Sivu 8.1. klo 10:59

Tehtävä 9, s.2013

$$y = 2e^{-x} = f(x)$$

$$y = x^2 e^{-x} = g(x)$$

Lasketaan leikkauspisteet:

$$2e^{-x} = x^2 e^{-x}$$

$$2e^{-x} - x^2 e^{-x} = 0$$

$$e^{-x}\left(2 - x^2\right) = 0$$

$$2 - x^2 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

Siis $x \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$

Kumpi käyristä on ylempänä?

$f(0) = 2, \quad g(0) = 0$ ⇒ $f(x)$ on ylempänä

Janan on $l(x) = f(x) - g(x)$

Nyt $l(x)$ on jatkuva välillä $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$ ja derivoituva välillä $\left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$

Lasketaan derivaatta

$$l'(x) = D\left(2e^{-x} - x^2 e^{-x}\right) = -2e^{-x} - 2xe^{-x} + x^2 e^{-x}$$

$$= e^{-x}\left(x^2 - 2x - 2\right)$$

Derivaatan nollakohdat

$$x^2 - 2x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 + \sqrt{3} \quad \text{tai } x = 1 - \sqrt{3}$$

$1 + \sqrt{3}$ ei kuulu tarkasteluvälillä, mutta $1 - \sqrt{3}$ kuuluu.

Bolzanon lauseen nojalla suurin arvo löytyy joko välin päätepsteistä tai derivaatan nollakohdasta:

$$l\left(-\sqrt{2}\right) = l\left(\sqrt{2}\right) = 0$$

$$l\left(1 - \sqrt{3}\right) = 2\left(1 - \sqrt{3}\right)e^{\sqrt{3}-1} = 3{,}0443... \approx 3{,}04$$

VASTAUS: $2\left(1 - \sqrt{3}\right)e^{\sqrt{3}-1} \approx 3{,}04$