MAA PRELI KEVÄT 2022 RATKAISUT

1. Monivalintatehtävä 12 p.

A1

Seuraavissa monivalintatehtävissä yksi vastausvaihtoehdoista on oikea. Valitse oikea vastausvaihtoehto.

1.1 2 p.

Kun lauseke $(a-1)(a+1)-(a-1)^2$ sievennetään saadaan

- ○ $-2a$
- ◉ $2a-2$
- ○ 2
- ○ $2a(a-1)$

Ratkaisu: $a^2-1-(a^2-2a+1)=a^2-1-a^2+2a-1=2a-2$

1.2 2 p.

Kun binomiin $3x-2x^3$ lisätään monomin $2x$ ja binomin $1-x^2$ tulo saadaan

- ○ $x(4x^2-5)$
- ◉ $-x(4x^2-5)$
- ○ $x(4x^2+5)$
- ○ $x(-4x^2-5)$

Ratkaisu: $3x-2x^3+2x*(1-x^2)=3x-2x^3+2x-2x^3=-4x^3+5x=-x(4x^2-5)$

1.3 2 p.

Lausekkeen $\left(x - \frac{1}{x}\right) : (x - 1)$ sievennetty muoto on

- ○ $x + \frac{1}{x}$
- ◉ $\frac{x+1}{x}$
- ○ $\frac{x-1}{x}$
- ○ $\frac{1-x}{x}$

Ratkaisu: $\frac{x^2-1}{x} * \frac{1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)} = \frac{x+1}{x}$

1.4 2 p.

Määritä lausekkeen $\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{xy}}$ arvo, kun $x = 2$ ja $y = -4$.

- ○ 4
- ○ 2
- ◉ -2
- ○ 1

Ratkaisu: $\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{xy}} = \frac{\frac{x+y}{xy}}{\frac{1}{xy}} = \frac{x+y}{xy} * xy = x+y \quad joten\ 2-4=-2$. Voidaan myös suoraan sijoittaa arvot ja edetä murtoluvuilla.

1.5 2 p.

Kun lauseke $\frac{2x}{x+1} \cdot \frac{x^2+x}{x^2}$ sievennetään saadaan

- (valittu) 2
- $2x$
- x
- $\frac{1}{2}$

Ratkaisu: $\frac{2x * x * (x+1)}{(x+1) * x^2} = 2$

1.6 2 p.

Kun lauseke $\frac{2a-1}{a-1} - \frac{2a+1}{a+1} - \frac{a}{a^2+a}$ sievennetään saadaan

- (valittu) $\frac{1}{a-1}$
- $\frac{1}{a+1}$
- $\frac{a}{a+1}$
- $\frac{a}{a-1}$

Ratkaisu: $\frac{a(2a-1)(a+1) - a(a-1)(2a+1) - a(a-1)}{a(a-1)(a+1)}$

$$= \frac{2a^3 + 2a^2 - a^2 - a - 2a^3 - a^2 + 2a^2 + a - a^2 + a}{a(a-1)(a+1)}$$

$$= \frac{a(a+1)}{a(a+1)(a-1)} = \frac{1}{a-1}$$

2. Tekstitehtävä 12 p.

A1

Kaksi abiturienttia pelaavat noppapeliä. Pelissä pelaaja heittää vuorollaan kahta noppaa. Heittovuorossa oleva voittaa, jos hän saa kaksi samaa silmälukua. Abiturienttien keskinäinen heittojärjestys arvotaan ennen pelin alkua.

a) Mikä on todennäköisyys, että abiturientti saa heittovuorollaan kaksi samaa silmälukua?
b) Mikä on todennäköisyys, että peli päättyy ensimmäisellä heittokierroksella?
c) Millä todennäköisyydellä peli etenee toiselle heittokierrokselle?

Ratkaisu:

a) Samaa silmälukua olevia pareja on 6 kpl, ja todennäköisyys saada samaa silmälukua oleva pari on

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{36}.$$

Tn. saada samaa silmälukua oleva pari (2 p.)

Näin ollen

$$P(\text{"abiturientti saa kaksi samaa silmälukua"})=6\cdot\frac{1}{36}=\frac{1}{6}.$$

Tn. saada kaksi samaa silmälukua (2 p.)

b) Peli päättyy ensimmäisellä kierroksella, jos aloittanut saa kaksi samaa silmälukua tai jos aloittanut ei saa kahta samaa silmälukua, mutta toisena oleva saa.

Ehto pelin päättymiselle 1. kierroksella (1 p.)

Edellisen kohdan perusteella

$$P(\text{"aloittanut saa kaksi samaa silmälukua"})=\frac{1}{6}.$$

Tuloperiaatteen ja komplementtisäännön nojalla

$$\begin{aligned}&P(\text{"aloittanut ei saa kahta samaa silmälukua, mutta toisena oleva saa"})\\&=P(\text{"aloittanut ei saa kahta samaa silmälukua"})P(\text{"toisena oleva saa kaksi samaa silmälukua"})\\&=(1-P(\text{"aloittanut saa kaksi samaa silmälukua"}))P(\text{"toisena oleva saa kaksi samaa silmälukua"})\\&=\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{36}.\end{aligned}$$

Tuloperiaatteen ja komplementtisäännön käyttö (2 p.)

Yhteenlaskuperiaatteen nojalla

$$\begin{aligned}&P(\text{"peli päättyy ensimmäisellä heittokierroksella"})=P(\text{"aloittanut saa kaksi samaa silmälukua"})\\&+P(\text{"aloittanut ei saa kahta samaa silmälukua, mutta toisena oleva saa"})\\&=\frac{1}{6}+\frac{5}{36}=\frac{11}{36}.\end{aligned}$$

Yhteenlaskuperiaatteen käyttö (1 p.)

c) Peli etenee toiselle heittokierroksella, mikäli peli ei päätyy ensimmäisellä heittokierroksella. Komplementtisäännön nojalla

Ehto pelin etenemiselle 2. kierrokselle (1 p.)

$$\begin{aligned}&P(\text{"peli etenee toiselle heittokierrokselle"})=P(\text{"peli ei pääty ensimmäisellä heittokierroksella"})\\&=1-P(\text{"peli päättyy ensimmäiselle heittokierrokselle"})\\&=1-\frac{11}{36}=\frac{25}{36}.\end{aligned}$$

Komplementtisäännön soveltaminen
ja tn. lasku (3 p.)

3. Tekstitehtävä 12 p.

A1

Laske funktion

a) $f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$ suurin ja pienin arvo välillä $[1, e]$.

b) $g(x) = \sqrt{2 - x - x^2}$ suurin ja pienin arvo.

Ratkaisu:

a)

$f(x) := x^2 \cdot \ln(x)$

$f'(x) = 2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x \cdot (1 + 2 \cdot \ln(x)) = 0$ Oikea derivaattafunktio (1 p.)

$x=0$ tai $1+2\ln(x)=0$,

$x=0$ ei kuulu väliin $[1, e]$ Derivaatan nollakohdat: juuri x=0 (1 p.)

$\ln(x) = -\frac{1}{2}$ antaa juuren $x = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e^1}} = \frac{1}{\sqrt{e^1}} \blacktriangleright 0.6065306597$ eikä sekään kuulu väliin.

Toinen juuri (1 p.)

Tällöin kokeillaan derivaatan merkkiä kun $x > 1$, vaikka arvolla $x=2$:

$2 \cdot (1 + 2 \cdot \ln(2)) \blacktriangleright 4.772588722 > 0$

Siten funktion on aidosti kasvava välillä $[1, e]$ ja Derivaatan merkkitesti, jolla todetaan kasvavuus (1 p.)

suurin arvo on $f(e) = e^2$ ja Suurin arvo (1 p.)

pienin arvo on $f(1) = 0$ Pienin arvo (1 p.)

b)

Funktio g(x) on määritelty kun sisäfunktio $2-x-x^2\geq 0$

Lasketaan nollakohdat:

$x=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot(-1(\cdot 2))}}{-2}=\frac{1\pm 3}{-2}$ eli x=−2 tai x=1

Sisäfunktio on toisen asteen polynomifunktio joka aukeaa alaspäin joten funktio on epänegatiivinen nollakohtien välissä. Määrittelyjoukko on siten [−2, 1].

Sisäfunktion määrittelyjoukko
Oikein (1 p.)

Neliöjuurifunktio on aidosti kasvava funktio joten se saa suurimman arvonsa samassa kohdassa kuin sisäfunktio saa suurimman arvon.

Tutkinut sisäfunktion suurinta ja pienintä arvoa (1 p.)

Sisäfunktio saa suurimman arvon paraabelin huipussa. Etsitään huippukohta derivoimalla:

$1-2x=0$ antaa juuren $x=-\frac{1}{2}$

Derivoinut oikein (1 p.)
Laskenut derivaatan nollakohdan oikein (1 p.)

Koska funktio on jatkuva suljetulla välillä se saa suurimman ja pienimmän arvonsa joko derivaatan nollakohdassa tai välin päätepisteessä.

$\sqrt{2--2-(-2)^2} \blacktriangleright 0$

$\sqrt{2-1-1^2} \blacktriangleright 0$

$\sqrt{2-\frac{-1}{2}-\left(\frac{-1}{2}\right)^2} \blacktriangleright \frac{3}{2}$

Vastaus: Funktion pienin arvo on 0 ja suurin arvo on $\frac{3}{2}$.

Pienin arvo (1 p.)
Suurin arvo (1 p.)

4. Tekstitehtävä 12 p.

A1

Ratkaise rationaaliepäyhtälö $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \geq 1.$

Ratkaisu:
Selvitetään aluksi nimittäjän nollakohdat:

$x = -2 \quad tai \quad x = 2$ tämä tarkoittaa, että $Mf : x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

Kaikki termit siirretään samalle puolelle, jotta voidaan tutkia, milloin rationaalilauseke on suurempi tai yhtäsuuri kuin nolla.

$$\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \geq 1 \ \mid -1$$

On selvitetty epäyhtälön määrittelyjoukko (2 p.)

lavennetaan samannimisiksi :

$$x\text{+2)}\frac{1}{x-2} - x\text{-2)}\frac{1}{x+2} - (x\text{+2)(x-2))}\ \frac{1}{1} \geq 0$$

Kaikki termit on viety samalle puolelle (2 p.)

$$\frac{x+2}{(x-2)(x+2)} - \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} - \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2)} \geq 0$$

Termit on lavennettu samannimisiksi (2 p.)

viedään samalle viivalle

$$\frac{x+2-(x-2)}{(x-2)(x+2)} - \frac{x^2-4}{(x-2)(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{x+2-x+2-(x^2-4)}{(x-2)(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{4-x^2+4}{(x-2)(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{-x^2+8}{(x-2)(x+2)} \geq 0$$

Selvitetään osoittajan nollakohdat ja jaetaan se tekijöihin:

$$-x^2+8=0 \ \mid -8$$

$$-x^2=-8 \quad \mid : (-1)$$

$$x^2=8 \quad \mid \sqrt{}$$

$$x = \pm 2\sqrt{2}$$

$$\frac{8-x^2}{(x-2)(x+2)} \geq 0$$

Käytetään summan ja erotuksen kaavaa $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$$\frac{(2\sqrt{2}-x)(2\sqrt{2}+x)}{(x-2)(x+2)} \geq 0$$

On esitetty ey. tekijöiden osamääränä tai muodossa (8-x^2)/(x^2-4) (2 p.)

On muodostettu merkkikaavio (1 p.)

		$-2\sqrt{2}$		-2		2		$2\sqrt{2}$	
$2\sqrt{2}-x$	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$-$
$2\sqrt{2}+x$	$-$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$
$x-2$	$-$	|	$-$	|	$-$	|	$+$	|	$+$
$x+2$	$-$	|	$-$	|	$+$	|	$+$	|	$+$
$osamäärä$	$-$	$-2\sqrt{2}$	$+$	-2	$-$	2	$+$	$2\sqrt{2}$	$-$

On saatu tulos merkkikaaviosta (1 p.)

On päätelty ratkaisu (2 p.)

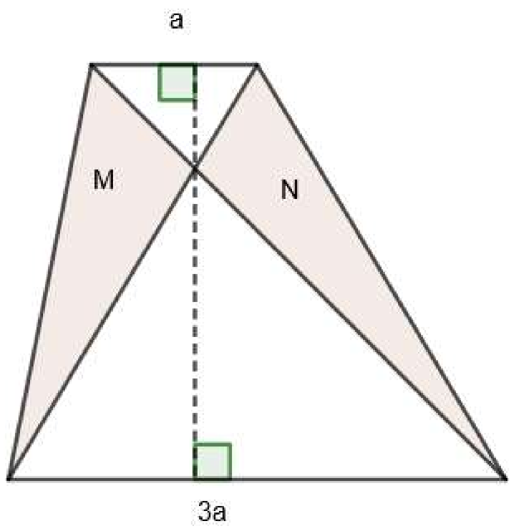
Vastaus: Kun otetaan määrittelyjoukko $Mf: x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ huomioon, niin:

Ei ole otettu huomioon Mf (maks. 9 p.)

$$-2\sqrt{2} \leq x < -2 \quad tai \quad 2 < x \leq 2\sqrt{2}$$

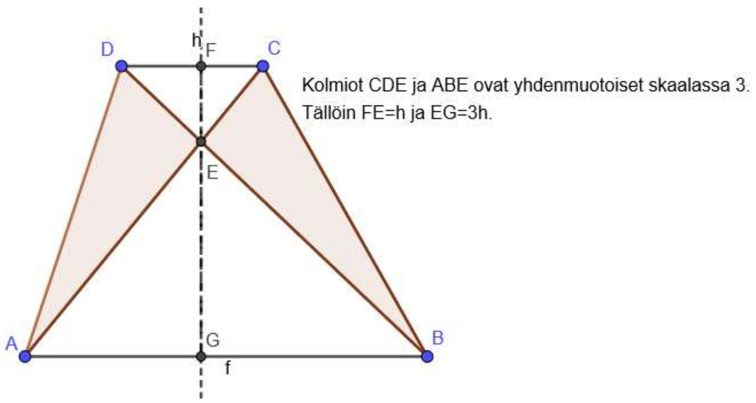
5. Tekstitehtävä 12 p.

B1



Olkoon pienemmän kuvassa näkyvän valkoisen kolmion piirretty korkeus h. Kuinka monta prosenttia kuvan kolmioiden M ja N pinta-alojen summa on puolisuunnikkaan pinta-alasta? Perustele matemaattisesti.

Ratkaisu:



Kolmioiden CDE ja ABE yhdenmuotoisuus (2 p.)

Yhdenmuotoisuusskaala 3 oikein (1 p.)

FE ja EG oikein (1 p. + 1 p. = 2 p.)

Kolmioiden EDC ja EAB pinta-alojen summa on

$$\frac{1}{2}\cdot a\cdot h+\frac{1}{2}\cdot 3a\cdot 3h=5ah$$

Kolmioiden pinta-alojen summa (2 p.)

Puolisuunnikkaan pinta-ala on $\frac{a+3a}{2}4h=8ah$.

Puolisuunnikkaan pinta-ala (2 p.)

Kolmioiden M ja N yhteenlaskettu pinta-ala on siten 3ah.

Kolmioiden yhteenlaskettu pinta-ala (1 p.)

$$\frac{3ah}{8ah}\cdot 100\ \%=37{,}5\ \%$$

Oikea suhde laskettu (1 p.)

Vastaus: 37,5 %

Vastaus (1 p.)

6. Tekstitehtävä 12 p.

B1

Tutki CAS-laskimen avulla: Millä parametrin c arvolla suoran $y = x + c$ ja funktion $f(x) = x^2 + 2x - 2$ leikkauspisteiden etäisyys on $5\sqrt{2}$? Mitkä ovat nämä leikkauspisteet?

Ratkaisu:

Define $f(x)=x^2+2\cdot x-2$	*Valmis*
Define $g(x)=x+c$	*Valmis*
$\text{solve}(f(x)=g(x),x)$	$x=\frac{-(\sqrt{4\cdot c+9}+1)}{2}$ or $x=\frac{\sqrt{4\cdot c+9}-1}{2}$
$\text{solve}\left(\sqrt{\left(\frac{-(\sqrt{4\cdot c+9}+1)}{2}-\frac{\sqrt{4\cdot c+9}-1}{2}\right)^2+\left(g\left(\frac{\sqrt{4\cdot c+9}-1}{2}\right)-g\left(\frac{-(\sqrt{4\cdot c+9}+1)}{2}\right)\right)^2}=5\cdot\sqrt{2},c\right)$	$c=4$

On muodostettu yhtälö etäisyyden laskemiseen (4 p.)

Define $g(x)=x+4$	*Valmis*
$\text{solve}(f(x)=g(x),x)$	$x=-3$ or $x=2$
$g(-3)$	1
$g(2)$	6

On saatu määritettyä vakio c (4 p.)

On saatu määritettyä leikkauspisteiden x-koord. (2 p.)

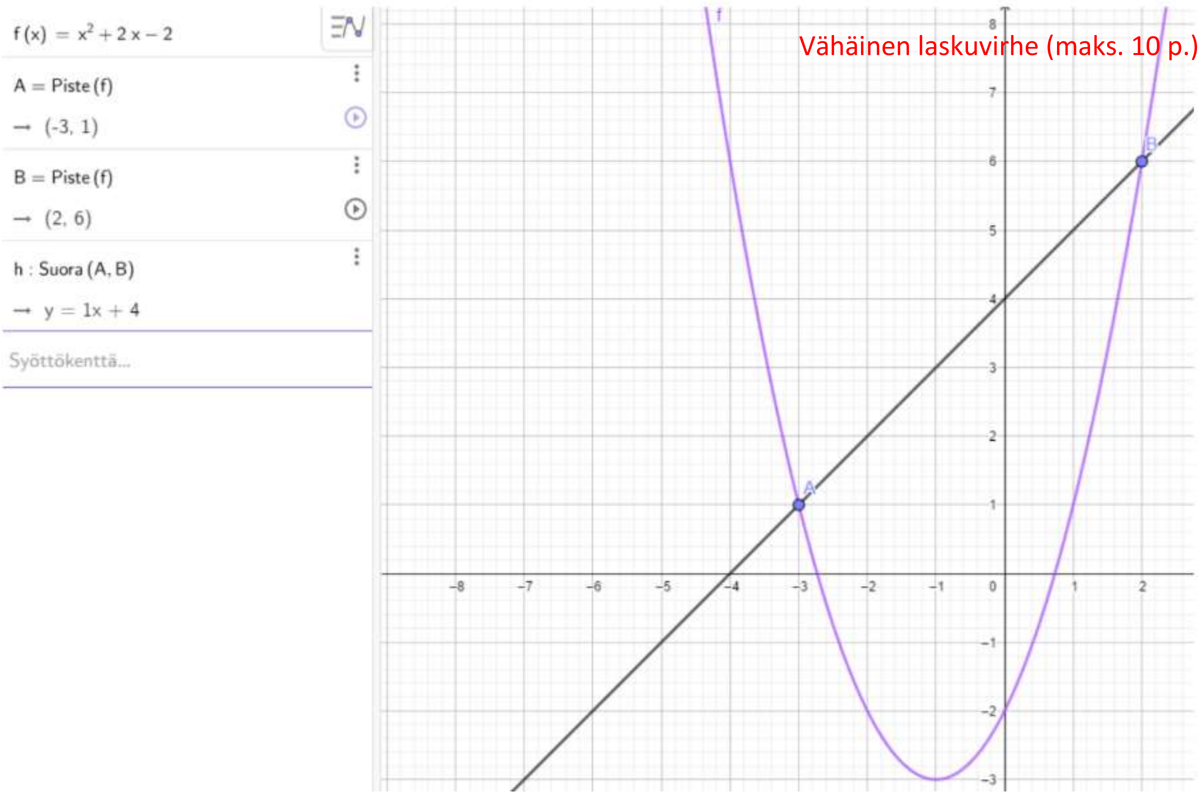
Vastaus:

Leikkauspisteiden etäisyys on $5\sqrt{2}$, kun $c = 4$ ja nämä leikkauspisteet ovat $(-3, 1)$ ja $(2, 6)$.

On saatu määritettyä leikkauspisteiden y-koord. (2 p.)

Vähäinen laskuvirhe (maks. 10 p.)

Kuva:



7. Tekstitehtävä 12 p.

B1

Logistisella funktiolla voi mallintaa muun muassa epidemian leviämistä. Aluksi epidemiaan sairastuvien määrä kasvaa eksponentiaalisesti, mutta alun jälkeen kasvu hidastuu.

Oletetaan, että 100 000 asukkaan kaupungissa epidemiaan sairastuvien lukumäärää voidaan mallintaa logistisella funktiolla

$$N(t) = \frac{A}{1 + Be^{-Kt}},$$

jossa aikaa t mitataan kuukausina epidemian puhkeamisen havaitsemisesta ja A, B ja K ovat mallin parametrit. Epidemian puhjetessa havaittiin 250 sairastunutta, kun kuukauden päästä sairastuneita oli 1250. Lopulta, hyvin pitkän ajan kuluttua epidemian alusta epidemiaan sairastuneita oli 10 % kaupungin asukkaista.

a) Määrää logistisen mallin parametrien A, B ja K arvot.

b) Kuinka pitkän ajan kuluttua epidemian puhkeamisen havaitsemisesta sairastuneiden määrä kasvoi nopeiten?

Ratkaisu:

a) Alussa sairastuneita oli 250 ja kuukaudauden päästä 1250 eli $N(0)=250$, $N(1)=1250$. Hyvin pitkän ajan kuluttua eli ajan kasvaessa rajatta sairastuneita oli 10 % kaupungin asukkaista eli

$\lim_{t\to\infty} N(t)=10\,000.$ Saadaan yhtälöryhmä

Alkuehdot (3 p.)

$$\begin{cases} N(0)=250 \\ N(1)=1250 \\ \lim_{t\to\infty} N(t)=10\,000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{A}{1+B}=250 \\ \dfrac{A}{1+Be^{-K}}=1250 \\ A=10\,000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=10\,000 \\ B=39 \\ K=\ln\dfrac{39}{7}. \end{cases}$$

Alkuehdoista muodostuvan yhtälöryhmän ratkaisu (3 p.)

b) Sairastuneiden määrän muutosnopeus on

Muutosnopeuden määrääminen (1 p.)

$$v(t)=N'(t)=ABK\frac{e^{-Kt}}{\left(1+Be^{-Kt}\right)^2}.$$

Ajanhetkenä, jona sairastuneiden määrän muutosnopeus saa suurimman arvonsa, sairastuneiden määrä kasvoi nopeiten.

Muutosnopeuden suurimman arvon laskemisen Ymmärtäminen (1 p.)

Tutkitaan sairastuneiden määrän muutosnopeuden käytöstä derivaatan avulla.

$$v'(t)=N''(t)=-ABK^2\frac{e^{-Kt}}{\left(1+Be^{-Kt}\right)^3}\left(1+Be^{-Kt}-2Be^{-Kt}\right)=-ABK^2\frac{e^{-Kt}}{\left(1+Be^{-Kt}\right)^3}\left(1-Be^{-Kt}\right).$$

Muutosnopeuden derivaatta (1 p.)

Lasketaan derivaatan nollakohdat

$$\begin{aligned} v'(t) &= 0 \\ -ABK^2\frac{e^{-Kt}}{\left(1+Be^{-Kt}\right)^3}\left(1-Be^{-Kt}\right) &= 0 \\ 1-Be^{-Kt} &= 0 \\ t &= \frac{\ln B}{K}=\frac{\ln 39}{\ln\frac{39}{7}}\approx 2{,}13. \end{aligned}$$

Muutosnopeuden derivaatan nollakohta (1 p.)

Kohdassa $t=\ln B/K$ on funktion $v(t)$ maksimi, sillä $v'(t)>0$, kun $t<\ln B/K$ ja $v'(t)>0$, kun $t>\ln B/K$.

Perustelu ääriarvolle (1 p.)

Sairastuneiden määrä kasvaa nopeiten 2,13 kuukauden päästä epidemian puhkeamisen havaitsemisesta.

Vastaus (1 p.)

8. Tekstitehtävä 12 p.

B1

Olkoon avaruudessa määritelty pallo $(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=4+t$ ja suora $\overline{OP}=2\bar{\mathrm{i}}+\bar{\mathrm{j}}+3\bar{\mathrm{k}}+s\left(\bar{\mathrm{i}}+\bar{\mathrm{j}}+\bar{\mathrm{k}}\right)$, missä $s,\ t\in\mathbb{R}$.

a) Millä vakion t arvolla pallo ja suora sivuavat toisiaan? (4 p.)

b) Mikä tämä sivuamispiste on a-kohdassa määritetyn t:n arvon mukaan? (4 p.)

c) Mitkä pisteet suoralla ovat etäisyydellä 2, b-kohdassa määritystä sivuamispisteestä? (4 p.)

Ratkaisu:
a) Merkitään suora parametrimuodossa:

$$\begin{cases} x=2+s \\ y=1+s \\ z=3+s \end{cases}$$

On merkitty suoran parametrimuoto (1 p.)

Jotta pallo olisi olemassa, niin $t>-4$.

Pallon olemassaolon toteaminen (1 p.)

Pallon keskipiste on $(1,\ 0,\ 1)$ ja säde $r=\sqrt{4+t}$

$$(2+s-1)^2+(1+s-0)^2+(3+s-1)^2=4+t$$

$$(s+1)^2+(s+1)^2+(s+2)^2=4+t$$

$$s^2+2s+1+s^2+2s+1+s^2+4s+4=4+t$$

$$3s^2+8s+2-t=0$$

Suora ja pallo sivuavat toisiaan, jos diskriminantti menee nollaksi.

Sivuaminen, kun D=0 (1 p.)

$$s=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot3\cdot(2-t)}}{2\cdot3}$$

Siis $64-24+12t=0$

On saatu määritettyä parametri t (1 p.)

$$12t=-40$$

$$t=-\frac{40}{12}=-\frac{10}{3}=-3\frac{1}{3}$$

Vastaus: Pallo ja suora sivuavat toisiaan, kun $t=-\frac{10}{3}$.

b) kun $t = -\frac{10}{3}$, niin sivuamispiste on:

$$s = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 3 \cdot \left(2 - \left(-\frac{10}{3}\right)\right)}}{2 \cdot 3} = \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 3} = -\frac{4}{3}$$

On saatu määritettyä parametri s (1 p.)

On laskettu sivuamispiste (3 p.)

$$\begin{cases} x = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \\ y = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3} \\ z = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3} \end{cases}$$

Vastaus: Pallon ja suoran sivuamispiste on $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$

c) Suuntavektorin $\bar{s} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$ pituus on $|\bar{s}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

ja sen yksikkövektori on $\bar{s}^{\circ} = \frac{\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}}{\sqrt{3}}$

Kysytyt pisteet saadaan:

Järkevä idea etäisyyden laskemiseksi (2 p.)

$$\overline{OP} = \frac{2}{3}\bar{i} - \frac{1}{3}\bar{j} + \frac{5}{3}\bar{k} \pm 2 \cdot \frac{\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}}{\sqrt{3}}$$

1) $\overline{OP} = \frac{2}{3}\bar{i} - \frac{1}{3}\bar{j} + \frac{5}{3}\bar{k} + 2 \cdot \frac{\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}}{\sqrt{3}} = \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\bar{i} + \left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\bar{j} + \left(\frac{5}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\bar{k}$

Piste on tällöin: $\left(\frac{2 + 2\sqrt{3}}{3}, \frac{-1 + 2\sqrt{3}}{3}, \frac{5 + 2\sqrt{3}}{3}\right)$

On laskettu piste A (1 p.)

tai

2) $\overline{OP} = \frac{2}{3}\bar{i} - \frac{1}{3}\bar{j} + \frac{5}{3}\bar{k} - 2 \cdot \frac{\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}}{\sqrt{3}} = \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\bar{i} + \left(-\frac{1}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\bar{j} + \left(\frac{5}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\bar{k}$

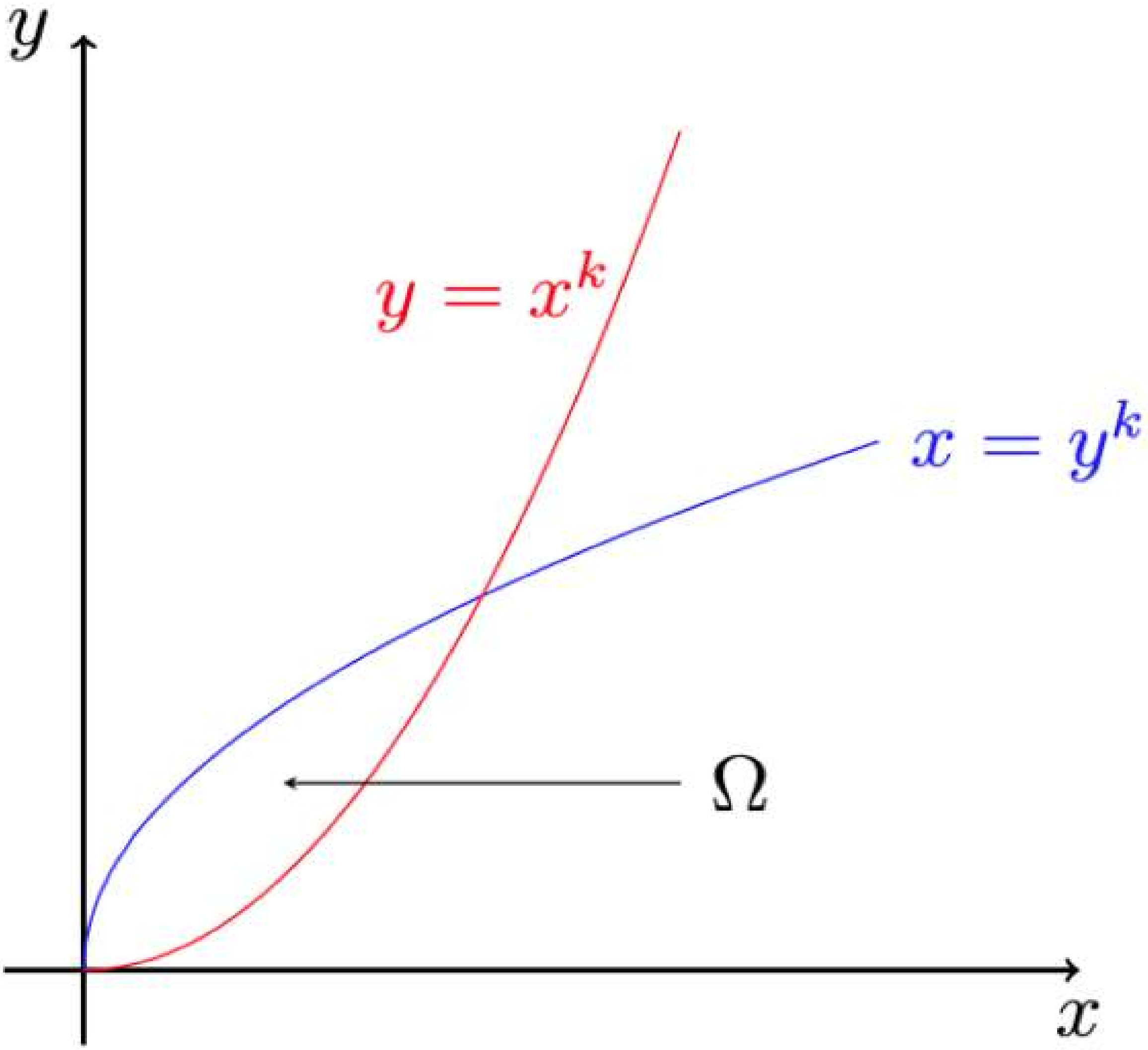
Piste on tällöin: $\left(\frac{2 - 2\sqrt{3}}{3}, \frac{-1 - 2\sqrt{3}}{3}, \frac{5 - 2\sqrt{3}}{3}\right)$

On laskettu piste B (1 p.)

Vastaus: Pisteet ovat $\left(\frac{2 + 2\sqrt{3}}{3}, \frac{-1 + 2\sqrt{3}}{3}, \frac{5 + 2\sqrt{3}}{3}\right)$ tai $\left(\frac{2 - 2\sqrt{3}}{3}, \frac{-1 - 2\sqrt{3}}{3}, \frac{5 - 2\sqrt{3}}{3}\right)$.

9. Kahden käyrän rajaama tasoalue 12 p.

Käyrät $x = y^k$ ja $y = x^k, k > 1$, rajaavat tason ensimmäisessä neljänneksessä tasoalueen Ω.



1. Esitä tasoalue Ω kahden käyrän $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ rajaamana alueena välillä $[a, b]$ eli muodossa

$$\Omega = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}.$$

   Määrää tasoalueen Ω pinta-ala $A(\Omega)$. 4 p.

2. Tasoalueen matemaattinen keskipiste eli keskiö on piste, joka kuvaa tasoalueen keskimääräistä sijaintia. Symmetrian nojalla tasoalueen Ω keskiön $(\overline{x}, \overline{y})$ koordinaateille pätee $\overline{x} = \overline{y}$.

   Määritä tasoalueen Ω keskiön koordinaatit, kun keskiön x-koordinaatille pätee

$$\overline{x} = \frac{1}{A(\Omega)} \int_a^b x h(x)\, dx,$$

   jossa $h(x)$ on alueen Ω korkeus kohdassa x. 4 p.

3. Mitä pistettä keskiö lähenee, kun k kasvaa rajatta? 4 p.

Ratkaisu:

a) Ratkaistaan integroimisrajat käyrien yhtälöistä $x=y^k$ ja $y=x^k$, josta saadaan

$$\begin{aligned} x &= (x^k)^k \\ x &= x^{k^2} \\ x-x^{k^2} &= 0 \\ x(1-x^{k^2-1}) &= 0, \end{aligned}$$

josta tulon nollasäännöllä saadaan $x=0$ tai

$1-x^{k^2-1}=0$, josta $x=1$, koska $x\geq 0$.

Integroimisrajat (1 p.)

Käyrän $x=y^k$ yhtälöstä saadaan $y=\sqrt[k]{x}$, sillä tason ensimmäisessä neljänneksessä koordinaatit ovat epänegatiivisia. Jos $0\leq x\leq 1$, niin $x^k\leq\sqrt[k]{x}$, kun $k>1$.

Käyrien järjestys (1 p.)

Tasoalue voidaan esittää muodossa

$$\Omega=\{(x,y):0\leq x\leq 1,\ x^k\leq y<\sqrt[k]{x}\}.$$

Tasoalue käyrien y=f(x) ja y=g(x) väliin jäävänä alueena välillä [0, 1] (1 p.)

Tasoalueen pinta-ala on

$$A(\Omega)=\int_0^1 (\sqrt[k]{x}-x^k)\,dx=\int_0^1\left(x^{\frac{1}{k}}-x^k\right)dx=\Big/_0^1\left(\frac{x^{\frac{1}{k}+1}}{\frac{1}{k}+1}-\frac{x^{k+1}}{k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{k}+1}-\frac{1}{k+1}=\frac{k-1}{k+1}.$$

Pinta-ala (1 p.)
Jos pinta-ala oikein laskettu, mutta tasoaluetta ei esitetty pyydetyssä muodossa maks. (3 p.)

b) Keskiön x-koordinaattia varten lasketaan integraali

$$\int_0^1 xh(x)\,dx=\int_0^1 x\left(\sqrt[k]{x}-x^k\right)dx=\int_0^1 x\left(x^{\frac{1}{k}}-x^k\right)dx$$

Korkeus h käyrien erotuksena (1 p.)

$$=\int_0^1\left(x^{\frac{1}{k}+1}-x^{k+1}\right)dx=\Big/_0^1\left(\frac{x^{\frac{1}{k}+2}}{\frac{1}{k}+2}-\frac{x^{k+2}}{k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{k}+2}-\frac{1}{k+2}=\frac{k-\frac{1}{k}}{\left(\frac{1}{k}+2\right)(k+2)}=\frac{k^2-1}{(2k+1)(k+2)}.$$

Integroitu xh(x) välillä [0, 1] oikein (2 p.)

Keskiön x- ja y-koordinaatit ovat

$$\bar{x}=\bar{y}=\frac{1}{A(\Omega)}\int_0^1 xh(x)\,dx=\frac{k+1}{k-1}\cdot\frac{k^2-1}{(2k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k-1}\cdot\frac{(k-1)(k+1)}{(2k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(k+2)}.$$

Lauseke keskiölle (1 p.)

c) Tarkastellaan keskiön käyttäytymistä, kun k kasvaa rajatta

$$\lim_{k\to\infty}\bar{x}=\lim_{k\to\infty}\bar{y}=\lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(k+2)}=\lim_{k\to\infty}\frac{k^2+2k+1}{2k^2+5k+2}=\lim_{k\to\infty}\frac{1+\frac{2}{k}+\frac{1}{k^2}}{2+\frac{5}{k}+\frac{2}{k^2}}=\frac{1}{2}.$$ Raja-arvon lasku (3 p.)

Keskiö lähenee pistettä $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, kun k kasvaa rajatta. Vastaus (1 p.)

10. Tekstitehtävä 12 p.

B2

Erään tutkimuksen mukaan 12 ihmisen joukossa 4 käytti liian pieniä kenkiä todennäköisyydellä $0,17$. Millä todennäköisyydellä 50 opiskelijan ryhmässä korkeintaan 30 $\%$ käyttää liian pieniä kenkiä?

Kuvan lähde: PIXABAY (CC0)

Binomitn. käyttäminen (2 p.)

Ratkaisu:

Nyt $X \sim Bin\,(12,\, p)$

n=12, k=4 p=? $p_6 = 0{,}17$

Binomitn. $p_k = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ $\quad P\,(X=4) = \binom{12}{4} p^4 (1-p)^8 = 0{,}17$

On laskettu eri p:n arvot (4 p.)

$$\text{solve}\left(\text{nCr}(12,4)\cdot p^4\cdot(1-p)^8=0.17, p\right) \qquad p=-0.110407 \text{ or } p=0.229022 \text{ or } p=0.449962 \text{ or } p=1.32102$$

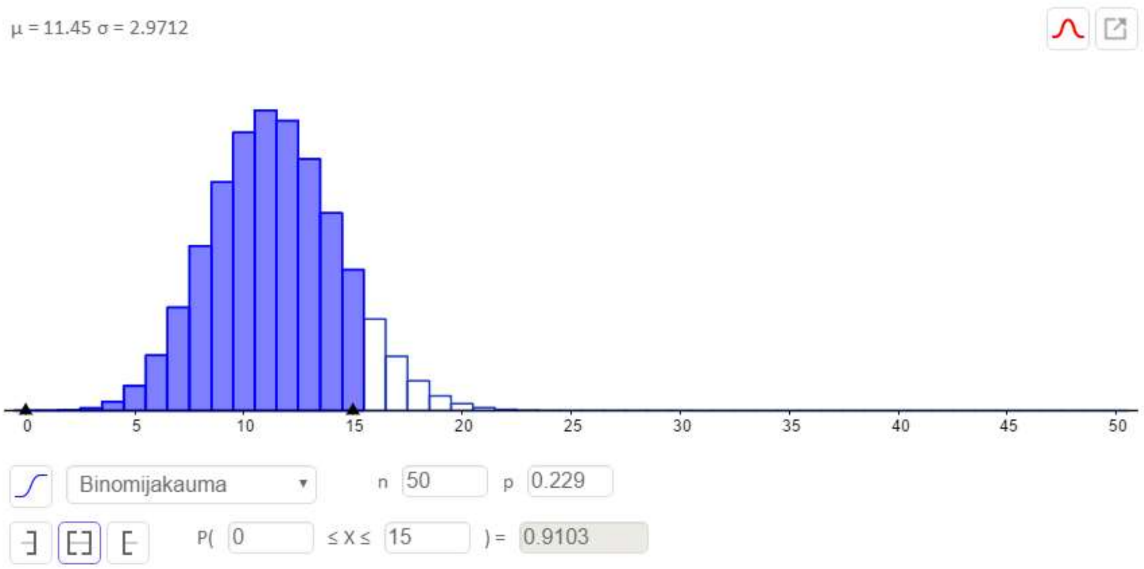
Koska $0 \le p \le 1$, niin $p \approx 0{,}229$ tai $p \approx 0{,}450$

Korkeintaan 30 % 50 opiskelijan joukossa tarkoittaa, että korkeintaan 15 opiskelijaa käyttää liian pieniä kenkiä.

Tutkitaan GeoGebran todennäköisyyslaskurilla $P\,(0 \le X \le 15)$

On laskettu diskreetistä jakaumasta kertynyt todennäköisyys (3 p.)

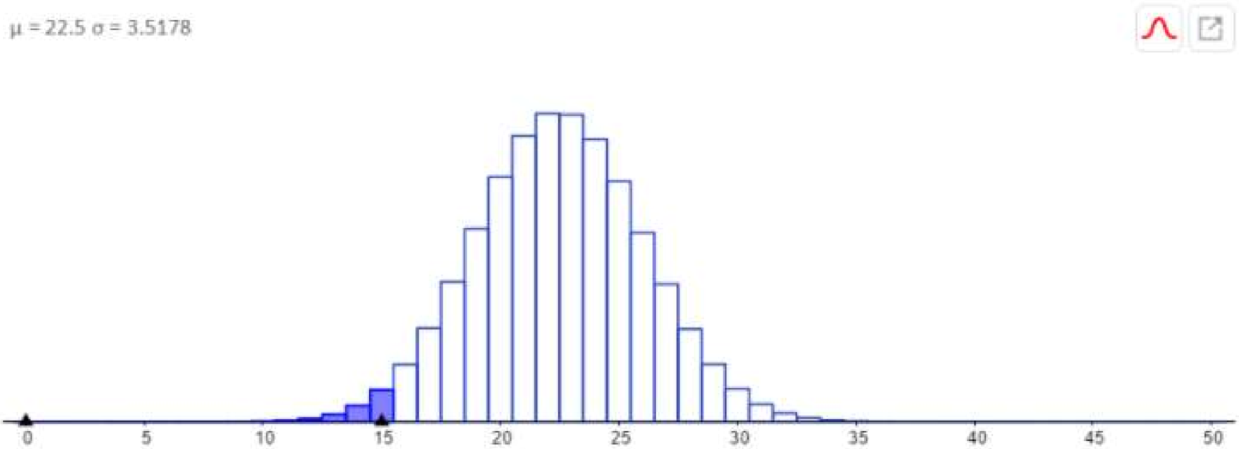
a) Jos $p \approx 0{,}229$, niin



k	P(X = k)
0	0
1	0
2	0.0002
3	0.0012
4	0.004
5	0.011
6	0.0246
7	0.0459
8	0.0733
9	0.1015
10	0.1237
11	0.1336
12	0.1289
13	0.1119
14	0.0879
15	0.0626
16	0.0407
17	0.0242
18	0.0132

b) Jos $p \approx 0{,}450$, niin

μ = 22.5 σ = 3.5178



k	P(X = k)
0	0
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0
7	0
8	0
9	0
10	0.0001
11	0.0004
12	0.0011
13	0.0027
14	0.0059
15	0.0116
16	0.0207
17	0.0339
18	0.0508
19	0.07

Binomijakauma n 50 p 0.45

P(0 ≤ X ≤ 15) = 0.022

On laskettu diskreetistä jakaumasta toinen kertynyt todennäköisyys (3 p.)

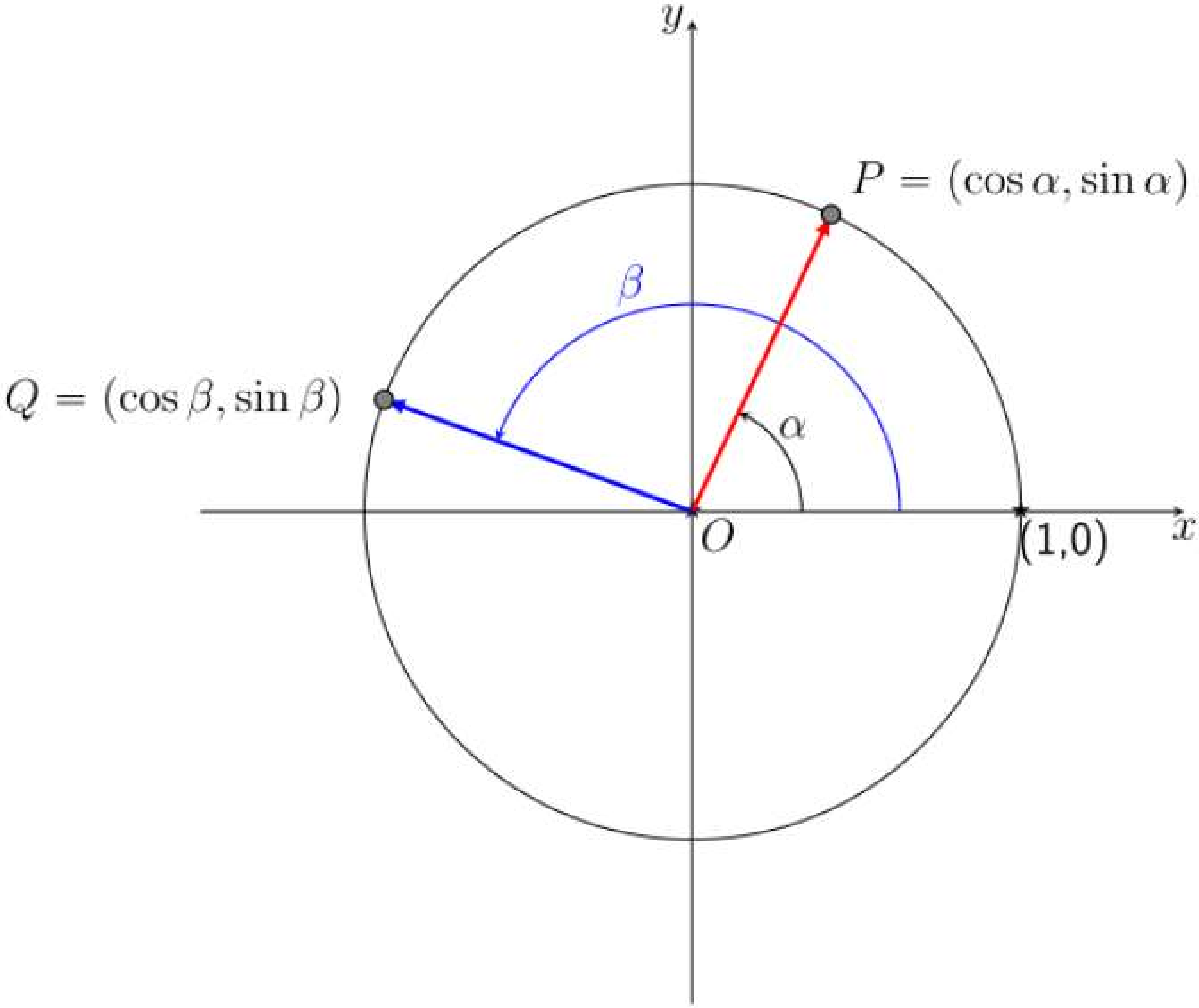
Vähäinen laskuvirhe maks. (9 p.)

Vastaus: Korkeintaan 30 % käyttää liian pieniä kenkiä 50 opiskelijan ryhmässä todennäköisyys on 91,0 % tai 2,2 %.

11. Tekstitehtävä 12 p.

B2

Origokeskisessä yksikköympyrässä on kaksi kehäpistettä P ja Q.



a) Määritä pisteiden P ja Q paikkavektorit kulmien α ja β avulla. (2 p.)
b) Esitä lauseke $\cos(\beta - \alpha)$ sellaisessa muodossa, jossa esiintyy vain termejä $\sin\alpha, \cos\alpha, \sin\beta$ ja $\cos\beta$. (6 p.)
c) Käytä apunasi b-kohdassa johtamaasi lauseketta ja määrää $\sin(\beta - \alpha)$. (4 p.)

Ratkaisu:

a) Pisteiden P ja Q paikkavektorit ovat

$$\overline{OP}=\cos\alpha\,\overline{i}+\sin\alpha\,\overline{j},\quad \overline{OQ}=\cos\beta\,\overline{i}+\sin\beta\,\overline{j}.$$

Paikkavektorit (2 p.)

b) Lasketaan paikkavektorien pistetulo

$$\overline{OP}\cdot\overline{OQ}=(\cos\alpha\,\overline{i}+\sin\alpha\,\overline{j})\cdot(\cos\beta\,\overline{i}+\sin\beta\,\overline{j})=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

Kummankin paikkavektorin pituus on 1, $|\overline{OP}|=|\overline{OQ}|=1.$

Pistetulon laskeminen (2 p.)
Vektorien pituudet = 1 (1 p.)

Pistetulon geometrisen tulkinnan

$$\overline{OP}\cdot\overline{OQ}=|\overline{OP}||\overline{OQ}|\cos\sphericalangle(\overline{OP},\overline{OQ})$$

Pistetulon geometrinen tulkinta (1 p.)

mukaan paikkavektorien välisen kulman kosinille pätee

$$\cos\sphericalangle(\overline{OP},\overline{OQ})=\overline{OP}\cdot\overline{OQ}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

Paikkavektorien välinen kulma $\sphericalangle(\overline{OP},\overline{OQ})=\beta-\alpha,$ joten saadaan

$$\cos(\beta-\alpha)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

Paikkavektorien välinen kulma (1 p.)
Lauseke kosinille (1 p.)

c) Komplementtikulman kosini on yhtä suuri kuin kulman sini, samoin komplementtikulman sini on yhtä suuri kuin kulman kosini sekä sinille ja kosinille pätee $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ ja $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha.$ Näin ollen

$$\begin{aligned}\sin(\beta-\alpha)&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\beta-\alpha)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta-(-\alpha)\right)\\&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\cos(-\alpha)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\sin(-\alpha)\\&=\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta.\end{aligned}$$

Sini on komplementtikulman kosini (1 p.)
b-kohdan kaavaa käytetty niin, että saatu komplementti- ja vastakulmamuodot (2 p.)

Lopputulos oikein (1 p.)

12. Tekstitehtävä 12 p.

B2

a) Onko lause $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ tautologia? Perustele.

b) Kaksi ammattiyhdistyshenkilöä keskustelee palkankorotuksesta. Henkilö A väittää "Tulee palkankorotus ja ei lakkoa." ja henkilö B väittää " Ei pidä paikkaansa että jos tulee palkankorotus, niin tulee lakko." Ovatko A ja B yksimielisiä? Perustele.

Ratkaisu:

a) Tehdään totuustaulu jossa

$$Vas = p \vee (q \wedge r)$$

$$Oik = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$Ekv \;=\; p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

Totuustaulu voidaan tehdä vaikkapa sivustolla matikkaeditori.fi

p	q	r	$q \wedge r$		$p \wedge q$	$p \wedge r$		
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

Totuustaulu tehty oikein (4 p.)

Lause ei ole tautologia koska se ei ole tosi lauseiden p, q ja r kaikilla totuusarvoilla.

Vastaus: Lause ei ole tautologia.

Vastaus tulkittu taulusta oikein (2 p.)

b) Olkoon p lause ”Tulee palkankorotus” ja q lause ”Tulee lakko”

Lauseet p ja q oikein (1 p. + 1 p. = 2 p.)

$$A: \;\; p \wedge \neg q \quad ja \quad B: \;\; \neg(p \Rightarrow q)$$

Väitöslauseet A ja B oikein (1 p. + 1 p. = 2 p.)

p	q	$\neg q$	A	$p \Rightarrow q$	B
1	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0

Totuustaulu oikein (1 p.)

Sarakkeet A ja B ovat samoja joka rivillä.

Vastaus: A ja B ovat yksimielisiä.

Vastaus tulkittu taulusta oikein (1 p.)

13. Tekstitehtävä 6 p.

B2

Satunnaismuuttuja T noudattaa eksponenttijakaumaa parametrinaan $\lambda > 0$, jota merkitään $T \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Tällöin satunnaismuuttujan T tiheysfunktio on

$$f(t) = \begin{cases} 0, \text{ jos } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t}, \text{ jos } t \geq 0. \end{cases}$$

a) Määritä satunnaismuuttujan T kertymäfunktion $F(t)$ lauseke. (3 p.)
b) Määrää tapahtuman $A = \{T > s\}$ todennäköisyys, kun s on positiivinen reaaliluku. (3 p.)
c) Määrää tapahtuman $B = \{T > s + r\}$ ehdollinen todennäköisyys, kun ehtotapahtumana on $A = \{T > s\}$. Mitä huomaat? Molemmat luvut s ja r ovat positiivisia reaalilukuja. (6 p.)

Ratkaisu:

a) Jos $t<0$, niin kertymäfunktio on

$$F(t)=P(T\leq t)=\int_{-\infty}^{t} f(s)\,ds=\int_{-\infty}^{t} 0\,ds=0.$$

Kertymäfunktion lauseke, kun t<0 (1 p.)

Jos $t\geq 0$, niin kertymäfunktio on

$$F(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)\,ds = \int_{-\infty}^{0} f(s)\,ds + \int_{0}^{t} f(s)\,ds$$

$$= \int_{0}^{t} f(s)\,ds = \int_{0}^{t} \lambda e^{-\lambda s}\,ds = \Big/_{0}^{t} - e^{-\lambda s} = -e^{-\lambda t} - \left(-e^{0}\right) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Satunnaismuuttujan T kertymäfunktio on

$$F(t)=\begin{cases} 0, & \text{kun } t<0 \\ 1-e^{-\lambda t} & \text{kun } t\geq 0. \end{cases}$$

Kertymäfunktion lauseke, kun t≥0 (2 p.)

b) Vastatapahtuman todennäköisyyden perusteella

Vastatapahtuman käyttö (1 p.)

$$P(T>s)=P(A)=1-P(\bar{A})=1-P(T\leq s)=1-F(s)=1-(1-e^{-\lambda s})=e^{-\lambda s},\quad s>0.$$

Oikea vastaus (2 p.)
Voi olla myös tiheysfunktion integraali välillä]s, ∞[.

c) Tapahtumalle ”B ja A” pätee

$$P(B \text{ ja } A)=P(T>s+r \text{ ja } T>s)=P(T>s+r)=P(B)=e^{-\lambda(s+r)}.$$

Tapahtuma ”B ja A” ymmärretty oikein (2 p.)

Ehdollisen todennäköisyydeksi saadaan

$$P(B|A)=\frac{P(B \text{ ja } A)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{P(T>s+r)}{P(T>s)}=\frac{e^{-\lambda(s+r)}}{e^{-\lambda s}}=e^{-\lambda r},\quad s,r>0.$$

Ehdollinen todennäköisyys (1 p.)
Saatu oikea vastaus (1 p.)

Havaitaan, että ehdollinen todennäköisyys on yhtä suuri kuin tapahtuman $\{T>r\}$ todennäköisyys

$$P(B|A)=P(T>r)=e^{-\lambda r}.$$

Huomattu ehd. todennäköisyys samaksi kuin tapahtuman {T>r} (2 p.)