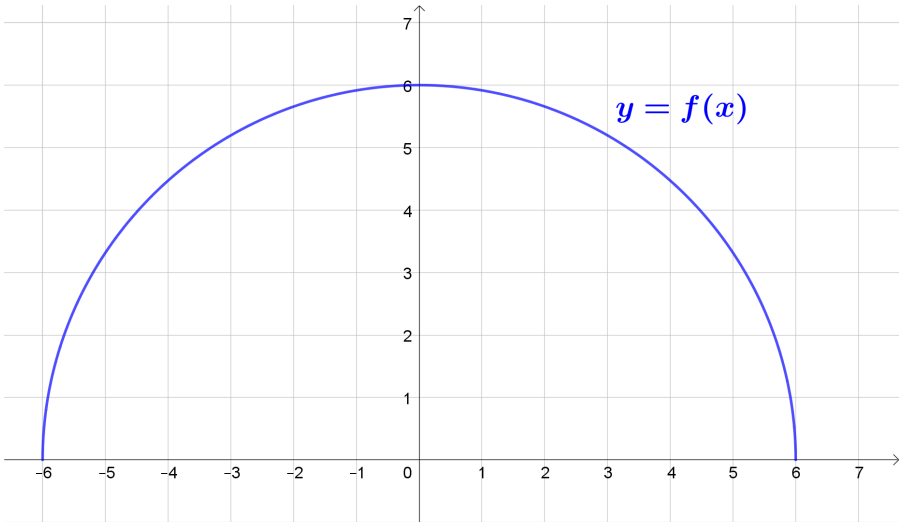
### Vastaus

a)  $c = -14$

b)  $f(x) = \frac{2x+2}{5}$ , kun  $x \neq 7$

## K72

a) Piirretään funktion  $f(x) = \sqrt{36 - x^2}$  kuvaaja.



Neliöjuuri on määritelty, kun juurettava on epänegatiivinen.  
Määritetään funktion  $f$  määrittelyehto.

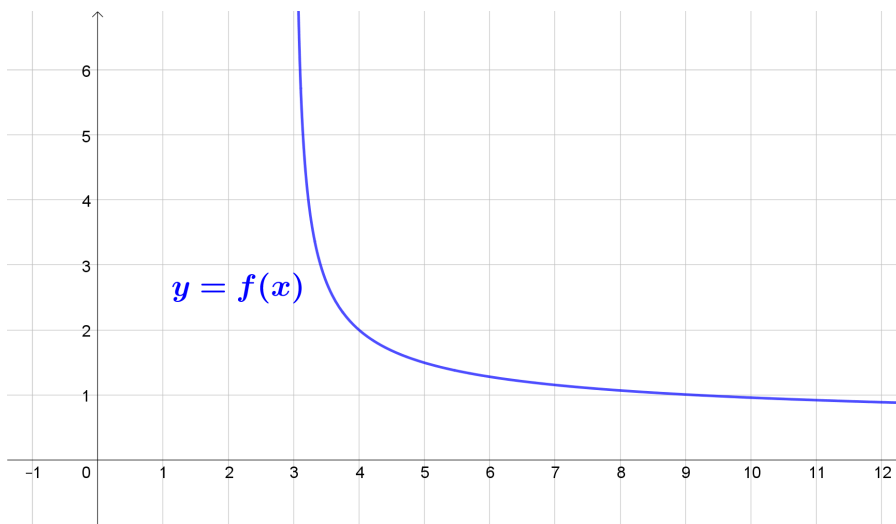
$$36 - x^2 \geq 0 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$-6 \leq x \leq 6$$

Lasketaan funktion arvo kohdassa 4.

$$f(4) = \sqrt{36 - 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

b) Piirretään funktion  $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+2\sqrt{x}}}{\sqrt{x-3}}$  kuvaaja.



Pariton juuri on määritelty kaikilla juuretavan arvoilla. Neliöjuuret on määritelty, kun juuretävät ovat epänegatiivisia. Rationaalilauseke on määritelty, kun nimittäjän arvo ei ole 0. Määritetään funktion  $f$  määrittelyehto.

$$x \geq 0 \quad \text{ja} \quad \begin{aligned} x-3 &> 0 \\ x &> 3 \end{aligned}$$

Yhdistämällä määrittelyehdoksi saadaan  $x > 3$ .

Lasketaan funktion arvo kohdassa 4.

$$f(4) = \frac{\sqrt[3]{4+2\sqrt{4}}}{\sqrt{4-3}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt{1}} = 2$$

**Vastaus**

- a) määrittelyehto  $-6 \leq x \leq 6$ ,  $f(4) = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$   
 b) määrittelyehto  $x > 3$ ,  $f(4) = 2$

### K73

a) Korotetaan yhtälön molemmat puolet neliöön ja ratkaistaan muuttuja  $x$ .

$$2\sqrt{x} = 1 \quad | (\ )^2$$

$$(2\sqrt{x})^2 = 1^2$$

$$4x = 1 \quad | :4$$

$$x = \frac{1}{4}$$

Tarkistetaan, toteuttaako saatu ratkaisu alkuperäisen yhtälön.

Sijoitetaan  $x = \frac{1}{4}$  yhtälöön.

$$2\sqrt{\frac{1}{4}} = 1$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

tosi

Yhtälön ratkaisu on siis  $x = \frac{1}{4}$ .

b) Muokataan yhtälö ensin muotoon, jossa toisella puolella on pelkkä juurilauseke.

$$\begin{aligned}\sqrt{x} + 2 &= 0 & | -2 \\ \sqrt{x} &= -2\end{aligned}$$

Yhtälön vasen puoli on aina arvoiltaan epänegatiivinen, ei koskaan  $-2$ . Yhtälöllä ei siis ole ratkaisuja.

c) Muokataan yhtälö ensin muotoon, jossa toisella puolella on pelkkä juurilauseke. Korotetaan sitten yhtälön molemmat puolet potenssiin, joka poistaa juurilausekkeen.

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x} + 2 &= 0 & | -2 \\ \sqrt[3]{x} &= -2 & | ( )^3 \\ (\sqrt[3]{x})^3 &= (-2)^3 \\ x &= -8\end{aligned}$$

Yhtälön ratkaisu on  $x = -8$ .

### Vastaus

a)  $x = \frac{1}{4}$

b) ei ratkaisuja

c)  $x = -8$

## K74

a) Korotetaan yhtälön molemmat puolet neliöön ja ratkaistaan muuttuja  $x$ .

$$\sqrt{9-5x} = 7 \quad | \quad ()^2$$

$$(\sqrt{9-5x})^2 = 7^2$$

$$9-5x = 49 \quad | -9$$

$$-5x = 40 \quad | :(-5)$$

$$x = -8$$

Tarkistetaan, toteuttaako saatu ratkaisu alkuperäisen yhtälön. Sijoitetaan  $x = -8$  yhtälöön.

$$\sqrt{9-5 \cdot (-8)} = 7$$

$$\sqrt{49} = 7$$

tosi

Yhtälön ratkaisu on siis  $x = -8$ .

b) Korotetaan yhtälön molemmat puolet neliöön ja ratkaistaan muuttuja  $x$ .

$$\sqrt{x}\sqrt{1+x} = 1 \quad | \quad ()^2$$

$$(\sqrt{x}\sqrt{1+x})^2 = 1^2$$

$$x(1+x) = 1$$

$$x+x^2 = 1 \quad | -1$$

$$x^2+x-1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Tarkistetaan laskimen avulla, toteuttavatko saadut ratkaisut alkuperäisen yhtälön.

Sijoitetaan  $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

yhtälöön.

$$\sqrt{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \sqrt{1+\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)} = 1$$

ei määritelty

Sijoitetaan  $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

yhtälöön.

$$\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \sqrt{1+\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)} = 1$$

1 = 1  
tosi

Yhtälön ratkaisu on siis  $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ .

### Vastaus

a)  $x = -8$

b)  $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

## K75

Ratkaistaan yhtälö korottamalla sen molemmat puolet neliöön.

$$\begin{aligned}2\sqrt{4x-7} &= 3\sqrt{2x+1} && |(\ )^2 \\(2\sqrt{4x-7})^2 &= (3\sqrt{2x+1})^2 \\4(4x-7) &= 9(2x+1) \\16x-28 &= 18x+9 && | -18x+28 \\-2x &= 37 && | :(-2) \\x &= -\frac{37}{2}\end{aligned}$$

Tarkistetaan, toteuttaako saatu ratkaisu alkuperäisen yhtälön.

Sijoitetaan  $x = -\frac{37}{2}$  yhtälöön.

$$\begin{aligned}2\sqrt{4\cdot\left(-\frac{37}{2}\right)-7} &= 3\sqrt{2\cdot\left(-\frac{37}{2}\right)+1} \\2\sqrt{-81} &= 3\sqrt{-36} \\&\text{ei määritelty}\end{aligned}$$

Yhtälöllä ei siis ole ratkaisuja.

**Vastaus**

ei ratkaisuja

## K76

Muokataan yhtälö ensin muotoon, jossa toisella puolella on pelkkä juurilauseke. Korotetaan sitten yhtälön molemmat neliöön.

$$\sqrt{12-4x}-2=6x \quad | +2$$

$$\sqrt{12-4x}=6x+2 \quad | ()^2$$

$$(\sqrt{12-4x})^2=(6x+2)^2$$

$$12-4x=36x^2+24x+4 \quad | -36x^2-24x-4$$

$$-36x^2-28x+8=0 \quad | :(-4)$$

$$9x^2+7x-2=0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-2)}}{2 \cdot 9} = \frac{-7 \pm 11}{18}$$

$$x = \frac{-7+11}{18} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-7-11}{18} = \frac{-18}{18} = -1$$

Tarkistetaan, toteuttavatko saadut ratkaisut alkuperäisen yhtälön.

Sijoitetaan  $x = -1$  yhtälöön.

$$\sqrt{12-4 \cdot (-1)}-2=6 \cdot (-1)$$

$$\sqrt{16}-2=-6$$

$$4-2=-6$$

epätosi

Sijoitetaan  $x = \frac{2}{9}$  yhtälöön.

$$\sqrt{12-4 \cdot \frac{2}{9}}-2=6 \cdot \frac{2}{9}$$

$$\sqrt{\frac{108}{9}-\frac{8}{9}}-2=\frac{4}{3}$$

$$\sqrt{\frac{100}{9}}-2=\frac{4}{3}$$

$$\frac{10}{3}-\frac{6}{3}=\frac{4}{3}$$

tosi

Yhtälön ratkaisu on  $x = \frac{2}{9}$ .

**Vastaus**

$$x = \frac{2}{9}$$

## K77

a) Muokataan yhtälö ensin muotoon, jossa toisella puolella on pelkkä juurilauseke. Korotetaan sitten yhtälön molemmat puolet potenssiin, joka poistaa juurilausekkeen.

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 2} + 1 &= x && | -1 \\ \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 2} &= x - 1 && | (\quad)^3 \\ (\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 2})^3 &= (x - 1)^3 \\ x^3 - 3x^2 + 2 &= (x - 1)(x - 1)^2 \\ x^3 - 3x^2 + 2 &= (x - 1)(x^2 - 2x + 1) \\ x^3 - 3x^2 + 2 &= x^3 - 2x^2 + x - x^2 + 2x - 1 \\ x^3 - 3x^2 + 2 &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 && | -x^3 + 3x^2 - 3x - 2 \\ -3x &= -3 && | :(-3) \\ x &= 1\end{aligned}$$

Yhtälön ratkaisu on  $x = 1$ .

b) Muokataan yhtälö ensin muotoon, jossa toisella puolella on pelkkä juurilauseke. Korotetaan sitten yhtälön molemmat puolet potenssiin, joka poistaa juurilausekkeen.

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{x^3 - 11} - 2 &= 0 && | +2 \\ \sqrt[4]{x^3 - 11} &= 2 && | (\quad)^4 \\ (\sqrt[4]{x^3 - 11})^4 &= 2^4 \\ x^3 - 11 &= 16 && | +11 \\ x^3 &= 27 \\ x &= \sqrt[3]{27} = 3\end{aligned}$$

Tarkistetaan, toteuttaako saatu ratkaisu alkuperäisen yhtälön.  
Sijoitetaan  $x = 3$  yhtälöön.

$$\sqrt[4]{3^3 - 11} - 2 = 0$$

$$\sqrt[4]{16} - 2 = 0$$

$$2 - 2 = 0$$

tosii

Yhtälön ratkaisu on  $x = 3$ .

### **Vastaus**

a)  $x = 1$

b)  $x = 3$

## K78

Luvut ovat toistensa käänteisluvut, kun niiden tulo on 1. Lasketaan funktiolausekkeiden tulo.

$$\begin{aligned}f(x) \cdot g(x) &= (x^2 + 1 + \sqrt{x^4 + 2x^2})(x^2 + 1 - \sqrt{x^4 + 2x^2}) \\&= (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{x^4 + 2x^2})^2 \\&= x^4 + 2x^2 + 1 - (x^4 + 2x^2) \\&= x^4 + 2x^2 + 1 - x^4 - 2x^2 \\&= 1\end{aligned}$$

Lausekkeiden tulo on 1 muuttujan arvosta riippumatta, joten funktioiden arvot ovat toistensa käänteisluvut jokaisessa kohdassa  $x$ .

### K79

a) Lasketaan nopeuksien osamäärä, kun kappaleiden massat ovat  $2m$  ja  $m$ .

$$\frac{v(2m)}{v(m)} = \frac{\sqrt{\frac{2E}{2m}}}{\sqrt{\frac{2E}{m}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707106... = 70,7106...%$$

Raskaamman kappaleen nopeus on siis  $100\% - 70,7106...% = 29,2893...% \approx 29\%$  pienempi.

(Tai  $\frac{v(m)}{v(2m)} = \sqrt{2} = 1,414213... = 141,4213...%$ , eli kevyemmän kappaleen nopeus on 41% suurempi.)

b) Muutetaan nopeudet yksikköön m/s.

$$50 \text{ km/h} = 50 \cdot \frac{1000 \text{ m}}{60 \cdot 60 \text{ s}} = 50 \cdot \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 50 \cdot \frac{1}{3,6} \text{ m/s} = 13,8888... \text{ m/s}$$

$$30 \text{ km/h} = 30 \cdot \frac{1}{3,6} \text{ m/s} = 8,3333... \text{ m/s}$$

Ratkaistaan nopeamman kappaleen liike-energian suuruus.

$$13,8888... = \sqrt{\frac{2E}{350}} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$E = 33757,716... \text{ (J)}$$

Ratkaistaan sitten hitaamman kappaleen massa.

$$8,3333... = \sqrt{\frac{2 \cdot 33757,716...}{m}} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$m = 972,222... \text{ (kg)}$$

Massa on 970 kg.

### Vastaus

a) Raskaamman kappaleen nopeus on 29% pienempi (tai kevyemmän kappaleen nopeus on 41% suurempi).

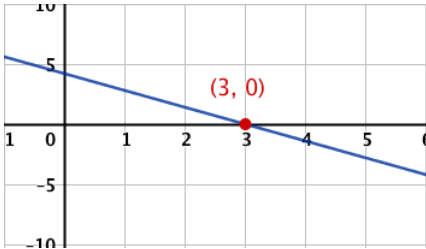
b) 970 kg

# A1.

a) Arvioidaan appletilla ratkaisujen likiarvot.

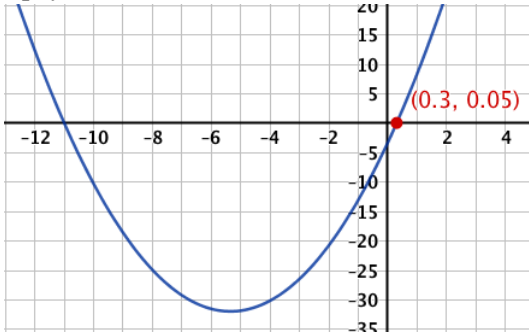
1) Funktion  $f(x) = -1,4x + 4,2$  kuvaaja on laskeva suora.

Epäyhtälö  $-1,4x + 4,2 \geq 0$  toteutuu, kun  $x \leq 3$ .



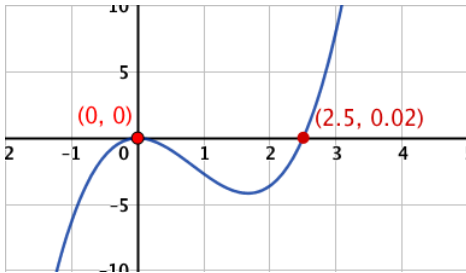
2) Funktion  $f(x) = x^2 + 10,7x - 3,3$  kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

Epäyhtälö  $x^2 + 10,7x - 3,3 > 0$  toteutuu, kun  $x < -11$  tai  $x > 0,3$ .



3) Funktio  $f(x) = 1,8x^3 - 4,5x^2$  on kolmannen asteen polynomifunktio, jolla on kaksi nollakohtaa.

Epäyhtälö  $1,8x^3 - 4,5x^2 \geq 0$  toteutuu, kun  $x = 0$  tai  $x \geq 2,5$ .



- b) Tutkitaan polynomifunktion  $f(x) = 1,8x^3 - 4,5x^2$  merkkiä. Polynomifunktio voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdissa. Ratkaistaan funktion  $f$  nollakohdat.

$$1,8x^3 - 4,5x^2 = 0$$

$$x^2(1,8x - 4,5) = 0$$

$$x^2 = 0 \quad \text{tai} \quad 1,8x - 4,5 = 0$$

$$x = 0 \qquad 1,8x = 4,5 \quad | :1,8$$

$$x = 2,5$$

Nollakohdat 0 ja 2,5 jakavat lukusuoran kolmeen osaan. Lasketaan kultakin osaväliltä yksi funktion arvo.

$$f(-1) = -6,3 < 0$$

$$f(1) = -2,7 < 0$$

$$f(3) = 8,1 > 0$$

Laaditaan funktion  $f$  merkkikaavio.



Epäyhtälö  $1,8x^3 - 4,5x^2 \geq 0$  toteutuu, kun  $x = 0$  tai  $x \geq 2,5$ .

### Vastaus

a) 1)  $x \leq 3$

2)  $x < -11$  tai  $x > 0,3$

3)  $x = 0$  tai  $x \geq 2,5$

b)  $x = 0$  tai  $x \geq 2,5$

## A2.

Sievennetään lauseke.

$$\begin{aligned} & (x+1)^2 - (2x+1)(2x-1) - 2(x+1) \\ &= x^2 + 2x + 1 - (4x^2 - 1) - 2x - 2 \\ &= x^2 + 2x + 1 - 4x^2 + 1 - 2x - 2 \\ &= -3x^2 \end{aligned}$$

Lasketaan lausekkeen  $-3x^2$  arvo, kun  $x = \sqrt{3} - 1$ .

$$\begin{aligned} & -3x^2 \\ &= -3 \cdot (\sqrt{3} - 1)^2 \\ &= -3 \cdot \left( (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 + 1^2 \right) \\ &= -3 \cdot (3 - 2\sqrt{3} + 1) \\ &= -3 \cdot (-2\sqrt{3} + 4) \\ &= 6\sqrt{3} - 12 \end{aligned}$$

### Vastaus

sievennetty muoto  $-3x^2$ , arvo  $6\sqrt{3} - 12$

### A3.

a)  $x^2 + 6 = 5x$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x = \frac{5+1}{2} = 3 \quad \text{tai} \quad x = \frac{5-1}{2} = 2$$

b)  $x^2 + 6 < 5x$

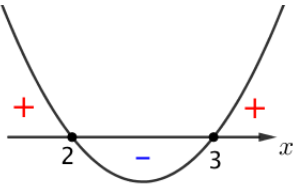
$$x^2 - 5x + 6 < 0$$

Tutkitaan polynomifunktion  $f(x) = x^2 - 5x + 6$  merkkiä.

Polynomifunktio voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdissa.

Funktion  $f$  nollakohdat ovat a-kohdan perusteella  $x = 2$  ja  $x = 3$ .

Funktion  $f$  kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Epäyhtälö toteutuu, kun  $2 < x < 3$ .

#### Vastaus

a)  $x = 2$  tai  $x = 3$

b)  $2 < x < 3$

## A4.

$$f(x) = \frac{8}{x} - \frac{2}{x-1}$$

Ratkaistaan nimittäjien nollakohdat.

$$\begin{array}{l} x = 0 \\ x - 1 = 0 \\ x = 1 \end{array}$$

Funktion  $f$  määrittelyehto on  $x \neq 0$  ja  $x \neq 1$ .

Ratkaistaan funktion  $f$  nollakohdat.

$$\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ \frac{8}{x} - \frac{2}{x-1} = 0 \quad | \cdot x(x-1) \text{ (}\neq 0\text{)} \\ 8(x-1) - 2x = 0 \\ 8x - 8 - 2x = 0 \\ 6x - 8 = 0 \quad | + 8 \\ 6x = 8 \quad | : 6 \\ x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \end{array}$$

Ratkaisu  $x = \frac{4}{3}$  toteuttaa määrittelyehdon.

### Vastaus

määrittelyehto  $x \neq 0$  ja  $x \neq 1$ , nollakohta  $x = \frac{4}{3}$

## A5.

$$\begin{aligned}x + \sqrt{x+10} &= 2 && | -x \\ \sqrt{x+10} &= 2 - x && | ( )^2 \\ (\sqrt{x+10})^2 &= (2-x)^2 \\ x+10 &= 4 - 4x + x^2 && | -x + 10 \\ 0 &= -6 - 5x + x^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^2 - 5x - 6 &= 0 \\ x &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}\end{aligned}$$

$$x = \frac{5+7}{2} = 6 \quad \text{tai} \quad x = \frac{5-7}{2} = -1$$

Tarkistetaan, toteuttavatko saadut ratkaisut alkuperäisen yhtälön.

Sijoitetaan  $x = 6$  yhtälöön.

Sijoitetaan  $x = -1$  yhtälöön.

$$\begin{aligned}x + \sqrt{x+10} &= 2 \\ 6 + \sqrt{6+10} &= 2 \\ 6 + \sqrt{16} &= 2 \\ 6 + 4 &= 2 \\ 10 &= 0 \\ \text{epätosi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x + \sqrt{x+10} &= 2 \\ -1 + \sqrt{-1+10} &= 2 \\ -1 + \sqrt{9} &= 2 \\ -1 + 3 &= 2 \\ 2 &= 2 \\ \text{tosi}\end{aligned}$$

Ratkaisuista vain  $x = -1$  toteuttaa yhtälön.

**Vastaus**

$$x = -1$$

## A6.

a) Funktion nollakohdat ovat  $-2$ ,  $-1$  ja  $4$ , joten sen tekijät ovat

$$x - (-2) = x + 2,$$

$$x - (-1) = x + 1,$$

$$x - 4.$$

Funktion lauseke on muotoa

$$f(x) = a(x + 2)(x + 1)(x - 4),$$

missä  $a \neq 0$ .

Ratkaistaan kertoimen  $a$  arvo.

$$f(0) = 2$$

$$a(0 + 2)(0 + 1)(0 - 4) = 2$$

$$a = -\frac{1}{4}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

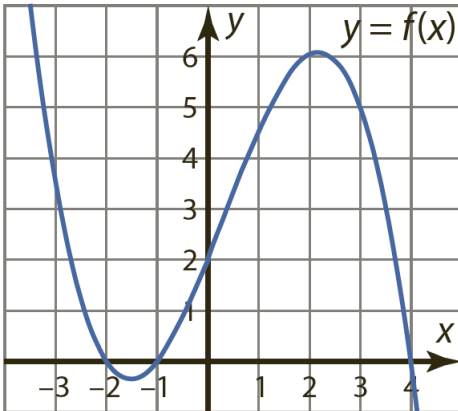
Funktion lauseke on

$$f(x) = -\frac{1}{4}(x + 2)(x + 1)(x - 4).$$

Funktion lausekkeen voi myös sieventää muotoon

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + 2.$$

b) Piirretään funktion  $f$  kuvaaja.



Funktion  $f$  arvot ovat negatiivisia, kun  $-2 < x < -1$  tai  $x > 4$ .

**Vastaus**

a)  $f(x) = -\frac{1}{4}(x+2)(x+1)(x-4)$  eli  $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + 2$

b)  $-2 < x < -1$  tai  $x > 4$

## A7.

Merkitään neliön muotoisen tontin sivun pituutta kirjaimella  $x$  (m).

Tontin pinta-ala on  $x^2$  (m<sup>2</sup>) ja hinta  $32x^2$  (€).

Aidan pituus on  $4x$  (m) ja hinta  $4 \cdot 16x = 64x$  (€).

Matti käytti tontin ostamiseen ja aitaamiseen 80 000 €.

Ratkaistaan  $x$ .

$$32x^2 + 64x = 80\,000$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = -51,009\dots \text{ tai } x = 49,009\dots$$

Tontin sivun pituus on positiivinen luku, joten  $x = 49,009\dots \approx 49$  (m).

Tontin sivut ovat 49 metrin pituiset.

**Vastaus**

49 m

## A8.

Funktion  $f(x) = x^2 + 3ax - a$  kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

Funktion  $f$  kaikkia arvot ovat positiivisia, jos funktiolla ei ole yhtään nollakohtaa.

Funktiolla  $f$  ei ole yhtään nollakohtaa, jos yhtälön  $x^2 + 3ax - a = 0$  diskriminantti on negatiivinen.

Muodostetaan diskriminantin lauseke.

$$D = (3a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-a) = 9a^2 + 4a$$

Ratkaistaan diskriminantin nollakohdat.

$$9a^2 + 4a = 0$$

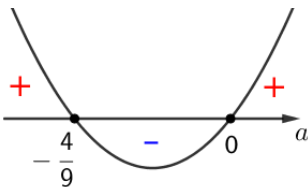
$$a(9a + 4) = 0$$

$$a = 0 \quad \text{tai} \quad 9a + 4 = 0$$

$$9a = -4$$

$$a = -\frac{4}{9}$$

Diskriminantin kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Diskriminantti on negatiivinen, kun  $-\frac{4}{9} < a < 0$ .

**Vastaus**

$$-\frac{4}{9} < a < 0$$

## A9.

Polynomien  $x^3 + ax^2 - a^2x - x$  eräs nollakohta on  $-2$ .

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $a$ .

$$(-2)^3 + a \cdot (-2)^2 - a^2 \cdot (-2) - (-2) = 0 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$a = -3 \quad \text{tai} \quad a = 1$$

Jaetaan polynomi tekijöihin, kun  $a = -3$ .

$$x^3 - 3x^2 - (-3)^2x - x$$

Jaetaan tekijöihin CAS-laskimella.

$$= x^3 - 3x^2 - 10x$$

$$= x(x-5)(x+2)$$

Jaetaan polynomi tekijöihin, kun  $a = 1$ .

$$x^3 + 1 \cdot x^2 - 1^2x - x$$

Jaetaan tekijöihin CAS-laskimella.

$$= x^3 + x^2 - 2x$$

$$= x(x-1)(x+2)$$

### Vastaus

$$a = -3, \quad x(x-5)(x+2) \quad \text{tai} \quad a = 1, \quad x(x-1)(x+2)$$

## A10.

Oletetaan, että  $a$ ,  $b$  ja  $c$  ovat mitkä tahansa reaaliluvut.

Tehtävänä on osoittaa, että  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ .

Reaaliluvun neliö on aina epänegatiivinen. Siten

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2 \geq 0$$

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0$$

$$2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \geq 0$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

Väite on näin todistettu.  $\square$

## B1.

$$\begin{aligned}\text{a)} \quad & (3x+2)(3x-2) - (3x+2)^2 \\ & = (3x)^2 - 2^2 - \left( (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2 \right) \\ & = 9x^2 - 4 - (9x^2 + 12x + 4) \\ & = 9x^2 - 4 - 9x^2 - 12x - 4 \\ & = -12x - 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b)} \quad & \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 16} \\ & = \frac{x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2}{x^2 - 4^2} \\ & = \frac{(x-4)^2}{(x+4) \cancel{(x-4)}} \\ & = \frac{x-4}{x+4}\end{aligned}$$

### Vastaus

$$\text{a)} \quad -12x - 8$$

$$\text{b)} \quad \frac{x-4}{x+4}, \text{ kun } x \neq -4 \text{ ja } x \neq 4$$

## B2.

$$(2x^3 + 5x^2 - 3x)(x^2 - 9) = 0$$

$$2x^3 + 5x^2 - 3x = 0$$

$$x(2x^2 + 5x - 3) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 2x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4}$$

$$x = \frac{-5 \pm 7}{4}$$

$$x = \frac{-5 + 7}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-5 - 7}{4} = -3$$

tai

$$x^2 - 9 = 0 \quad | +9$$

$$x^2 = 9$$

$$x = -3 \quad \text{tai} \quad x = 3$$

**Vastaus**

$$x = -3, \quad x = 0, \quad x = \frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad x = 3$$

### B3.

$$2x^3 + x^2 \leq 6x$$

$$2x^3 + x^2 - 6x \leq 0$$

Tutkitaan polynomifunktion  $f(x) = 2x^3 + x^2 - 6x$  merkkiä.

Polynomifunktio voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdissa.

Ratkaistaan funktion  $f$  nollakohdat.

$$2x^3 + x^2 - 6x = 0$$

$$x(2x^2 + x - 6) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 2x^2 + x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{4}$$

$$x = \frac{-1 \pm 7}{4}$$

$$x = \frac{-1 + 7}{4} = \frac{3}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1 - 7}{4} = -2$$

Nollakohdat  $-2$ ,  $0$  ja  $\frac{3}{2}$  jakavat lukusuoran neljään osaan.

Lasketaan kultakin osaväliltä yksi funktion arvo.

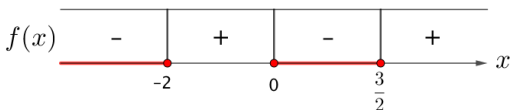
$$f(-3) = -27 < 0$$

$$f(-1) = 5 > 0$$

$$f(1) = -3 < 0$$

$$f(2) = 8 > 0$$

Laaditaan funktion  $f$  merkkikaavio.



Epäyhtälö toteutuu, kun  $x \leq -2$  tai  $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$ .

**Vastaus**

$$x \leq -2 \quad \text{tai} \quad 0 \leq x \leq \frac{3}{2}$$

## B4.

$$\frac{6}{x} - \frac{4}{x+2} = 2$$

Selvitetään yhtälön määrittelyehto. Ratkaistaan nimittäjien nollakohdat.

$$\begin{aligned}x = 0 & & x + 2 = 0 \\ & & x = -2\end{aligned}$$

Yhtälön määrittelyehto on  $x \neq 0$  ja  $x \neq -2$ .

Ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned}\frac{6}{x} - \frac{4}{x+2} &= 2 && \cdot x(x+2) \quad (\neq 0) \\ 6(x+2) - 4x &= 2x(x+2) \\ 6x + 12 - 4x &= 2x^2 + 4x \\ 2x + 12 &= 2x^2 + 4x && \quad | -2x^2 - 4x \\ -2x^2 - 2x + 12 &= 0 && \quad | :(-2) \\ x^2 + x - 6 &= 0 \\ x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \\ x &= \frac{-1+5}{2} = 2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1-5}{2} = -3\end{aligned}$$

Molemmat ratkaisut toteuttavat määrittelyehdon.

### Vastaus

$$x = -3 \quad \text{tai} \quad x = 2$$

## B5.

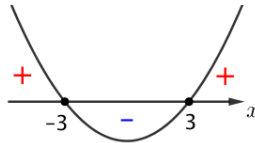
$$f(x) = \sqrt{x^2 - 9} - 3\sqrt{-x - 1}$$

Funktio  $f$  on määritelty, kun molemmat juuret ovat epänegatiivisia.

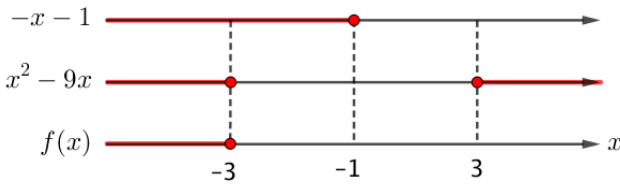
$$\begin{aligned} -x - 1 &\geq 0 && | +1 \\ -x &\geq 1 && | \cdot (-1) (<0) \\ x &\leq -1 \end{aligned}$$

Funktion  $x^2 - 9$  kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Määritetään sen nollakohdat.

$$\begin{aligned} x^2 - 9 &= 0 && | +9 \\ x^2 &= 9 \\ x &= -3 \text{ tai } x = 3 \end{aligned}$$



Ehto  $x^2 - 9 \geq 0$  toteutuu, kun  $x \leq -3$  tai  $x \geq 3$ .



Funktion  $f$  määrittelyehto on  $x \leq -3$ .

Määritetään funktion  $f$  nollakohdat.

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-9} - 3\sqrt{-x-1} &= 0 && | + 3\sqrt{-x-1} \\ \sqrt{x^2-9} &= 3\sqrt{-x-1} && | ( )^2 \\ (\sqrt{x^2-9})^2 &= (3\sqrt{-x-1})^2 \\ x^2 - 9 &= 9(-x-1) \\ x^2 - 9 &= -9x - 9 && | + 9x + 9 \\ x^2 + 9x &= 0 \\ x(x+9) &= 0 \\ x=0 \text{ tai } x+9 &= 0 && | -9 \\ & && x = -9\end{aligned}$$

Ratkaisuista vain  $x = -9$  toteuttaa määrittelyehdon.

### Vastaus

määrittelyehto  $x \leq -3$ , nollakohta  $x = -9$

## B6.

Osa 1:

$$x^3 - 2x^2 - 11x + 12 \geq 0$$

Ratkaistaan epäyhtälö CAS-laskimella.

$$-3 \leq x \leq 1 \quad \text{tai} \quad x \geq 4$$

Osa 2:

$$p(x) = (x - a)(x - b)(x - c), \quad a < b < c$$

Polynomifunktion  $p(x)$  merkki voi vaihtua vain nollakohtissa.

Määritetään nollakohdat  $a$ ,  $b$  ja  $c$  tulon nollasäännöllä.

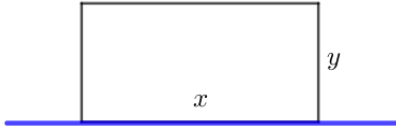
Valitaan luvut  $x_1 < a$ ,  $a < x_2 < b$ ,  $b < x_3 < c$  ja  $x_4 > c$ .

Lasketaan funktion arvot  $p(x_1)$ ,  $p(x_2)$ ,  $p(x_3)$  ja  $p(x_4)$ .

Epäyhtälö  $p(x) \geq 0$  toteutuu nollakohtien  $a$ ,  $b$  ja  $c$  lisäksi niillä osaväleillä, joilla edellä lasketut funktion arvot ovat positiivisia.

## B7.

Merkitään rantaviivan pituutta ja tontin leveyttä kirjaimilla  $x$  ja  $y$  (m).



Tontin ympärysmitta on 200 m.

$$2x + 2y = 200$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$y = 100 - x$$

Tontin pinta-ala on  $xy = x(100 - x)$  (m<sup>2</sup>) ja hinta  $40x(100 - x)$  (€).

Rantaviivan pituus on  $x$  (m) ja hinta  $400x$  (€).

Maria maksoi tontista 100 000 €.

Ratkaistaan  $x$ .

$$40x(100 - x) + 400x = 100\,000$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 32,087... \approx 32 \quad \text{tai} \quad x = 77,912... \approx 78$$

Kun rantaviivan pituus on 32 metriä, tontin leveys on  $100 - 32 = 68$  metriä.

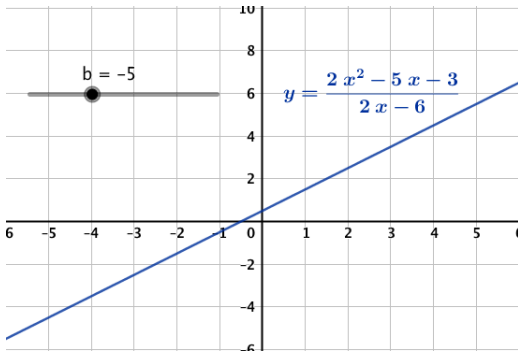
Kun rantaviivan pituus on 78 metriä, tontin leveys on  $100 - 78 = 22$  metriä.

### Vastaus

rantaviiva 32 m ja leveys 68 m tai rantaviiva 78 m ja leveys 22 m

## B8.

- a) Kun vakion  $b$  arvoksi valitaan  $-5$ , rationaalifunktion lauseke sievenee suoran yhtälöksi.



- b) Lauseke  $\frac{2x^2 + bx - 3}{2x - 6}$  voidaan supistaa vain, jos osoittajalla ja nimittäjällä on yhteinen nollakohta.

Määritetään nimittäjän nollakohta.

$$2x - 6 = 0$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

Määritetään vakiolle  $b$  sellainen arvo, että  $x = 3$  on myös osoittajan nollakohta.

$$2 \cdot 3^2 + b \cdot 3 - 3 = 0$$

$$3b + 15 = 0$$

$$b = -5$$

Lauseke voidaan supistaa vain, jos  $b = -5$ .

Osoittajaksi saadaan  $2x^2 - 5x - 3$ .

Ratkaistaan osoittajan nollakohdat.

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4}$$

$$x = \frac{5+7}{4} = 3 \quad \text{tai} \quad x = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2}$$

Jaetaan osoittaja tekijöihin.

$$2x^2 - 5x - 3 = 2(x-3)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (2x-6)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Supistetaan lauseke.

$$\frac{2x^2 - 5x - 3}{2x - 6} = \frac{\cancel{(2x-6)}\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\cancel{2x-6}} = x + \frac{1}{2}, \text{ kun } x \neq 3$$

### Vastaus

a)  $b = -5$

b)  $x + \frac{1}{2}$ , kun  $x \neq 3$

## B9.

$$x^2 + x - ax + a + 2 = 0$$
$$x^2 + (1 - a)x + (a + 2) = 0$$

Toisen asteen yhtälöllä on täsmälleen yksi ratkaisu, kun sen diskriminantti on nolla.

Muodostetaan diskriminantin lauseke.

$$D = (1 - a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a + 2) \quad \text{Sievennetään CAS-laskimella.}$$
$$= a^2 - 6a - 7$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $a$ .

$$a^2 - 6a - 7 = 0 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$a = -1 \quad \text{tai} \quad a = 7$$

Muodostetaan arvoa  $a = -1$  vastaava yhtälö ja ratkaistaan se.

$$x^2 + x - (-1)x + (-1) + 2 = 0 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$x^2 + 2x + 1 = 0$$
$$x = -1$$

Muodostetaan arvoa  $a = 7$  vastaava yhtälö ja ratkaistaan se.

$$x^2 + x - 7x + 7 + 2 = 0 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$x^2 - 6x + 9 = 0$$
$$x = 3$$

### Vastaus

$a = -1$ , jolloin  $x = -1$ , tai  $a = 7$ , jolloin  $x = 3$

## B10.

Funktiolla  $f$  on ominaisuus:  $f(a)f(b) - f(ab) = a + b$  kaikilla reaaliluvuilla  $a$  ja  $b$ .

**Tapa 1.** Noudatetaan vihjettä ja määritetään ensin funktion arvo  $f(1)$ .

Käytetään arvoja  $a = b = 1$ .

$$f(1)f(1) - f(1 \cdot 1) = 1 + 1$$

$$f(1)f(1) - f(1) = 2$$

$$f(1)^2 - f(1) - 2 = 0$$

Kyseessä on toisen asteen yhtälö, jossa muuttujana on  $f(1)$ .

Ratkaistaan yhtälö ratkaisukaavalla tai CAS-laskimella.

$$f(1) = -1 \quad \text{tai} \quad f(1) = 2$$

Määritetään funktion arvo  $f(x)$  käyttämällä arvoja  $a = x$  ja  $b = 1$ .

$$f(x)f(1) - f(x \cdot 1) = x + 1$$

$$f(x)f(1) - f(x) = x + 1$$

$$f(x)(f(1) - 1) = x + 1$$

$$f(x) = \frac{x + 1}{f(1) - 1}$$

Jos  $f(1) = -1$ , niin  $f(x) = \frac{x+1}{-1-1} = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}$ . Tarkistetaan, toteuttaako tämä funktio alkuehdon.

$$\begin{aligned} f(a)f(b) - f(ab) &= a + b \\ \left(-\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{b}{2} - \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{ab}{2} - \frac{1}{2}\right) &= a + b \\ \frac{3}{4}(ab - a - b + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Ehto ei toteudu kaikilla reaaliluvuilla  $a$  ja  $b$ .

Jos  $f(1) = 2$ , niin  $f(x) = \frac{x+1}{2-1} = x+1$ . Tarkistetaan, toteuttaako tämä funktio alkuehdon.

$$\begin{aligned} f(a)f(b) - f(ab) &= a + b \\ (a+1)(b+1) - (ab+1) &= a + b \\ ab + a + b + 1 - ab - 1 &= a + b \\ a + b &= a + b \end{aligned}$$

Ehto toteutuu kaikilla reaaliluvuilla  $a$  ja  $b$ .

Funktion lauseke on  $f(x) = x + 1$ .

**Täpa 2.** Määritetään ensin funktion arvo  $f(0)$ .

Käytetään arvoja  $a = b = 0$ .

$$f(0)f(0) - f(0 \cdot 0) = 0 + 0$$

$$f(0)f(0) - f(0) = 0$$

$$f(0)(f(0) - 1) = 0$$

$$f(0) = 0 \quad \text{tai} \quad f(0) - 1 = 0$$

$$f(0) = 1$$

Määritetään funktion arvo  $f(x)$  käyttämällä arvoja  $a = x$  ja  $b = 0$ .

$$f(x)f(0) - f(x \cdot 0) = x + 0$$

$$f(x)f(0) - f(0) = x$$

Jos  $f(0) = 0$ , niin  $f(x) \cdot 0 - 0 = x$ , mikä on tosi vain arvolla  $x = 0$ .

Jos  $f(0) = 1$ , niin

$$f(x) \cdot 1 - 1 = x$$

$$f(x) = x + 1.$$

Tarkistetaan, toteuttaako tämä funktio alkuehdon.

$$f(a)f(b) - f(ab) = a + b$$

$$(a + 1)(b + 1) - (ab + 1) = a + b$$

$$ab + a + b + 1 - ab - 1 = a + b$$

$$a + b = a + b$$

Ehto toteutuu kaikilla reaalityyppisillä  $a$  ja  $b$ .

Funktion lauseke on  $f(x) = x + 1$ .

**Vastaus**

$$f(x) = x + 1$$