

Lukujonot

1. Osoita, että lukujonon $\begin{cases} a_0 = -1 \\ a_n = 3a_{n-1} + 4, n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$ yleinen termi analyyttisessä muodossaan on $a_n = 3^n - 2, n = 0, 1, 2, \dots$

2. Osoita, että lukujono

$$a_n = \frac{n+1}{2n+1}, n = 0, 1, 2, \dots$$

on aidosti vähenevä.

3. Olkoon aritmeettinen lukujono $5, 13, 21, \dots$. Määritä jonon yleinen jäsen rekursiivisessa ja analyyttisessä muodossaan. Laske jonon 1001. jäsen. Onko luku 3693 jonon jäsen ja jos on, kuinka mones?
4. Nuoripari ottaa 100 000 euron asuntolainan. Laina-aika on 20 vuotta ja lainan korko 5%. Laina on tasalyhenteinen ja sitä lyhennetään puolivuositain. Kuinka suuri on lainan ensimmäinen ja viimeinen maksuerä? Mikä on lainan hinta, eli paljonko lainasta maksetaan kokonaisuudessaan korkoja?
5. Laske summa $2 + 8 + 32 + \dots 8192$.

6. Laske

$$\sum_{k=0}^7 4 \cdot 3^{2k}.$$

7. Lukujono (x_n) määritellään seuraavasti: $x_0 = 0, x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + 1, n = 1, 2, \dots$. Johda lauseke luvulle x_n ja tutki, mitä lukua jonon jäsenet lähenevät, kun n suurenee rajatta.