RISTITULO

Ari Heimonen

19.11.2020

Oulun normaalikoulun kurssin MAA17 materiaalia

RISTITULO

Kahdelle avaruuden vektorilla voidaan laskea pistetulon lisäksi myös **ristitulo** eli **vektoritulo**. Pistetulosta poiketen ristitulo on vektori.

Kahdelle avaruuden vektorilla voidaan laskea pistetulon lisäksi myös **ristitulo** eli **vektoritulo**. Pistetulosta poiketen ristitulo on vektori.

Olkoot $\bar{u} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$ ja $\bar{v} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$ kaksi avaruuden vektoria. Tällöin ristitulo määritellään nk. determinantin avulla ja lasketaan seuraavasti

RISTITULO

Kahdelle avaruuden vektorilla voidaan laskea pistetulon lisäksi myös **ristitulo** eli **vektoritulo**. Pistetulosta poiketen ristitulo on vektori.

Olkoot $\bar{u} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$ ja $\bar{v} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$ kaksi avaruuden vektoria. Tällöin ristitulo määritellään nk. determinantin avulla ja lasketaan seuraavasti

$$\begin{aligned}\bar{u} \times \bar{v} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \\ &= \bar{i}(y_1z_2 - y_2z_1) - \bar{j}(x_1z_2 - x_2z_1) + \bar{k}(x_1y_2 - x_2y_1).\end{aligned}$$

Kahdelle avaruuden vektorilla voidaan laskea pistetulon lisäksi myös **ristitulo** eli **vektoritulo**. Pistetulosta poiketen ristitulo on vektori.

Olkoot $\bar{u} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$ ja $\bar{v} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$ kaksi avaruuden vektoria. Tällöin ristitulo määritellään nk. determinantin avulla ja lasketaan seuraavasti

$$\begin{aligned}\bar{u} \times \bar{v} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \\ &= \bar{i}(y_1z_2 - y_2z_1) - \bar{j}(x_1z_2 - x_2z_1) + \bar{k}(x_1y_2 - x_2y_1).\end{aligned}$$

RISTITULON OMINAISUUKSIA

- Ristitulovektori $\bar{u} \times \bar{v}$ on kohtisuorassa kumpaakin vektoria $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ vastaan

RISTITULON OMINAISUUKSIA

- Ristitulovektori $\bar{u} \times \bar{v}$ on kohtisuorassa kumpaakin vektoria $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ vastaan
- Ristitulovektorin pituus $|\bar{u} \times \bar{v}| = |\bar{u}||\bar{v}| \sin \sphericalangle(\bar{u}, \bar{v})$.

RISTITULON SOVELLUKSIA

RISTITULON OMINAISUUKSIA

- Ristitulovektori $\bar{u} \times \bar{v}$ on kohtisuorassa kumpaakin vektoria $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ vastaan
- Ristitulovektorin pituus $|\bar{u} \times \bar{v}| = |\bar{u}||\bar{v}| \sin \sphericalangle(\bar{u}, \bar{v})$.

RISTITULON SOVELLUKSIA

RISTITULON OMINAISUUKSIA

- Ristitulovektori $\bar{u} \times \bar{v}$ on kohtisuorassa kumpaakin vektoria $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ vastaan
- Ristitulovektorin pituus $|\bar{u} \times \bar{v}| = |\bar{u}||\bar{v}| \sin \sphericalangle(\bar{u}, \bar{v})$.

RISTITULON SOVELLUKSIA

- Ristitulon avulla voidaan laskea tason normaalivektori ja näin saadaan helposti tason normaalimuotoinen yhtälö.

RISTITULON OMINAISUUKSIA

- Ristitulovektori $\bar{u} \times \bar{v}$ on kohtisuorassa kumpaakin vektoria $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ vastaan
- Ristitulovektorin pituus $|\bar{u} \times \bar{v}| = |\bar{u}||\bar{v}| \sin \sphericalangle(\bar{u}, \bar{v})$.

RISTITULON SOVELLUKSIA

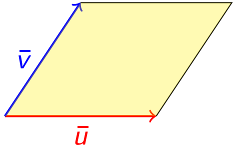
- Ristitulon avulla voidaan laskea tason normaalivektori ja näin saadaan helposti tason normaalimuotoinen yhtälö.
- Edellista sovellusta voi käyttää hyväksi, jos on laskettava pisteen etäisyys tasosta.

RISTITULON OMINAISUUKSIA

- Ristitulovektori $\bar{u} \times \bar{v}$ on kohtisuorassa kumpaakin vektoria $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ vastaan
- Ristitulovektorin pituus $|\bar{u} \times \bar{v}| = |\bar{u}||\bar{v}| \sin \sphericalangle(\bar{u}, \bar{v})$.

RISTITULON SOVELLUKSIA

- Ristitulon avulla voidaan laskea tason normaalivektori ja näin saadaan helposti tason normaalimuotoinen yhtälö.
- Edellista sovellusta voi käyttää hyväksi, jos on laskettava pisteen etäisyys tasosta.
- Ristitulon pituus on taas ilmaisee vektoreiden virittämän suunnikkaan pinta-alan



ESIMERKKEJÄ

1) Laske vektorien $\bar{u} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$ ja $\bar{v} = -3\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k}$ ristitulo.

ESIMERKKEJÄ

1) Laske vektorien $\bar{u} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$ ja $\bar{v} = -3\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k}$ ristitulo.

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$$

ESIMERKKEJÄ

1) Laske vektorien $\bar{u} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$ ja $\bar{v} = -3\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k}$ ristitulo.

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \bar{i}(-3 \cdot (-3) - 1 \cdot 1) - \bar{j}(2 \cdot (-3) - (-3) \cdot 1) + \bar{k}(2 \cdot 1 - (-3) \cdot (-3))$$

ESIMERKKEJÄ

1) Laske vektorien $\bar{u} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$ ja $\bar{v} = -3\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k}$ ristitulo.

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \bar{i}(-3 \cdot (-3) - 1 \cdot 1) - \bar{j}(2 \cdot (-3) - (-3) \cdot 1) + \bar{k}(2 \cdot 1 - (-3) \cdot (-3))$$

$$= 8\bar{i} + 3\bar{j} - 7\bar{k}$$

ESIMERKKEJÄ

1) Laske vektorien $\bar{u} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$ ja $\bar{v} = -3\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k}$ ristitulo.

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \bar{i}(-3\cdot(-3) - 1\cdot 1) - \bar{j}(2\cdot(-3) - (-3)\cdot 1) + \bar{k}(2\cdot 1 - (-3)\cdot(-3))$$

$$= 8\bar{i} + 3\bar{j} - 7\bar{k}$$

2) Kolmion kärkipisteet ovat origo, $(2, -3, 1)$ ja $(-3, 1, -3)$. Laske kolmion pinta-ala.

ESIMERKKEJÄ

1) Laske vektorien $\bar{u} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$ ja $\bar{v} = -3\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k}$ ristitulo.

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \bar{i}(-3 \cdot (-3) - 1 \cdot 1) - \bar{j}(2 \cdot (-3) - (-3) \cdot 1) + \bar{k}(2 \cdot 1 - (-3) \cdot (-3))$$

$$= 8\bar{i} + 3\bar{j} - 7\bar{k}$$

2) Kolmion kärkipisteet ovat origo, $(2, -3, 1)$ ja $(-3, 1, -3)$. Laske kolmion pinta-ala.

RATKAISU: Kolmion sivuvektorit ovat $\bar{u} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$ ja
$\bar{v} = -3\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k}$.

1) Laske vektorien $\bar{u} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$ ja $\bar{v} = -3\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k}$ ristitulo.

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \bar{i}(-3 \cdot (-3) - 1 \cdot 1) - \bar{j}(2 \cdot (-3) - (-3) \cdot 1) + \bar{k}(2 \cdot 1 - (-3) \cdot (-3))$$

$$= 8\bar{i} + 3\bar{j} - 7\bar{k}$$

2) Kolmion kärkipisteet ovat origo, $(2, -3, 1)$ ja $(-3, 1, -3)$. Laske kolmion pinta-ala.

RATKAISU: Kolmion sivuvektorit ovat $\bar{u} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$ ja $\bar{v} = -3\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k}$. Kolmion pinta-ala on puolet samojen vektorien virittämän suunnikkaan pinta-alasta eli esimerkin 1) perusteella

1) Laske vektorien $\bar{u} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$ ja $\bar{v} = -3\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k}$ ristitulo.

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \bar{i}(-3\cdot(-3) - 1\cdot 1) - \bar{j}(2\cdot(-3) - (-3)\cdot 1) + \bar{k}(2\cdot 1 - (-3)\cdot(-3))$$

$$= 8\bar{i} + 3\bar{j} - 7\bar{k}$$

2) Kolmion kärkipisteet ovat origo, $(2, -3, 1)$ ja $(-3, 1, -3)$. Laske kolmion pinta-ala.

RATKAISU: Kolmion sivuvektorit ovat $\bar{u} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$ ja $\bar{v} = -3\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k}$. Kolmion pinta-ala on puolet samojen vektorien virittämän suunnikkaan pinta-alasta eli esimerkin 1) perusteella

$$A = \frac{1}{2}|\bar{u} \times \bar{v}| =$$

ESIMERKKEJÄ

1) Laske vektorien $\bar{u} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$ ja $\bar{v} = -3\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k}$ ristitulo.

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \bar{i}(-3 \cdot (-3) - 1 \cdot 1) - \bar{j}(2 \cdot (-3) - (-3) \cdot 1) + \bar{k}(2 \cdot 1 - (-3) \cdot (-3))$$

$$= 8\bar{i} + 3\bar{j} - 7\bar{k}$$

2) Kolmion kärkipisteet ovat origo, $(2, -3, 1)$ ja $(-3, 1, -3)$. Laske kolmion pinta-ala.

RATKAISU: Kolmion sivuvektorit ovat $\bar{u} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$ ja $\bar{v} = -3\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k}$. Kolmion pinta-ala on puolet samojen vektorien virittämän suunnikkaan pinta-alasta eli esimerkin 1) perusteella

$$A = \frac{1}{2}|\bar{u} \times \bar{v}| = |8\bar{i} + 3\bar{j} - 7\bar{k}|$$

ESIMERKKEJÄ

1) Laske vektorien $\bar{u} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$ ja $\bar{v} = -3\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k}$ ristitulo.

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \bar{i}(-3\cdot(-3) - 1\cdot 1) - \bar{j}(2\cdot(-3) - (-3)\cdot 1) + \bar{k}(2\cdot 1 - (-3)\cdot(-3))$$

$$= 8\bar{i} + 3\bar{j} - 7\bar{k}$$

2) Kolmion kärkipisteet ovat origo, $(2, -3, 1)$ ja $(-3, 1, -3)$. Laske kolmion pinta-ala.

RATKAISU: Kolmion sivuvektorit ovat $\bar{u} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$ ja $\bar{v} = -3\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k}$. Kolmion pinta-ala on puolet samojen vektorien virittämän suunnikkaan pinta-alasta eli esimerkin 1) perusteella

$$A = \frac{1}{2}|\bar{u} \times \bar{v}| = |8\bar{i} + 3\bar{j} - 7\bar{k}|$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{8^2 + 3^2 + (-7)^2}$$

ESIMERKKEJÄ

1) Laske vektorien $\bar{u} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$ ja $\bar{v} = -3\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k}$ ristitulo.

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \bar{i}(-3\cdot(-3) - 1\cdot 1) - \bar{j}(2\cdot(-3) - (-3)\cdot 1) + \bar{k}(2\cdot 1 - (-3)\cdot(-3))$$

$$= 8\bar{i} + 3\bar{j} - 7\bar{k}$$

2) Kolmion kärkipisteet ovat origo, $(2,-3,1)$ ja $(-3,1,-3)$. Laske kolmion pinta-ala.

RATKAISU: Kolmion sivuvektorit ovat $\bar{u} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$ ja $\bar{v} = -3\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k}$. Kolmion pinta-ala on puolet samojen vektorien virittämän suunnikkaan pinta-alasta eli esimerkin 1) perusteella

$$A = \frac{1}{2}|\bar{u} \times \bar{v}| = |8\bar{i} + 3\bar{j} - 7\bar{k}|$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{8^2 + 3^2 + (-7)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{122} = 5,522\cdots \approx 5,5.$$

3) Taso kulkee pisteiden $A = (1, 1, 2)$, $B = (3, 0, 3)$ ja $C = (2, 2, 5)$ kautta.

a) Määritä tason normaalivektori $\bar{n}$.

b) Määritä tason normaalimuotoinen yhtälö $ax + by + cz = d$.

3) Taso kulkee pisteiden $A = (1, 1, 2)$, $B = (3, 0, 3)$ ja $C = (2, 2, 5)$ kautta.
a) Määritä tason normaalivektori $\bar{n}$.
b) Määritä tason normaalimuotoinen yhtälö $ax + by + cz = d$.

RATKAISU: a) Valitaan tason virittäjävektoreiksi $\overline{AB} = 2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$ ja $\overline{AC} = \bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$.

3) Taso kulkee pisteiden $A = (1,1,2)$, $B = (3,0,3)$ ja $C = (2,2,5)$ kautta.
a) Määritä tason normaalivektori $\bar{n}$.
b) Määritä tason normaalimuotoinen yhtälö $ax + by + cz = d$.

RATKAISU: a) Valitaan tason virittäjävektoreiksi $\overline{AB} = 2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$ ja $\overline{AC} = \bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$. Nyt

$$\bar{n} = \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

3) Taso kulkee pisteiden $A = (1, 1, 2)$, $B = (3, 0, 3)$ ja $C = (2, 2, 5)$ kautta.
a) Määritä tason normaalivektori $\bar{n}$.
b) Määritä tason normaalimuotoinen yhtälö $ax + by + cz = d$.

RATKAISU: a) Valitaan tason virittäjävektoreiksi $\overline{AB} = 2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$ ja $\overline{AC} = \bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$. Nyt

$$\bar{n} = \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \bar{i}(-1 \cdot 3 - 1 \cdot 1) - \bar{j}(2 \cdot 3 - 1 \cdot 1) + \bar{k}(2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1))$$

3) Taso kulkee pisteiden $A = (1, 1, 2)$, $B = (3, 0, 3)$ ja $C = (2, 2, 5)$ kautta.
a) Määritä tason normaalivektori $\bar{n}$.
b) Määritä tason normaalimuotoinen yhtälö $ax + by + cz = d$.

RATKAISU: a) Valitaan tason virittäjävektoreiksi $\overline{AB} = 2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$ ja $\overline{AC} = \bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$. Nyt

$$\bar{n} = \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \bar{i}(-1 \cdot 3 - 1 \cdot 1) - \bar{j}(2 \cdot 3 - 1 \cdot 1) + \bar{k}(2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1))$$

$$= -4\bar{i} - 5\bar{j} + 3\bar{k}.$$

b) Jokaisen tason vektorin pistetulo normaalivektorin $\bar{n}$ on vakio.

b) Jokaisen tason vektorin pistetulo normaalivektorin $\bar{n}$ on vakio. Tason yhtälö saadaan siis laskemalla esimerkiksi

$$\bar{n} \cdot \overline{OA}$$

b) Jokaisen tason vektorin pistetulo normaalivektorin $\bar{n}$ on vakio. Tason yhtälö saadaan siis laskemalla esimerkiksi

$$\bar{n}\cdot\overline{OA} = (-4\bar{i}-5\bar{j}+3\bar{k})\cdot(\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}) = -4\cdot 1+(-5)\cdot 1+3\cdot 2 = -3.$$

ESIMERKKEJÄ

b) Jokaisen tason vektorin pistetulo normaalivektorin $\bar{n}$ on vakio. Tason yhtälö saadaan siis laskemalla esimerkiksi

$$\bar{n} \cdot \overline{OA} = (-4\bar{i} - 5\bar{j} + 3\bar{k}) \cdot (\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}) = -4 \cdot 1 + (-5) \cdot 1 + 3 \cdot 2 = -3.$$

Siis tason jokaiselle vektorille $x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ pätee

$$\bar{n} \cdot (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) = -4x - 5y + 3z = -3.$$

b) Jokaisen tason vektorin pistetulo normaalivektorin $\bar{n}$ on vakio. Tason yhtälö saadaan siis laskemalla esimerkiksi

$$\bar{n} \cdot \overline{OA} = (-4\bar{i} - 5\bar{j} + 3\bar{k}) \cdot (\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}) = -4 \cdot 1 + (-5) \cdot 1 + 3 \cdot 2 = -3.$$

Siis tason jokaiselle vektorille $x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ pätee

$$\bar{n} \cdot (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) = -4x - 5y + 3z = -3.$$

VASTAUS: $-4x - 5y + 3z = -3.$