MATEMATIIKAN TENTTI 2019 RATKAISUT A-OSA

1. a) Jos lainapääoma on alussa a, niin kahden vuoden kuluttuttua se on

$$1{,}05^2 \cdot a = 1{,}1025a.$$

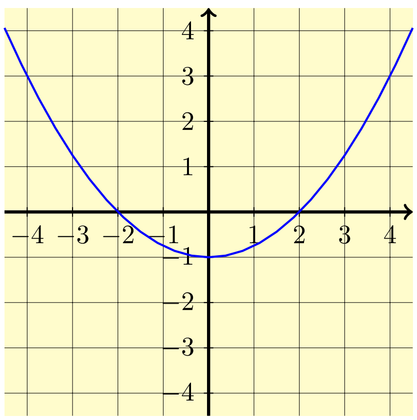
b) Suoran yhtälö on ratkaistussa muodossa $y = -\frac{3}{2}x - 4$ eli kulmakerroin on negatiivinen.

c)

$$(\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{\sqrt{3} + 1}{2} = \frac{3 - 1}{2} = 1.$$

d) Jos $xy^2 = k$, niin $x = \frac{k}{y^2}$, joten x on kääntäen verrannollinen suureen y neliöön.

e) Derivaatta on negatiivinen välillä $]-2, 2[$.



f) Kaikkien silmälukujen todennäköisyys on $\frac{1}{6}$, joten odotusarvo on

$$\frac{1}{6} \cdot (-1 - 2 - 3 - 4 - 5 + 6) = -\frac{9}{6} = -1{,}5$$

2. a)

$$\frac{x^4 y^{-2}}{x^2 y^{-5}} = x^{4-2} y^{-2-(-5)} = x^2 y^3.$$

b)

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \lim_{x \to -3} \frac{(x - 3)\cancel{(x + 3)}}{\cancel{x + 3}} = \lim_{x \to -3} (x - 3) = -3 - 3 = -6$$

c)

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = (2\bar{i} - 3\bar{j}) \cdot (3\bar{i} + 2\bar{j}) = 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 2 = 0.$$

Siis vektorien välinen kulma on 90°

d)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} (\sin 2x + \cos 3x)\, dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} 2 \sin 2x \, dx + \frac{1}{3} \int_0^{\pi} 3 \cos 3x \, dx \\
&= \frac{1}{2} \Big/_{0}^{\pi} (-\cos 2x) + \frac{1}{3} \Big/_{0}^{\pi} \sin 3x \\
&= \frac{1}{2}(-\cos 2\pi + \cos 0) + \frac{1}{3}(\sin 3\pi - \sin 0) = 0
\end{aligned}$$

3. Olkoon $A = (2, 0, -3)$ ja $B = (-2, 5, 1)$. Suoran suuntavektori on

$$\overline{AB} = (-2-2)\overline{i} + (5-0)\overline{j} + (1-(-3))\overline{j} = -4\overline{i} + 5\overline{j} + 4\overline{k}.$$

Suoran mielivaltaisen pisteen $X = (x, y, z)$ paikkavektori on

$$\begin{aligned} \overline{OX} &= \overline{OA} + t\overline{AB} \\ &= 2\overline{i} - 3\overline{k} + t(-4\overline{i} + 5\overline{j} + 4\overline{k}) \\ &= (2-4t)\overline{i} + 5t\overline{j} + (-3+4t)\overline{k}. \end{aligned}$$

Siis suoran parametrimuotoinen yhtälö on

$$\begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = 5t \\ z = -3 + 4t \end{cases}$$

Tutkitaan, onko piste $(6, -5, 2)$ suoralla:

$$\begin{cases} 6 = 2 - 4t \\ -5 = 5t \\ 2 = -3 + 4t \end{cases}$$

Kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä saadaan $t = -1$, mutta kolmas ei toteudu tällä arvolla. Siis piste ei ole suorallla.

Tutkitaan, onko piste $(22, -25, -23)$ suoralla:

$$\begin{cases} 22 = 2 - 4t \\ -25 = 5t \\ -23 = -3 + 4t \end{cases}$$

Keskimmäisestä yhtälöstä saadaan $t = -5$ ja kaksi muuta yhtälöä toteutuvat myös tällä arvolla. Siis piste on suoralla.

4. Siis polynomi on muotoa $P(x) = a(x-2)(x+3)$. Edelleen

$$P(0) = a(-2)^2 \cdot 3 = 12a = 12,$$

mistä $a = 1$. Siis $P(x) = (x-2)^2(x+3)$. Nyt

$$P'(x) = 2(x-2)(x-3) + (x-2)^2 \cdot 1 = (x-2)(2(x+3) + x - 2) = (x-2)(3x+4).$$

Siis derivaatan nollakohdat saadaan yhtälöstä

$$\begin{aligned} (x-2)(3x+4) &= 0 \\ x - 2 = 0 \text{ tai } 3x - 4 &= 0 \\ x = 2 \text{ tai } x &= -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Nyt $P(x)$ on jatkuva välillä $[0, 3]$ ja derivoituva välillä $]0, 3[$, joten voidaan soveltaa Fermat'n lausetta, jonka mukaan funktion suurin ja pienin arvo löytyy välin päätepisteistä tai derivaatan nollakohdista. Nyt

$$\begin{aligned} P(0) &= 12 \\ P(2) &= 0 \\ P(3) &= 6. \end{aligned}$$

Siis suurin arvo on 12 ja pienin 0.