FI – Matematiikka, pitkä oppimäärä, preliminäärikoe, Malliratkaisut

TEHTÄVÄ 1

1.1.

$$\begin{aligned}
\frac{x}{5} &= \frac{x+1}{3} - \frac{1}{60} \\
\frac{12x}{60} &= \frac{20(x+1)}{60} - \frac{1}{60} && \textbf{1 p} \\
12x &= 20(x+1) - 1 && \textbf{1 p} \\
12x &= 20 \cdot x + 20 \cdot 1 - 1 \\
12x - 20x &= 20 - 1 \\
-8x &= 19 && \textbf{2 p} \\
x &= \frac{-19}{8}
\end{aligned}$$

1.2.

Tutkitaan erikseen ratkaisut $-2x + 4 = 2$ja $-2x + 4 = -2$
1 p **1 p**

$$\begin{aligned}
-2x + 4 &= 2 & \quad -2x + 4 &= -2 \\
-2x &= -2 \text{ ja} & -2x &= -6 \\
x &= 1 & x &= 3
\end{aligned}$$

1 p **1 p**

1.3.
Määritetään aluksi funktion derivaatta.

$f'(x) = 1 \cdot e^{x-1} - 1 = e^{x-1} - 1$ **2 p**

Merkitään derivaatan arvoksi nolla ja ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned}
e^{x-1} - 1 &= 0 \\
e^{x-1} &= 1 \\
x - 1 &= 0 && \textbf{2 p} \\
x &= 1
\end{aligned}$$

TEHTÄVÄ 2

2.1. Olkoon veroton hinta x euroa.

100 %+24 %=124 %=1,24 **1 p**

Saadaan yhtälö

1,24x=699 **1 p**

jonka ratkaisu on

$x = \frac{699}{1,24}$**1 p**

$x \approx 563{,}71$

Pesukoneen veroton hinta on 563 euroa ja 71 senttiä. **1 p**

2.2. 100 %-30 %=70 %

Liikkeen kulut sohvaryhmästä ovat

$0{,}70 \cdot 2500 = 1750$euroa. **2 p**

Jos haluttu 40% voiton tuova myyntihinta on x, niin

0,60x=1750, **1 p**

josta saadaan

$$x = \frac{1750}{0{,}60}$$

$x \approx 2916{,}67$

Sohvaryhmän hinnan tulee olle 2916 euroa ja 67 senttiä. **1 p**

2.3.

Olkoon vanhan mallin hinta a euroa.

Tällöin uuden mallin hinta on $(1 + \frac{k}{100})a$euroa. **1 p**

$$\frac{(1+\frac{k}{100})a-a}{(1+\frac{k}{100})a} = \frac{\frac{k}{100}a}{(1+\frac{k}{100})a} = \frac{\frac{k}{100}}{(1+\frac{k}{100})} = \frac{k}{100+k}$$

1 p **1 p**

(viimeisessä vaiheessa on lavennettu luvulla 100)

Vanha malli on $\frac{k}{100+k} \cdot 100$prosenttia halvempi kuin uusi malli. **1 p**

TEHTÄVÄ 3

MAA2 keskiarvo 7 mediaani 7	**MAA3** keskiarvo 7 mediaani 7	**MAA4** keskiarvo 8 mediaani 8 keskihajonta 0
MAA5 keskiarvo 7 mediaani 7 keskihajonta on 2	**MAA6** keskiarvo 7 mediaani 7	**MAA7** keskiarvo 8 mediaani 8 moodi 10
MAA8 keskiarvo 7 mediaani 7	**MAA9** keskiarvo 6.2 mediaani 6	**MAA10** keskiarvo 7,4 mediaani 8

3.1. Keskiarvo on 7 kursseilla MAA2 , MAA3 , MAA5, MAA6 ja MAA8. **2 p**

3.2. Mediaani on 7 kursseilla MAA2, MAA3, MAA5, MAA6 ja MAA8. **2 p**

3.3. Kurssin MAA7 moodi on 10. **2 p**

3.4. Kurssin MAA2 arvosanat noudattavat parhaiten normaalijakaumaa. **2 p**

3.5. MAA4 kurssin keskihajonta on 0. **2 p**

3.6. MAA5 kurssin keskihajonta on 2. **2 p**

TEHTÄVÄ 4

$$\frac{24}{x^2-25} \leqslant \frac{x-6}{5-x}$$

$\frac{24}{x^2-25} - \frac{x-6}{5-x} \leqslant 0$ **1 p**

Merkitään

$$f(x) = \frac{24}{x^2-25} - \frac{x-6}{5-x}$$

Ratkaistaan nimittäjien nollakohdat

$x^2 - 25 = 0$
$x^2 = 25$ **1 p**
$x = \pm 5$

$5 - x = 0$ **1 p**
$x = 5$

Funktion f määrittelyehto on $x \neq 5$ja $x \neq -5$.

Ratkaistaan funktion f nollakohdat.

$\frac{24}{x^2-25} - \frac{x-6}{5-x} = 0$
$\frac{24}{(x-5)(x+5)} - \frac{x-6}{-(x-5)} = 0$
$\frac{24}{(x-5)(x+5)} + \frac{x-6}{x-5} = 0$
$24 + (x+5)(x-6) = 0$ **1 p**
$x^2 - x - 6 = 0$
$x = \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1}$
$x = \frac{1\pm 5}{2}$

$x = -2$ tai $x = 3$ **1 p ja 1 p**

Ratkaisut toteuttavat määrittelyehdon.

Funktion f merkki voi vaihtua vain kohdissa $x = -5$,$x = -2$, $x = 3$ja $x = 5$. **1 p**

Lasketaan jokaiselta osaväliltä yksi funktion arvo.

```
f(x)=(24/(x^2-25))-((x-6)/(5-x))

f(-6)
= 3,2727272727272727

f(-3)
= -0,375
```

1 p

```
f(0)
= 0,24

f(4)
= -0,66666666666666667

f(6)
= 2,181818181818181818
```

1 p

Laaditaan merkkikaavio

		-5		-2		3		5	
f(x)	+		-		+		-		+

1 p

Vastaus: $-5 < x \leqslant -2$tai $3 \leqslant x < 5$. **1 p ja 1 p**

TEHTÄVÄ 5

Olkoon pisteen P paikkavektori $\overline{OP} = 2\bar{\imath} + 3\bar{\jmath} - 4\bar{k}$. ja suunnikkaan loput kärkipisteet P_2, P_3 ja P_4.

5.1.

Suunnikkaan muut kärkipisteet saadaan vektoreista $\overline{OP} + \bar{u}$, $\overline{OP} + \bar{v}$ ja $\overline{OP} + (\bar{u} + \bar{v})$. **1 p**

$\mathbf{op} := [2 \ \ 3 \ \ -4] \blacktriangleright [2 \ \ 3 \ \ -4]$

$\mathbf{u} := [2 \ \ -3 \ \ 1] \blacktriangleright [2 \ \ -3 \ \ 1]$

$\mathbf{v} := [-3 \ \ 3 \ \ 2] \blacktriangleright [-3 \ \ 3 \ \ 2]$

$\mathbf{op+u} \blacktriangleright [4 \ \ 0 \ \ -3]$

$\mathbf{op+v} \blacktriangleright [-1 \ \ 6 \ \ -2]$

$\mathbf{op+u+v} \blacktriangleright [1 \ \ 3 \ \ -1]$

Suunnikkaan loput kärkipisteet ovat (4,0,-3), (-1,6,-2) ja (1,3,-1)

1 p **1 p** **1 p**

5.2. Suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa. Lävistäjien leikkaupisteen paikkavektori saadaan tällöin vektorisummana $OP + \frac{1}{2}(u + v)$. **2 p**

$\mathbf{op} + \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{u+v}) \blacktriangleright \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 3 & \frac{-5}{2} \end{bmatrix}$

Lävistäjien leikkauspiste on siis $(\frac{3}{2}, 3, -\frac{5}{2})$ **2 p**

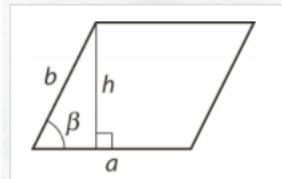
5.3.

Lasketaan pinta-ala oheisen kaavan avulla hyödyntämällä vektoreita $\bar{u}$ja $\bar{v}$ sekä niiden välistä kulmaa käyttäen vektorin pituudelle komentoa norm ja vektorien pistetulolle komentoa dotp. **2 p**

välinen kulma	$\cos(\bar{a},\bar{b}) = \dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\lvert\bar{a}\rvert\,\lvert\bar{b}\rvert}, \quad 0^\circ \leq \sphericalangle(\bar{a},\bar{b}) \leq 180^\circ$

$$\mathrm{norm}(\mathbf{u})\cdot\mathrm{norm}(\mathbf{v})\cdot\sin\left(\cos^{-1}\left(\frac{\mathrm{dotP}(\mathbf{u},\mathbf{v})}{\mathrm{norm}(\mathbf{u})\cdot\mathrm{norm}(\mathbf{v})}\right)\right) \blacktriangleright \sqrt{139}$$

1 p



$A = ah = ab\sin\beta$

Vastaus: Pinta-ala on $\sqrt{139}$. **1 p**

Käytetty radiaaneja: max 2 p

Laskussa ”supistettu” norm(u) ja norm(v) virheellisesti: max 2 p
Pinta-ala voidaan laskea myös ristitulolla

$$\mathrm{norm}(\mathrm{crossP}(\mathbf{u},\mathbf{v})) \blacktriangleright \sqrt{139}$$

Eräitä ratkaisun kannalta oleellisia lukuarvoja:

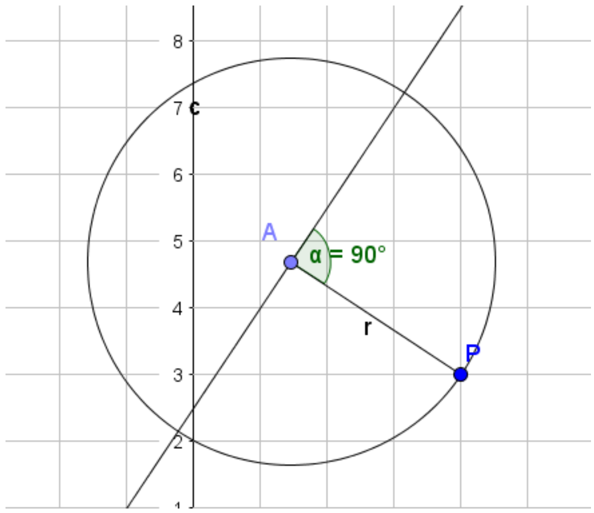
$$\mathrm{norm}(\mathbf{u}) \blacktriangleright \sqrt{14}$$
$$\mathrm{norm}(\mathbf{v}) \blacktriangleright \sqrt{22}$$
$$\mathrm{dotP}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \blacktriangleright -13$$
$$\mathrm{norm}(\mathbf{u})\cdot\mathrm{norm}(\mathbf{v}) \blacktriangleright 2\cdot\sqrt{77}$$

TEHTÄVÄ 6

6.1. Olkoon P=(4,3) ja A ympyrän keskipiste.

Ympyrän pinta-ala on mahdollisimman pieni, kun ympyrän säde on mahdollisimman pieni. **1 p**

Säde on mahdollisimman pieni, kun säde AP on kohtisuorassa suoraa 3x – 2y + 5 = 0 vastaan. **1 p**



solve$\left(3\cdot x-2\cdot y+5=0,y\right)$ ▸ $y=\frac{3\cdot x+5}{2}$

expand$\left(y=\frac{3\cdot x+5}{2}\right)$ ▸ $y=\frac{3\cdot x}{2}+\frac{5}{2}$

Suoran kulmakerroin on $\mathbf{k}:=\frac{3}{2}$ ja säteen AP kulmakerroin $\frac{-1}{\mathbf{k}}$ ▸ $\frac{-2}{3}$

Suoran AP yhtälö on $y-3=\frac{-2}{3}\cdot(x-4)$

1 p

solve$\left(y-3=\frac{-2}{3}\cdot(x-4),y\right)$ ▸ $y=\frac{17}{3}-\frac{2\cdot x}{3}$

1 p Ympyrän keskipiste A saadaan yhtälöparista

$$\text{solve}\left(\begin{cases} y=\frac{17}{3}-\frac{2\cdot x}{3} \\ 3\cdot x-2\cdot y+5=0 \end{cases},\{x,y\}\right) \blacktriangleright x=\frac{19}{13} \text{ and } y=\frac{61}{13}$$

1 p Ympyrän säde $\mathbf{r}:=\sqrt{\left(\frac{19}{13}-4\right)^2+\left(\frac{61}{13}-3\right)^2} \blacktriangleright \frac{11\cdot\sqrt{13}}{13}$

$$\mathbf{r}^2 \blacktriangleright \frac{121}{13}$$

1 p Ympyrän yhtälö on $\left(x-\frac{19}{13}\right)^2+\left(y-\frac{61}{13}\right)^2=\frac{121}{13}$

TAI

Ympyrän säde

$$\mathbf{f}(x):=\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}\,|y=\frac{3\cdot x}{2}+\frac{5}{2} \blacktriangleright \textit{Valmis}$$

$$\mathbf{f}(x) \blacktriangleright \frac{\sqrt{13\cdot x^2-38\cdot x+65}}{2}, x \in \mathbb{R}$$

Funktion f pienin arvo saadaan, kun

$\text{fMin}(\mathbf{f}(x),x) \blacktriangleright x=\frac{19}{13}$ jolloin

$$y=\frac{3\cdot x}{2}+\frac{5}{2}|x=\frac{19}{13} \blacktriangleright \frac{61}{13}$$

Ympyrän säde $\mathbf{r}:=\sqrt{\left(\frac{19}{13}-4\right)^2+\left(\frac{61}{13}-3\right)^2}$

$$\mathbf{r}^2 \blacktriangleright \frac{121}{13}$$

Ympyrän yhtälö on $\left(x-\frac{19}{13}\right)^2+\left(y-\frac{61}{13}\right)^2=\frac{121}{13}$

6.2

Lasketaan halutun ympyrän säde

2 p $\text{solve}\left(\pi\cdot r^2=10\cdot\pi,r\right)|r>0 \blacktriangleright r=\sqrt{10}$

Saadaan yhtälö

1 p $\text{solve}\left(\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}=\sqrt{10},x\right)|y=\frac{3\cdot x}{2}+\frac{5}{2} \blacktriangleright x=1 \text{ or } x=\frac{25}{13}$

Jos x=1, niin $y=\frac{3\cdot x}{2}+\frac{5}{2}|x=1 \blacktriangleright 4$

1 p Jos $x=\frac{25}{13}$, niin $y=\frac{3\cdot x}{2}+\frac{5}{2}|x=\frac{25}{13} \blacktriangleright \frac{70}{13}$

Ympyrän yhtälö on

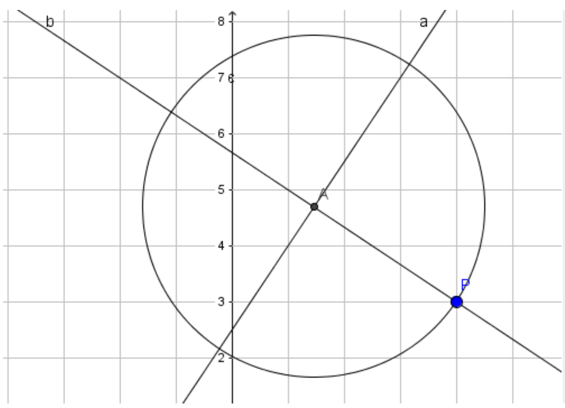
1 p $(x-1)^2+(y-4)^2=10$

tai

1 p $\left(x-\frac{25}{13}\right)^2+\left(y-\frac{70}{13}\right)^2=10$

Muuta:

Likiarvoratkaisu max. **3 p kohta**



...	Nimi	Määritelmä	Arvo
1	Suora a		a: 3x - 2y = -5
2	Piste P		P = (4, 3)
3	Suora b	P:n kautta kulkeva ja objektia a vastaan kohtisuora suora	b: 2x + 3y = 17
4	Piste A	Objektien b ja a leikkauspiste	A = (1.4615, 4.6923)
5	Ympyrä c	P:n kautta kulkeva ympyrä, jonka keskipiste on A	c: (x - 1.4615)² + (y - 4.6923)² = 9.3077

Tehtävä 7

Jos

$|x-5| \leqslant 11^{-9}$, niin itseisarvon määritelmän mukaan

$-11^{-9} \leqslant x-5 \leqslant 11^{-9}$, josta saadaan lisäämällä puolittain 5 **1 p**

$5-11^{-9} \leqslant x \leqslant 5+11^{-9}$ja vieläkin lisäämällä 5 puolittain saadaan **2 p**

$10-11^{-9} \leqslant x+5 \leqslant 10+11^{-9}$, josta taas nähdään, että **1 p**

$|x+5| \leqslant 10+11^{-9}$. **2 p**

Tällöin

$|x^2-25| = |(x-5)(x+5)| = |x-5||x+5| \leqslant 11^{-9} \cdot (10+11^{-9}) \leqslant 11^{-9} \cdot 11 = 11^{-8}$,

1 p **1 p** **1 p** **1 p** **1 p** **1 p**

mikä oli todistettava.

Muuta:

Ratkaistaan molemmat epäyhtälöt

$\text{solve}\left(|x-5| \leq 11^{-9}, x\right) \blacktriangleright \dfrac{11789738454}{2357947691} \leq x \leq \dfrac{11789738456}{2357947691}$

$\text{solve}\left(|x^2-25| \leq 11^{-8}, x\right)$

$\blacktriangleright \dfrac{-\sqrt{5358972026}}{14641} \leq x \leq \dfrac{-42 \cdot \sqrt{3037966}}{14641} \text{ or } \dfrac{42 \cdot \sqrt{3037966}}{14641} \leq x \leq \dfrac{\sqrt{5358972026}}{14641}$

Koska

$\dfrac{11789738454}{2357947691} > \dfrac{42 \cdot \sqrt{3037966}}{14641} \blacktriangleright \text{true}$

ja

$\dfrac{11789738456}{2357947691} < \dfrac{\sqrt{5358972026}}{14641} \blacktriangleright \text{true}$

niin väite on tosi.

max. 8 p

Ratkaistaan molemmat epäyhtälöt

$\text{solve}(|x-5|\leq 11^{-9},x)$ ▸ $4.99999999958\leq x\leq 5.00000000042$

$\text{solve}(|x^2-25|\leq 11^{-8},x)$ ▸ $-5.00000000047\leq x\leq -4.99999999953$ or $4.99999999953\leq x\leq 5.00000000047$

Koska

$4.99999999958>4.99999999953$ ▸ true

ja

$5.00000000042<5.00000000047$ ▸ true

niin väite on tosi.

Tässä näytettäviä numeroita pitää olla riittävästi, esim. 12, muuten epäyhtälöiden ratkaisut ovat $5 \leqslant x \leqslant 5$ja $-5 \leqslant x \leqslant -5$tai $5 \leqslant x \leqslant 5$.

max. 6 p

Tehtävä 8

8.1.

Videossa kuvataan Newtonin menetelmää, joka toimii seuraavasti: **1 p**

Valitaan nollakohdalle likiarvo x_1. Piirretään funktion kuvaajalle tangentti kohtaan x_1. Tangentin ja x-akselin leikkauskohta x_2 on lähempänä nollakohtaa kuin x_1. Muodostetaan kuvaajalle uusi tangentti kohtaan x_2. Tämän tangentin ja x-akselin leikkauskohta x_3 antaa uuden likiarvon funktion nollakohdalle. Kun menettelyä toistetaan, saadaan lukujono $x_1, x_2, x_3, \ldots$, jonka jäsenet lähestyvät funktion nollakohtaa, jos alkuarvo x_1 on valittu hyvin. **2 p**

8.2.

Lasketaan iterointia vielä eteenpäin

Määritellään funktio

$f(x) := \frac{(x+1)^2}{5} - 1$ ▸ *Valmis*

Määritetään derivaatta

$d(x) := \frac{d}{dx}(f(x))$ ▸ *Valmis*

$d(x)$ ▸ $\frac{2 \cdot x}{5} + \frac{2}{5}$

Määritetään iterointikaava

$g(x) := x - \frac{f(x)}{d(x)}$ ▸ *Valmis*

$g(x)$ ▸ $\frac{5}{2 \cdot (x+1)} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

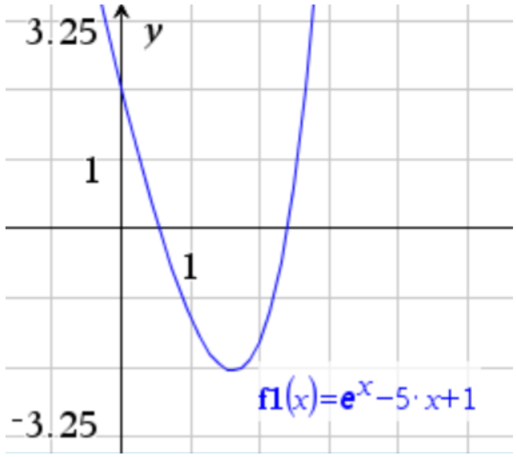
5	5
g(5)	2.41666666667
g(2.4166666666667)	1.44004065041
g(1.4400406504066)	1.24459341975
g(1.2445934197472)	1.23608416822
g(1.2360841682194)	1.23606797756
g(1.2360679775584)	1.2360679775
g(1.2360679774998)	1.2360679775

1 p

Nähdään, että iteroinnissa neljä ensimmäistä desimaalia vakiintuu vasta 5. iterointikerralla. Vasta tässä vaiheessa saadaan nollakohdan likiarvo oikein kolmen desimaalin tarkkuudella. Tämä likiarvo on 1,236. Videolla iterointia ei oltu siis laskettu vielä tarpeeksi pitkälle. **2 p**

8.3.

Kuvaajasta nähdään, että sopiva alkuarvaus on 0,5.



Tehdään iterointi laskimella

Määritellään funktio

$f(x):=e^{x}-5\cdot x+1$ ▸ *Valmis*

Määritetään derivaatta

$d(x):=\frac{d}{dx}(f(x))$ ▸ *Valmis*

$d(x)$ ▸ $e^{x}-5$

Määritetään iterointikaava

$g(x):=x-\frac{f(x)}{d(x)}$ ▸ *Valmis*

$g(x)$ ▸ $\frac{5\cdot x-6}{e^{x}-5}+x-1$

2 p

0.5	0.5
g(0.5)	0.54437746983
g(0.5443774698296)	0.544880373611
g(0.54488037361088)	0.54488044016
g(0.54488044015998)	0.54488044016

2 p

Vastaus: 0,544880 **2 p**

Tehtävä 9

Merkitään:

kr = kruuna

kl = klaava

9.1.

Todennäköisyys sille, että Lauri tai Frans voittaa tietyllä heittovuorollaan, on $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$.

P(Lauri voittaa toisella heittovuorollaan)

$=P$(Frans ei voita) $\cdot$ P(Lauri ei voita) $\cdot$ P(Frans ei voita) $\cdot$ P(Lauri voittaa) **1 p**

$= \frac{7}{8} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{7^3}{8^4} = 0{,}0837\ldots \approx 8{,}4\%$ **2 p**

9.2.

P(Frans voittaa)

$$=P(Fransvoittaa1.\,vuorollaan) + P(Fransvoittaa2.\,vuorollaan) + P(Fransvoittaa3.\,vuorollaan) + \ldots$$

$= \frac{1}{8} + \frac{7}{8} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{8} + \frac{7}{8} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{8} + \frac{7}{8} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{8} + \ldots$ **2 p**

Summa muodostaa geometrisen sarjan, jossa $a_1 = \frac{1}{8}$ ja $q = \frac{7}{8} \cdot \frac{7}{8} = (\frac{7}{8})^2 = 0{,}7652.. \approx 76{,}5\%$.

2 p

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{8}}{1-\left(\frac{7}{8}\right)^2} \blacktriangleright \frac{8}{15}$$ **2 p**

Frans voittaa siis todennäköisyydellä $\frac{8}{15}$

9.3.

Heittokierrosten odotusarvo on summa $\frac{1 \cdot 1}{8} + 2 \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot (\frac{7}{8})^2 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot (\frac{7}{8})^3 \cdot \frac{1}{8} + \ldots$ **1 p**

Lasketaan summan arvo laskimella.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{8}\right) \xrightarrow{\textbf{2 p}} 8$$

Heittokierrosten odotusarvo on siis 8.

TEHTÄVÄ 10

10.1.

Tehtävänannon mukaan:

Tartuntojen määrä kaksinkertaistuu 6 päivässä, jolloin $r = 2$ ja $s = 6$. **1 p + 1 p**

Tarkastelu lähti ensimmäisestä tartunnasta, jolloin $X_0 = 1$. **1 p**

Tällöin $X(t) = X_0 \cdot 2^{\frac{t}{6}}$**1 p**

Sairastuvien lukumäärä 24 päivän päästä on tällöin

$X(24) = 1 \cdot 2^{\frac{24}{6}} = 16$**1 p**

Vastaus: 24 päivän päästä sairastui mallin mukaan 16 ihmistä. **1 p**

10.2.

Määritellään annettu funktio laskimeen. Funktion derivaattafunktio kuvaa funktion kasvunopeutta, jolloin kasvunopeuden suurin arvo saadaan funktion derivaattafunktion derivaatan nollakohdasta.

1 p

Selvitetään funktion toisen derivaatan nollakohdat.

$$\mathbf{x}(t) := k \cdot \left(1 + \frac{k - x_0}{x_0} \cdot \mathbf{e}^{-r \cdot t}\right)^{-1} \quad \text{▸ } Valmis$$

$$\mathbf{d}(t) := \frac{d^2}{dt^2}\left(\mathbf{x}(t)\right) \quad \text{▸ } Valmis$$ **1 p**

$$\text{solve}\left(\mathbf{d}(t) = 0, t\right)$$

$$\text{▸ } t = \frac{\ln\left(\frac{k - x_0}{x_0}\right)}{r} \text{ and } (k - x_0)^3 \neq 0 \text{ and } k > x_0 > 0 \text{ or}$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{k - x_0}{x_0}\right)}{r} \text{ and } (k - x_0)^3 \neq 0 \text{ and } k < x_0 < 0 \text{ or } k \cdot (k - x_0) \cdot x_0 \cdot r^2 = 0$$ **1 p**

Taudille alttiiden potentiaalinen kokonaismäärä K on selvästi suurempi kuin sairastuneiden lukumäärä tarkastelun alussa X_0, joten hyväksytään laskimen ensimmäinen vastaus.

Sijoittamalla toisen derivaattafunktion muuttujaksi saatua nollakohtaa pienempi arvo saadaan toisen derivaatan arvoksi positiivinen arvo. Vastaavasti sijoitettaessa toisen derivaattafunktion muuttujaksi saatua nollakohtaa suurempi arvo saadaan toisen derivaatan arvoksi negatiivinen arvo.

Näin ollen kyseessä on maksimi, mikä todistaa väitteen. **1 p**

(Sijoittamalla annettu arvo toisen derivaatan lausekkeeseen huomataan, että toinen derivaatta saa arvon nolla. Tämän jälkeen voidaan tehdä vastaavat päätelmät.)

Jos r=0,1714, perjantaina 13.3. sairastuneita on 155 ja potentiaalisia taudille alttiita on 3 600 000, epidemian suurimman kasvun ajankohta saadaan em. lausekkeella.

$$t=\frac{\ln\left(\frac{k-x_0}{x_0}\right)}{r}\,|\,k=3600000 \text{ and } x_0=155 \text{ and } r=0.1714 \;\blacktriangleright\; t=58.6521$$

1 p

Selvitetään vielä, onko kasvu suurempaa 58 vai 59 päivän kuluttua. Tätä varten määritetään alkuperäisen funktoin derivaattafunktio ja lasketaan derivaattafunktion arvot kohdissa t=58 ja t=59.

$$\textbf{kasvunopeus}(t):=\frac{d}{dt}(\mathbf{x}(t)) \;\blacktriangleright\; \textit{Valmis}$$

$$\textbf{kasvunopeus}(58)\,|\,k=3600000 \text{ and } x_0=155 \text{ and } r=0.1714 \;\blacktriangleright\; 153779.$$

$$\textbf{kasvunopeus}(59)\,|\,k=3600000 \text{ and } x_0=155 \text{ and } r=0.1714 \;\blacktriangleright\; 154123.$$

Vastaus: Kasvunopeus on suurinta 59 päivän kuluttua. **1 p**

TEHTÄVÄ 11

Ratkaistaan **11.1.**- ja **11.2.-** kohta samassa.

Olkoon neliön sivun pituus a. Asetetaan neliön kulma A origoon, jolloin neliön kärkipisteet ovat A=(0,0), B=(a,0), C=(a,a) ja D=(0,a).

Jana AG on suoralla, jonka yhtälö on $y = 2x$

Jana FC on suoralla, jonka yhtälö on $y = 2x - a$ **1 p**

Jana BE on suoralla, jonka yhtälö on $y = -\frac{1}{2}x + \frac{a}{2}$

Jana DH on suoralla, jonka yhtälö on $y = -\frac{1}{2}x + a$ **1 p**

Selvitetään yhtälöpareilla pisteiden J, K, L ja M koordinaatit.

$$\text{J: solve}\left(\begin{cases} y=2\cdot x-a \\ y=\frac{-1}{2}\cdot x+\frac{a}{2} \end{cases},\{x,y\}\right) \blacktriangleright x=\frac{3\cdot a}{5} \text{ and } y=\frac{a}{5}$$

$$\text{k: solve}\left(\begin{cases} y=\frac{-1}{2}\cdot x+a \\ y=2\cdot x-a \end{cases},\{x,y\}\right) \blacktriangleright x=\frac{4\cdot a}{5} \text{ and } y=\frac{3\cdot a}{5}$$ **1 p**

$$\text{L: solve}\left(\begin{cases} y=2\cdot x \\ y=\frac{-1}{2}\cdot x+a \end{cases},\{x,y\}\right) \blacktriangleright x=\frac{2\cdot a}{5} \text{ and } y=\frac{4\cdot a}{5}$$

$$\text{M: solve}\left(\begin{cases} y=2\cdot x \\ y=\frac{-1}{2}\cdot x+\frac{a}{2} \end{cases},\{x,y\}\right) \blacktriangleright x=\frac{a}{5} \text{ and } y=\frac{2\cdot a}{5}$$ **1 p**

Muodostetaan seuraavaksi vektorit JK, KL, LM ja MJ.

$$\mathbf{jk}:=\left[\frac{4\cdot a}{5}-\frac{3\cdot a}{5} \quad \frac{3\cdot a}{5}-\frac{a}{5}\right] \blacktriangleright \left[\frac{a}{5} \quad \frac{2\cdot a}{5}\right]$$

$$\mathbf{kl}:=\left[\frac{2\cdot a}{5}-\frac{4\cdot a}{5} \quad \frac{4\cdot a}{5}-\frac{3\cdot a}{5}\right] \blacktriangleright \left[\frac{-2\cdot a}{5} \quad \frac{a}{5}\right]$$ **1 p**

$$\mathbf{lm}:=\left[\frac{a}{5}-\frac{2\cdot a}{5} \quad \frac{2\cdot a}{5}-\frac{4\cdot a}{5}\right] \blacktriangleright \left[\frac{-a}{5} \quad \frac{-2\cdot a}{5}\right]$$

$$\mathbf{mj}:=\left[\frac{3\cdot a}{5}-\frac{a}{5} \quad \frac{a}{5}-\frac{2\cdot a}{5}\right] \blacktriangleright \left[\frac{2\cdot a}{5} \quad \frac{-a}{5}\right]$$ **1 p**

Huomataan, että neliön sisälle syntyvä nelikulmio JKLM on neliö, koska sen sivut ovat yhtä pitkät ja sivuvektorit kohtisuorassa toisiaan vastaan. **1 p**

$$\mathrm{norm}(\mathbf{jk}) \blacktriangleright \frac{|a|\cdot\sqrt{5}}{5}$$

$$\mathrm{norm}(\mathbf{kl}) \blacktriangleright \frac{|a|\cdot\sqrt{5}}{5}$$

$$\mathrm{norm}(\mathbf{lm}) \blacktriangleright \frac{|a|\cdot\sqrt{5}}{5}$$

$$\mathrm{norm}(\mathbf{mj}) \blacktriangleright \frac{|a|\cdot\sqrt{5}}{5}$$ **1 p**

$$\mathrm{dotP}(-\mathbf{jk},\mathbf{kl}) \blacktriangleright 0$$

$$\mathrm{dotP}(-\mathbf{kl},\mathbf{lm}) \blacktriangleright 0$$

$$\mathrm{dotP}(-\mathbf{lm},\mathbf{mj}) \blacktriangleright 0$$

$$\mathrm{dotP}(-\mathbf{mj},\mathbf{jk}) \blacktriangleright 0$$ **1 p**

Lasketaan sisälle syntyneen neliön JKLM pinta-alan sekä koko neliön ABCD pinta-alojen suhde.

$$\frac{(\mathrm{norm}(\mathbf{jk}))^2}{a^2} \blacktriangleright \frac{1}{5}$$ **1 p**

Nelikulmion JKLM pinta-ala on siis 20 % neliön ABCD pinta-alasta.

Pinta-alojen suhteeksi saatiin $\frac{1}{5}$, joka ei riipu neliön ABCD sivun pituudesta a. **2 p**

TEHTÄVÄ 12

12.1.

$\mathbf{f}(x):=\sqrt{x} \blacktriangleright \textit{Valmis}$

1 p $\text{solve}(y=\mathbf{f}(x),x) \blacktriangleright x=y^2 \text{ and } y\geq 0$ **ratkaistu x**

$\mathbf{g}(y):=y^2 \blacktriangleright \textit{Valmis}$

1 p + $\text{solve}\left(\pi\cdot\int_0^a (\mathbf{f}(x))^2\,dx=\pi\cdot\int_{\mathbf{f}(0)}^{\mathbf{f}(a)} (\mathbf{g}(y))^2\,dy,a\right)|a>0 \blacktriangleright a=\frac{25}{4}$ **1 p**

12.2.

$\mathbf{f}(x):=\sqrt[3]{x} \blacktriangleright \textit{Valmis}$

$\text{solve}(y=\mathbf{f}(x),x) \blacktriangleright x=y^3$

$\mathbf{g}(y):=y^3 \blacktriangleright \textit{Valmis}$

$\text{solve}\left(\pi\cdot\int_0^a (\mathbf{f}(x))^2\,dx=\pi\cdot\int_{\mathbf{f}(0)}^{\mathbf{f}(a)} (\mathbf{g}(y))^2\,dy,a\right)|a>0 \blacktriangleright a=\frac{21\cdot\sqrt{105}}{25}$ **1 p ratkaistu rajat**

1 p + 1 p

12.3.

Määritellään funktiot

$\mathbf{f}(x):=\sqrt{a\cdot x}$ ▸ *Valmis*

$\mathbf{g}(x):=\sqrt[3]{a\cdot x}$ ▸ *Valmis*

Lasketaan leikkauskohdat

$\text{solve}(\mathbf{f}(x)=\mathbf{g}(x),x)$ ▸ $x=\dfrac{1}{a}$ or $x=0$ or $a=0$

1 p

Tutkitaan kumpi funktio kulkee ylempänä

$\mathbf{f}\left(\dfrac{1}{2\cdot a}\right)$ ▸ $0.707106781187 <$

$\mathbf{g}\left(\dfrac{1}{2\cdot a}\right)$ ▸ 0.793700525984

Nyt ulkotilavuus on

$$V_{x\ \text{ulko}}=\pi\cdot\int_0^{\frac{1}{a}}(\mathbf{g}(x))^2\,dx ▸ \frac{3\cdot\pi}{5\cdot a}$$

1 p

ja sisätilavuus on

$$V_{x\ \text{sisä}}=\pi\cdot\int_0^{\frac{1}{a}}(\mathbf{f}(x))^2\,dx ▸ \frac{\pi}{2\cdot a}\text{, joten}$$

$$V_x=\frac{3\cdot\pi}{5\cdot a}-\frac{\pi}{2\cdot a} ▸ \frac{\pi}{10\cdot a}$$

1 p

Ratkaistaan muuttuja x yhtälöstä

$\text{solve}(y=\mathbf{f}(x),x)$ ▸ $x=\dfrac{y^2}{a}$ and $y\geq 0$

Määritellään funktio

$\mathbf{h}(y):=\dfrac{y^2}{a}$ ▸ *Valmis*

Ratkaistaan muuttuja x yhtälöstä

$\text{solve}(y=\mathbf{g}(x),x)$ ▸ $x=\dfrac{y^3}{a}$

Määritellään funktio

$\mathbf{k}(y):=\dfrac{y^3}{a}$ ▸ *Valmis*

Lasketaan leikkauskohdat

$\mathbf{f}(0)$ ▸ 0

$\mathbf{f}\left(\dfrac{1}{a}\right)$ ▸ 1 ⚠

Tutkitaan kumpi funktio kulkee ylempänä

$$\mathbf{h}\left(\frac{1}{2}\right) \blacktriangleright \frac{0.25}{a} >$$

$$\mathbf{k}\left(\frac{1}{2}\right) \blacktriangleright \frac{0.125}{a}$$

Nyt ulkotilavuus on

$$V_{y\ \text{ulko}} = \pi \cdot \int_0^1 (\mathbf{h}(y))^2 \, dy \blacktriangleright \frac{\pi}{5 \cdot a^2}$$

Nyt sisätilavuus on

$$V_{y\ \text{sisä}} = \pi \cdot \int_0^1 (\mathbf{k}(y))^2 \, dy \blacktriangleright \frac{\pi}{7 \cdot a^2}$$

1 p

$$V_y = \frac{\pi}{5 \cdot a^2} - \frac{\pi}{7 \cdot a^2} \blacktriangleright \frac{2 \cdot \pi}{35 \cdot a^2}$$

1 p

$V_x = V_y$ jos

$$\text{solve}\left(\frac{\pi}{10 \cdot a} = \frac{2 \cdot \pi}{35 \cdot a^2}, a\right) \blacktriangleright a = \frac{4}{7}$$

1 p

TEHTÄVÄ 13

13.1.

$431^2 = (431+31)\cdot(431-31)+31^2 = 462\cdot 400+31^2 = 184800+((31+1)\cdot(31-1)+1^2)=$

1 p **1 p**

$184800+(32\cdot 30+1) = 184800+961 = 185761$ **1 p**

13.2.

numeroista a b c muodostuva 10-järjestelmän luku on $a\cdot 100+b\cdot 10+c$ **3 p**

luvun a b c toinen potenssi on

$\text{expand}\left((a\cdot 100+b\cdot 10+c)^2\right) \blacktriangleright 10000\cdot a^2+2000\cdot a\cdot b+200\cdot a\cdot c+100\cdot b^2+20\cdot b\cdot c+c^2$

3 p

menetelmä tuottaa saman lopputuloksen

$\text{expand}\left((a\cdot 100+b\cdot 10+c+b\cdot 10+c)\cdot(a\cdot 100+b\cdot 10+c-(b\cdot 10+c))+(b\cdot 10+c+c)\cdot(b\cdot 10+c-c)+c^2\right)$
$\blacktriangleright 10000\cdot a^2+2000\cdot a\cdot b+200\cdot a\cdot c+100\cdot b^2+20\cdot b\cdot c+c^2$

3 p