TILAVUUSINTEGRAALI

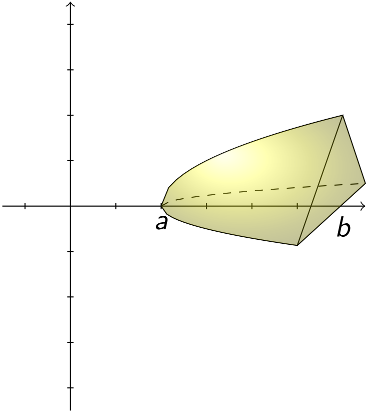
Ari Heimonen, Pekka Vaaraniemi

1.3.2012

Oulun normaalikoulun kurssin MAA10 materiaalia

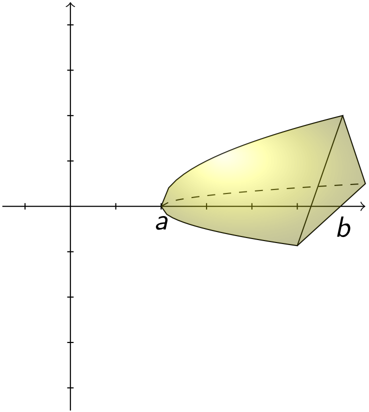
YLEISPERIAATE

On laskettava koordinaatistoon välille $x \in [a, b]$ sijoitetun kappaleen tilavuus.



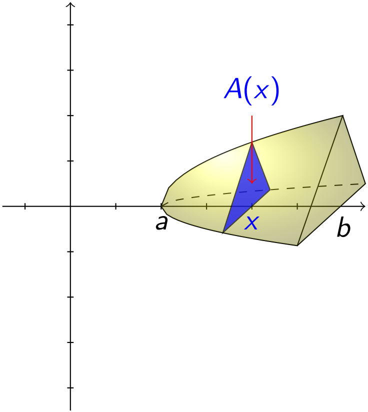
YLEISPERIAATE

On laskettava koordinaatistoon välille $x \in [a, b]$ sijoitetun kappaleen tilavuus. Oletetaan, että kappaleen poikkileikkauksen pinta-ala kohdassa x on ilmaistavissa muuttujan x funktiona $A(x)$.



YLEISPERIAATE

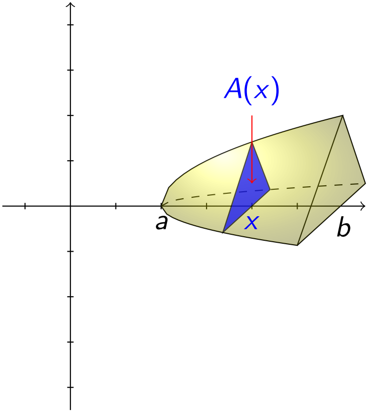
On laskettava koordinaatistoon välille $x \in [a, b]$ sijoitetun kappaleen tilavuus. Oletetaan, että kappaleen poikkileikkauksen pinta-ala kohdassa x on ilmaistavissa muuttujan x funktiona $A(x)$. Ajatellaan, että kappale leikataan hyvin ohuiksi siivuiksi, joiden paksuus on Δx.



YLEISPERIAATE

On laskettava koordinaatistoon välille $x \in [a, b]$ sijoitetun kappaleen tilavuus. Oletetaan, että kappaleen poikkileikkauksen pinta-ala kohdassa x on ilmaistavissa muuttujan x funktiona $A(x)$. Ajatellaan, että kappale leikataan hyvin ohuiksi siivuiksi, joiden paksuus on Δx. Koko kappaleen tilavuus on tällöin siivujen tilavuuksien $A(x)\Delta x$ summa

$$V = \sum A(x)\Delta x.$$

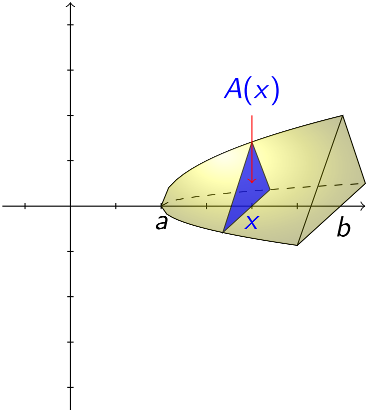


On laskettava koordinaatistoon välille $x \in [a, b]$ sijoitetun kappaleen tilavuus. Oletetaan, että kappaleen poikkileikkauksen pinta-ala kohdassa x on ilmaistavissa muuttujan x funktiona $A(x)$. Ajatellaan, että kappale leikataan hyvin ohuiksi siivuiksi, joiden paksuus on Δx. Koko kappaleen tilavuus on tällöin siivujen tilavuuksien $A(x)\Delta x$ summa

$$V = \sum A(x)\Delta x.$$

Annetaan paksuuden lähestyä nollaa, jolloin summa muuttuu integraaliksi

$$\boxed{V = \int_a^b A(x)\,dx.}$$



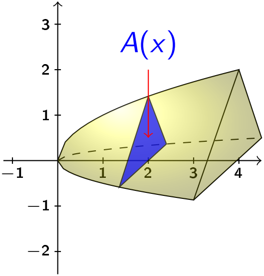
ESIMERKKI 1.

Hallirakennuksen poikkileikkaus on kolmio, jonka korkeus kohdassa x on $\sqrt{x}$ ja kanta kohdassa x on x. Rakennus sijaitsee välillä $[0, 4]$, missä koordinaatiston yksikkö on 10 m. Laske rakennuksen tilavuus. (Ks. kuva edellisellä sivulla.)

ESIMERKKI 1.

Hallirakennuksen poikkileikkaus on kolmio, jonka korkeus kohdassa x on $\sqrt{x}$ ja kanta kohdassa x on x. Rakennus sijaitsee välillä $[0, 4]$, missä koordinaatiston yksikkö on 10 m. Laske rakennuksen tilavuus. (Ks. kuva edellisellä sivulla.)

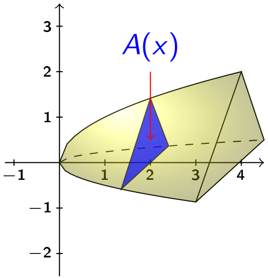
RATKAISU: Poikkileikkauksen pinta-ala kohdassa x on



ESIMERKKI 1.

Hallirakennuksen poikkileikkaus on kolmio, jonka korkeus kohdassa x on $\sqrt{x}$ ja kanta kohdassa x on x. Rakennus sijaitsee välillä $[0, 4]$, missä koordinaatiston yksikkö on 10 m. Laske rakennuksen tilavuus. (Ks. kuva edellisellä sivulla.)

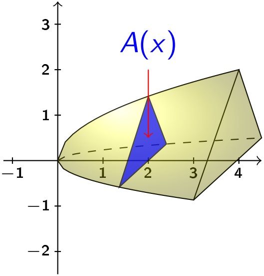
RATKAISU: Poikkileikkauksen pinta-ala kohdassa x on $A(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x}$.



ESIMERKKI 1.

Hallirakennuksen poikkileikkaus on kolmio, jonka korkeus kohdassa x on $\sqrt{x}$ ja kanta kohdassa x on x. Rakennus sijaitsee välillä $[0, 4]$, missä koordinaatiston yksikkö on 10 m. Laske rakennuksen tilavuus. (Ks. kuva edellisellä sivulla.)

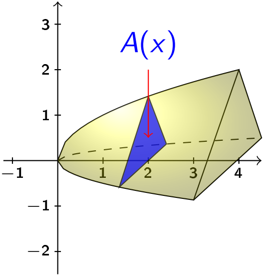
RATKAISU: Poikkileikkauksen pinta-ala kohdassa x on $A(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x}$. Tilavuus V saadaan integraalina



ESIMERKKI 1.

Hallirakennuksen poikkileikkaus on kolmio, jonka korkeus kohdassa x on $\sqrt{x}$ ja kanta kohdassa x on x. Rakennus sijaitsee välillä $[0, 4]$, missä koordinaatiston yksikkö on 10 m. Laske rakennuksen tilavuus. (Ks. kuva edellisellä sivulla.)

RATKAISU: Poikkileikkauksen pinta-ala kohdassa x on $A(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x}$. Tilavuus V saadaan integraalina

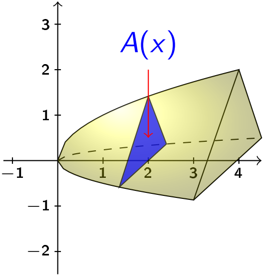


$$V = \int_0^4 A(x)\,dx =$$

ESIMERKKI 1.

Hallirakennuksen poikkileikkaus on kolmio, jonka korkeus kohdassa x on $\sqrt{x}$ ja kanta kohdassa x on x. Rakennus sijaitsee välillä $[0, 4]$, missä koordinaatiston yksikkö on 10 m. Laske rakennuksen tilavuus. (Ks. kuva edellisellä sivulla.)

RATKAISU: Poikkileikkauksen pinta-ala kohdassa x on $A(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x}$. Tilavuus V saadaan integraalina



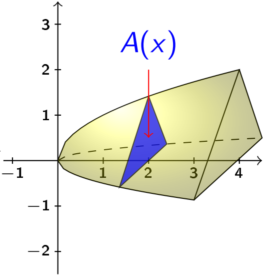
$$V = \int_0^4 A(x)\, dx = \int_0^4 \frac{1}{2}x\sqrt{x}\, dx =$$

ESIMERKKI 1.

Hallirakennuksen poikkileikkaus on kolmio, jonka korkeus kohdassa x on $\sqrt{x}$ ja kanta kohdassa x on x. Rakennus sijaitsee välillä $[0, 4]$, missä koordinaatiston yksikkö on 10 m. Laske rakennuksen tilavuus. (Ks. kuva edellisellä sivulla.)

RATKAISU: Poikkileikkauksen pinta-ala kohdassa x on $A(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x}$. Tilavuus V saadaan integraalina

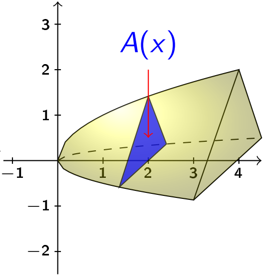
$$V = \int_0^4 A(x)\,dx = \int_0^4 \frac{1}{2}x\sqrt{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^4 x^{\frac{3}{2}}\,dx$$



ESIMERKKI 1.

Hallirakennuksen poikkileikkaus on kolmio, jonka korkeus kohdassa x on $\sqrt{x}$ ja kanta kohdassa x on x. Rakennus sijaitsee välillä $[0, 4]$, missä koordinaatiston yksikkö on 10 m. Laske rakennuksen tilavuus. (Ks. kuva edellisellä sivulla.)

RATKAISU: Poikkileikkauksen pinta-ala kohdassa x on $A(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x}$. Tilavuus V saadaan integraalina



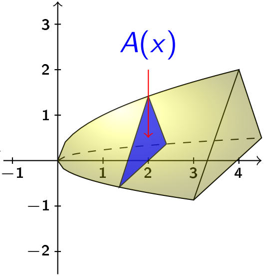
$$V = \int_0^4 A(x)\,dx = \int_0^4 \frac{1}{2}x\sqrt{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^4 x^{\frac{3}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big/_0^4 \frac{1}{1+\frac{3}{2}}x^{\frac{5}{2}} =$$

ESIMERKKI 1.

Hallirakennuksen poikkileikkaus on kolmio, jonka korkeus kohdassa x on $\sqrt{x}$ ja kanta kohdassa x on x. Rakennus sijaitsee välillä $[0, 4]$, missä koordinaatiston yksikkö on 10 m. Laske rakennuksen tilavuus. (Ks. kuva edellisellä sivulla.)

RATKAISU: Poikkileikkauksen pinta-ala kohdassa x on $A(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x}$. Tilavuus V saadaan integraalina



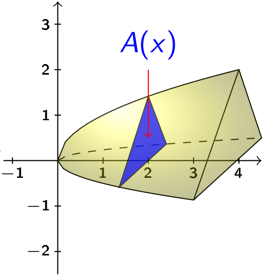
$$V = \int_0^4 A(x)\,dx = \int_0^4 \frac{1}{2}x\sqrt{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^4 x^{\frac{3}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big/_0^4 \frac{1}{1+\frac{3}{2}}x^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{5}\left(4^{\frac{5}{2}} - 0^{\frac{5}{2}}\right) =$$

ESIMERKKI 1.

Hallirakennuksen poikkileikkaus on kolmio, jonka korkeus kohdassa x on $\sqrt{x}$ ja kanta kohdassa x on x. Rakennus sijaitsee välillä $[0, 4]$, missä koordinaatiston yksikkö on 10 m. Laske rakennuksen tilavuus. (Ks. kuva edellisellä sivulla.)

RATKAISU: Poikkileikkauksen pinta-ala kohdassa x on $A(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x}$. Tilavuus V saadaan integraalina



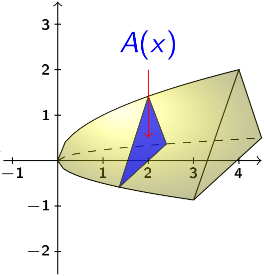
$$V = \int_0^4 A(x)\,dx = \int_0^4 \frac{1}{2}x\sqrt{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^4 x^{\frac{3}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big/_0^4 \frac{1}{1+\frac{3}{2}}x^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{5}\left(4^{\frac{5}{2}} - 0^{\frac{5}{2}}\right) = \frac{32}{5}.$$

ESIMERKKI 1.

Hallirakennuksen poikkileikkaus on kolmio, jonka korkeus kohdassa x on $\sqrt{x}$ ja kanta kohdassa x on x. Rakennus sijaitsee välillä $[0, 4]$, missä koordinaatiston yksikkö on 10 m. Laske rakennuksen tilavuus. (Ks. kuva edellisellä sivulla.)

RATKAISU: Poikkileikkauksen pinta-ala kohdassa x on $A(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x}$. Tilavuus V saadaan integraalina



$$V = \int_0^4 A(x)\,dx = \int_0^4 \frac{1}{2}x\sqrt{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^4 x^{\frac{3}{2}}\,dx$$

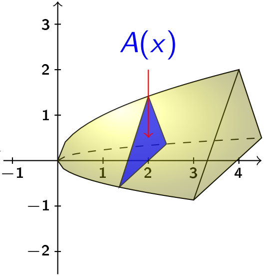
$$= \frac{1}{2}\Big/_0^4 \frac{1}{1+\frac{3}{2}}x^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{5}\left(4^{\frac{5}{2}} - 0^{\frac{5}{2}}\right) = \frac{32}{5}.$$

Rakennuksen tilavuus on siis $\frac{32}{5} \cdot (10\text{ m})^3 =$

ESIMERKKI 1.

Hallirakennuksen poikkileikkaus on kolmio, jonka korkeus kohdassa x on $\sqrt{x}$ ja kanta kohdassa x on x. Rakennus sijaitsee välillä $[0, 4]$, missä koordinaatiston yksikkö on 10 m. Laske rakennuksen tilavuus. (Ks. kuva edellisellä sivulla.)

RATKAISU: Poikkileikkauksen pinta-ala kohdassa x on $A(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x}$. Tilavuus V saadaan integraalina



$$V = \int_0^4 A(x)\,dx = \int_0^4 \frac{1}{2}x\sqrt{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^4 x^{\frac{3}{2}}\,dx$$

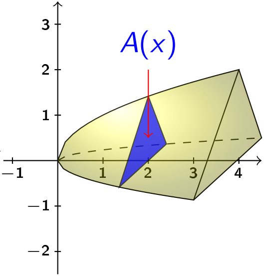
$$= \frac{1}{2}\Big/_0^4 \frac{1}{1+\frac{3}{2}}x^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{5}\left(4^{\frac{5}{2}} - 0^{\frac{5}{2}}\right) = \frac{32}{5}.$$

Rakennuksen tilavuus on siis $\frac{32}{5} \cdot (10\text{ m})^3 = 6400\text{m}^3$.

ESIMERKKI 1.

Hallirakennuksen poikkileikkaus on kolmio, jonka korkeus kohdassa x on $\sqrt{x}$ ja kanta kohdassa x on x. Rakennus sijaitsee välillä $[0, 4]$, missä koordinaatiston yksikkö on 10 m. Laske rakennuksen tilavuus. (Ks. kuva edellisellä sivulla.)

RATKAISU: Poikkileikkauksen pinta-ala kohdassa x on $A(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x}$. Tilavuus V saadaan integraalina



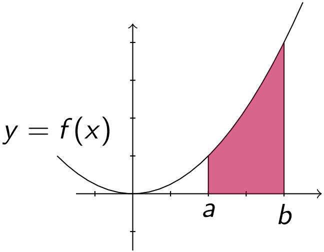
$$V = \int_0^4 A(x)\,dx = \int_0^4 \frac{1}{2}x\sqrt{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^4 x^{\frac{3}{2}}\,dx$$

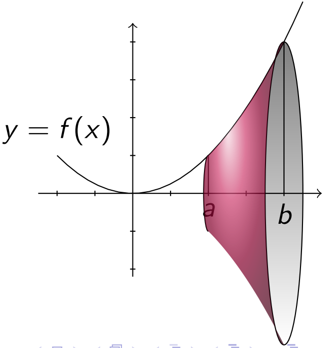
$$= \frac{1}{2}\Big/_0^4 \frac{1}{1+\frac{3}{2}}x^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{5}\left(4^{\frac{5}{2}} - 0^{\frac{5}{2}}\right) = \frac{32}{5}.$$

Rakennuksen tilavuus on siis $\frac{32}{5} \cdot (10\text{ m})^3 = 6400\text{m}^3$.

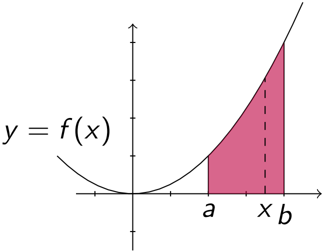
VASTAUS: 6400m^3.

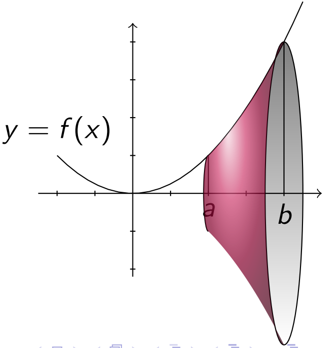
Käyrän $y = f(x)$, x-akselin ja suorien $x = a$ ja $x = b$ rajaama alue pyörähtää x akselin ympäri.





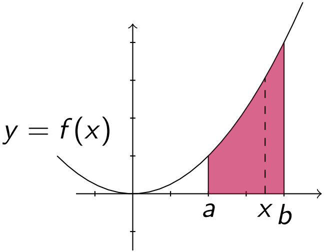
Käyrän $y = f(x)$, x-akselin ja suorien $x = a$ ja $x = b$ rajaama alue pyörähtää x akselin ympäri. Näin syntyvän pyörähdyskappaleen poikkileikkaus kohdassa x on tällöin

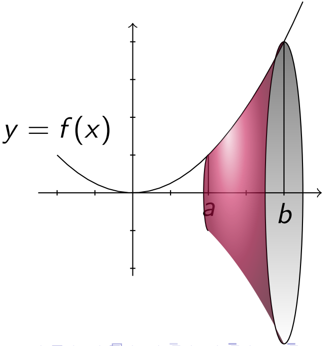




PYÖRÄHDYS x-AKSELIN YMPÄRI

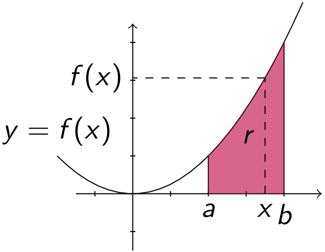
Käyrän $y = f(x)$, x-akselin ja suorien $x = a$ ja $x = b$ rajaama alue pyörähtää x akselin ympäri. Näin syntyvän pyörähdyskappaleen poikkileikkaus kohdassa x on tällöin ympyrä, jonka säde on

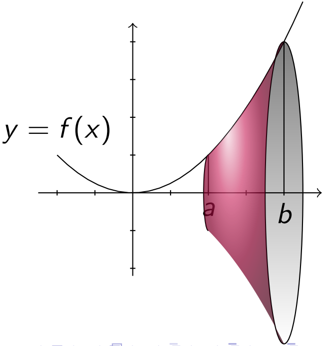




PYÖRÄHDYS x-AKSELIN YMPÄRI

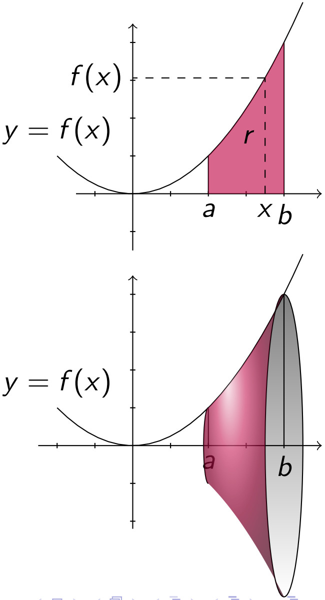
Käyrän $y = f(x)$, x-akselin ja suorien $x = a$ ja $x = b$ rajaama alue pyörähtää x akselin ympäri. Näin syntyvän pyörähdyskappaleen poikkileikkaus kohdassa x on tällöin ympyrä, jonka säde on $f(x)$.



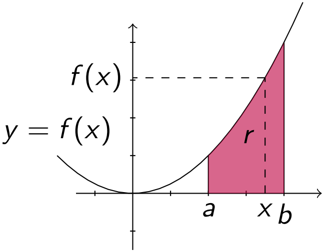


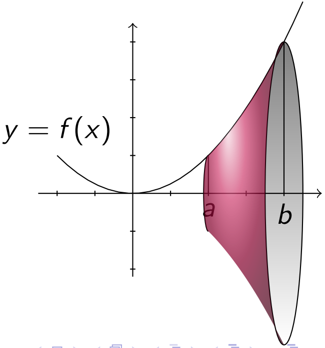
PYÖRÄHDYS x-AKSELIN YMPÄRI

Käyrän $y = f(x)$, x-akselin ja suorien $x = a$ ja $x = b$ rajaama alue pyörähtää x akselin ympäri. Näin syntyvän pyörähdyskappaleen poikkileikkaus kohdassa x on tällöin ympyrä, jonka säde on $f(x)$. Poikkileikauksen pinta-ala $A(x)$ kohdassa x on siis



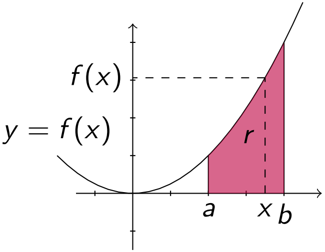
Käyrän $y = f(x)$, x-akselin ja suorien $x = a$ ja $x = b$ rajaama alue pyörähtää x akselin ympäri. Näin syntyvän pyörähdyskappaleen poikkileikkaus kohdassa x on tällöin ympyrä, jonka säde on $f(x)$. Poikkileikkauksen pinta-ala $A(x)$ kohdassa x on siis $A(x) = \pi\,(f(x))^2$ ja kappaleen tilavuus V on siten

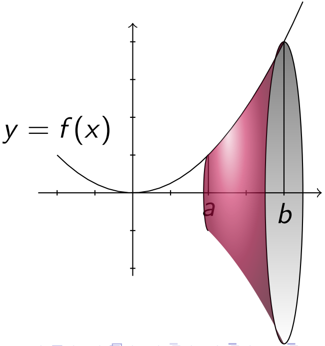




Käyrän $y = f(x)$, x-akselin ja suorien $x = a$ ja $x = b$ rajaama alue pyörähtää x akselin ympäri. Näin syntyvän pyörähdyskappaleen poikkileikkaus kohdassa x on tällöin ympyrä, jonka säde on $f(x)$. Poikkileikkauksen pinta-ala $A(x)$ kohdassa x on siis $A(x) = \pi\,(f(x))^2$ ja kappaleen tilavuus V on siten

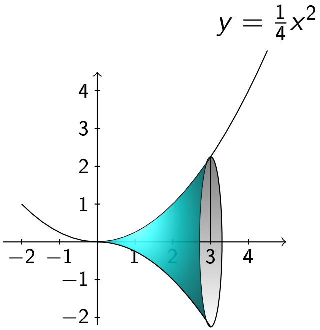
$$\boxed{V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx.}$$





ESIMERKKI 2.

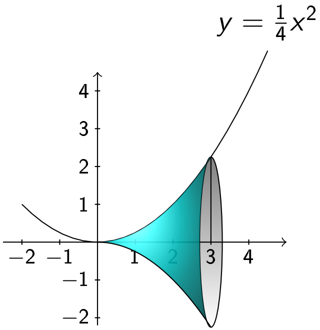
Käyrän $y = \frac{1}{4}x^2$, x-akselin ja suorien $x = 0$ ja $x = 3$ rajaama alue pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyvän kappaleen tilavuus.



ESIMERKKI 2.

Käyrän $y = \frac{1}{4}x^2$, x-akselin ja suorien $x = 0$ ja $x = 3$ rajaama alue pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyvän kappaleen tilavuus.

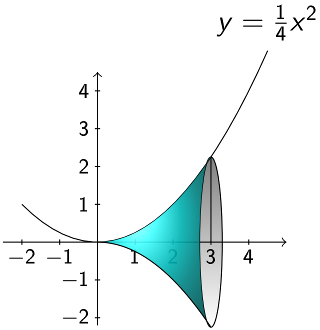
RATKAISU: Merkitään $f(x) = \frac{1}{4}x^2$, jolloin tilavuus V saadaan integraalina



ESIMERKKI 2.

Käyrän $y = \frac{1}{4}x^2$, x-akselin ja suorien $x = 0$ ja $x = 3$ rajaama alue pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyvän kappaleen tilavuus.
RATKAISU: Merkitään $f(x) = \frac{1}{4}x^2$, jolloin tilavuus V saadaan integraalina

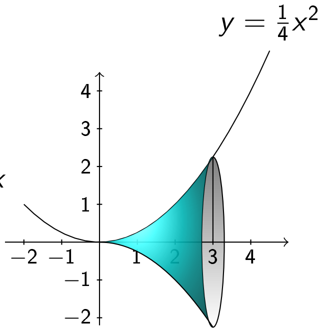
$$V = \pi \int_0^3 (f(x))^2 \, dx =$$



ESIMERKKI 2.

Käyrän $y = \frac{1}{4}x^2$, x-akselin ja suorien $x = 0$ ja $x = 3$ rajaama alue pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyvän kappaleen tilavuus.
RATKAISU: Merkitään $f(x) = \frac{1}{4}x^2$, jolloin tilavuus V saadaan integraalina

$$V = \pi \int_0^3 (f(x))^2 \, dx = \pi \int_0^3 \left(\frac{1}{4}x^2\right)^2 \, dx$$



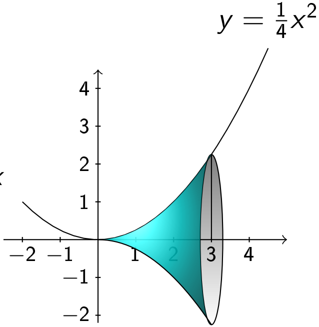
ESIMERKKI 2.

Käyrän $y = \frac{1}{4}x^2$, x-akselin ja suorien $x = 0$ ja $x = 3$ rajaama alue pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyvän kappaleen tilavuus.

RATKAISU: Merkitään $f(x) = \frac{1}{4}x^2$, jolloin tilavuus V saadaan integraalina

$$V = \pi \int_0^3 (f(x))^2\, dx = \pi \int_0^3 \left(\frac{1}{4}x^2\right)^2\, dx$$

$$= \frac{\pi}{16} \int_0^3 x^4\, dx =$$



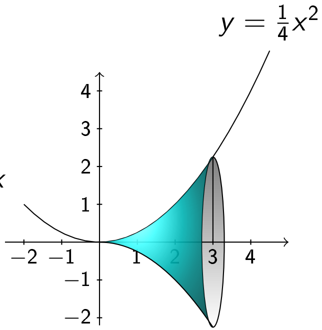
ESIMERKKI 2.

Käyrän $y = \frac{1}{4}x^2$, x-akselin ja suorien $x = 0$ ja $x = 3$ rajaama alue pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyvän kappaleen tilavuus.

RATKAISU: Merkitään $f(x) = \frac{1}{4}x^2$, jolloin tilavuus V saadaan integraalina

$$V = \pi \int_0^3 (f(x))^2\,dx = \pi \int_0^3 \left(\frac{1}{4}x^2\right)^2 dx$$

$$= \frac{\pi}{16} \int_0^3 x^4\,dx = \frac{\pi}{16} \Big/_0^3 \frac{1}{5}x^5$$



ESIMERKKI 2.

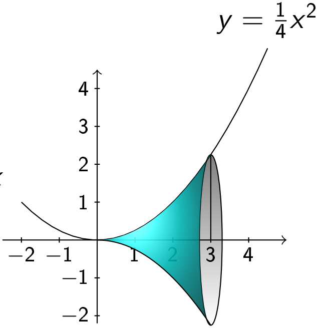
Käyrän $y = \frac{1}{4}x^2$, x-akselin ja suorien $x = 0$ ja $x = 3$ rajaama alue pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyvän kappaleen tilavuus.

RATKAISU: Merkitään $f(x) = \frac{1}{4}x^2$, jolloin tilavuus V saadaan integraalina

$$V = \pi \int_0^3 (f(x))^2\, dx = \pi \int_0^3 \left(\frac{1}{4}x^2\right)^2 dx$$

$$= \frac{\pi}{16} \int_0^3 x^4\, dx = \frac{\pi}{16} \Big/_0^3 \frac{1}{5}x^5$$

$$= \frac{\pi}{80}\left(3^5 - 0^5\right)$$



ESIMERKKI 2.

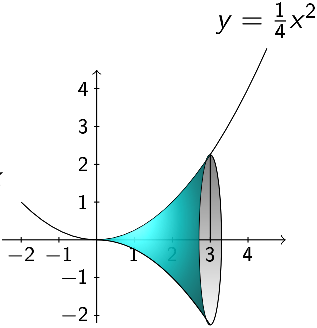
Käyrän $y = \frac{1}{4}x^2$, x-akselin ja suorien $x = 0$ ja $x = 3$ rajaama alue pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyvän kappaleen tilavuus.

RATKAISU: Merkitään $f(x) = \frac{1}{4}x^2$, jolloin tilavuus V saadaan integraalina

$$V = \pi \int_0^3 (f(x))^2 \, dx = \pi \int_0^3 \left(\frac{1}{4}x^2\right)^2 \, dx$$

$$= \frac{\pi}{16} \int_0^3 x^4 \, dx = \frac{\pi}{16} \Big/_0^3 \frac{1}{5}x^5$$

$$= \frac{\pi}{80}\left(3^5 - 0^5\right) = \frac{243\pi}{80}.$$



ESIMERKKI 2.

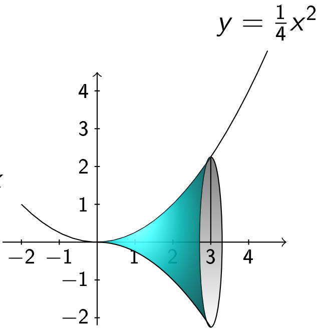
Käyrän $y = \frac{1}{4}x^2$, x-akselin ja suorien $x = 0$ ja $x = 3$ rajaama alue pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyvän kappaleen tilavuus.

RATKAISU: Merkitään $f(x) = \frac{1}{4}x^2$, jolloin tilavuus V saadaan integraalina

$$V = \pi \int_0^3 (f(x))^2\, dx = \pi \int_0^3 \left(\frac{1}{4}x^2\right)^2 dx$$

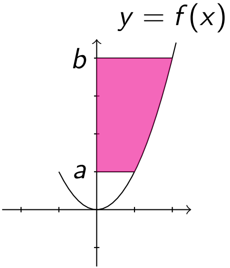
$$= \frac{\pi}{16} \int_0^3 x^4\, dx = \frac{\pi}{16} \Big/_0^3 \frac{1}{5}x^5$$

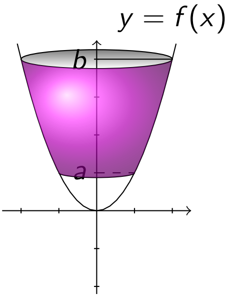
$$= \frac{\pi}{80}\left(3^5 - 0^5\right) = \frac{243\pi}{80}.$$



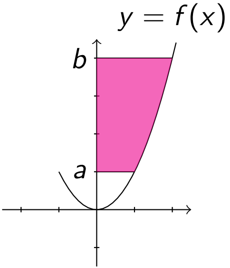
VASTAUS: $\frac{243\pi}{80} \approx 9,54$ (t.y.).

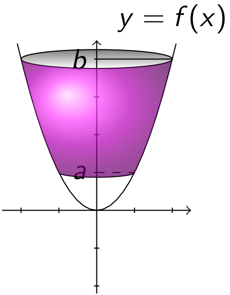
Käyrän $y = f(x)$, y-akselin ja suorien $y = a$ ja $y = b$ rajaama alue pyörähtää y-akselin ympäri.



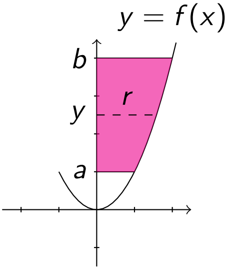


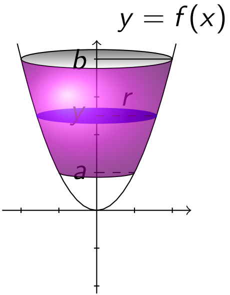
Käyrän $y = f(x)$, y-akselin ja suorien $y = a$ ja $y = b$ rajaama alue pyörähtää y-akselin ympäri. Tällöin on ensin ratkaistava yhtälö $y = f(x)$ muotoon $x = g(y)$.





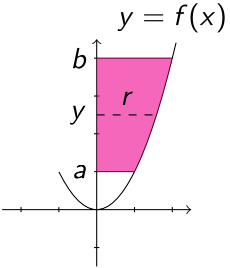
Käyrän $y = f(x)$, y-akselin ja suorien $y = a$ ja $y = b$ rajaama alue pyörähtää y-akselin ympäri. Tällöin on ensin ratkaistava yhtälö $y = f(x)$ muotoon $x = g(y)$. Nyt syntyvän pyörähdyskappaleen poikkileikkaus kohdassa y on

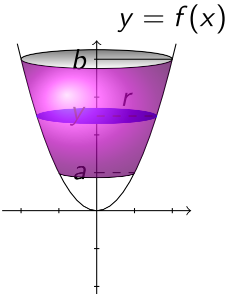




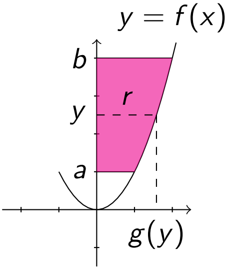
PYÖRÄHDYS y-AKSELIN YMPÄRI

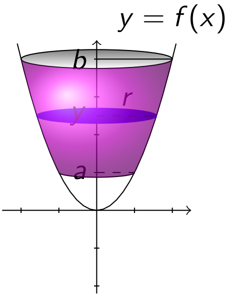
Käyrän $y = f(x)$, y-akselin ja suorien $y = a$ ja $y = b$ rajaama alue pyörähtää y-akselin ympäri. Tällöin on ensin ratkaistava yhtälö $y = f(x)$ muotoon $x = g(y)$. Nyt syntyvän pyörähdyskappaleen poikkileikkaus kohdassa y on ympyrä, jonka säde on



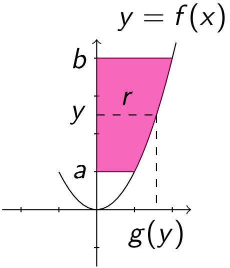


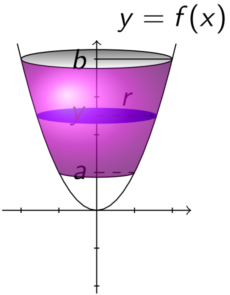
Käyrän $y = f(x)$, y-akselin ja suorien $y = a$ ja $y = b$ rajaama alue pyörähtää y-akselin ympäri. Tällöin on ensin ratkaistava yhtälö $y = f(x)$ muotoon $x = g(y)$. Nyt syntyvän pyörähdyskappaleen poikkileikkaus kohdassa y on ympyrä, jonka säde on $g(y)$.





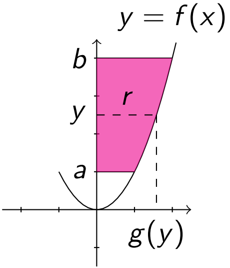
Käyrän $y = f(x)$, y-akselin ja suorien $y = a$ ja $y = b$ rajaama alue pyörähtää y-akselin ympäri. Tällöin on ensin ratkaistava yhtälö $y = f(x)$ muotoon $x = g(y)$. Nyt syntyvän pyörähdyskappaleen poikkileikkaus kohdassa y on ympyrä, jonka säde on $g(y)$. Poikkileikauksen pinta-ala $A(y)$ kohdassa y on siis

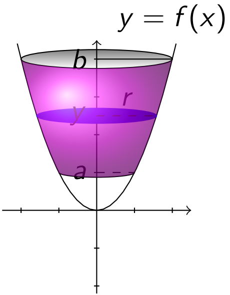




PYÖRÄHDYS y-AKSELIN YMPÄRI

Käyrän $y = f(x)$, y-akselin ja suorien $y = a$ ja $y = b$ rajaama alue pyörähtää y-akselin ympäri. Tällöin on ensin ratkaistava yhtälö $y = f(x)$ muotoon $x = g(y)$. Nyt syntyvän pyörähdyskappaleen poikkileikkaus kohdassa y on ympyrä, jonka säde on $g(y)$. Poikkileikauksen pinta-ala $A(y)$ kohdassa y on siis $A(y) = \pi\left(g(y)\right)^2$ ja kappaleen tilavuus V on siten

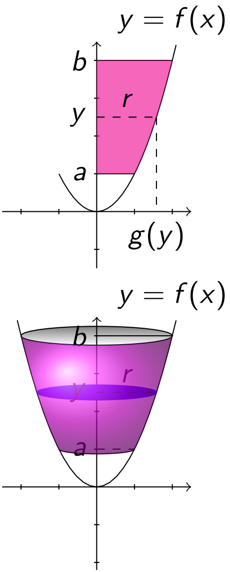




PYÖRÄHDYS y-AKSELIN YMPÄRI

Käyrän $y = f(x)$, y-akselin ja suorien $y = a$ ja $y = b$ rajaama alue pyörähtää y-akselin ympäri. Tällöin on ensin ratkaistava yhtälö $y = f(x)$ muotoon $x = g(y)$. Nyt syntyvän pyörähdyskappaleen poikkileikkaus kohdassa y on ympyrä, jonka säde on $g(y)$. Poikkileikkauksen pinta-ala $A(y)$ kohdassa y on siis $A(y) = \pi\,(g(y))^2$ ja kappaleen tilavuus V on siten

$$\boxed{V = \pi \int_a^b (g(y))^2 \, dy.}$$



PYÖRÄHDYS y-AKSELIN YMPÄRI

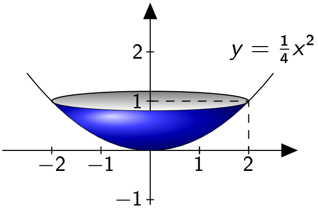
HUOMAUTUS 1: Mikäli alueen rajat on annettu muodossa $x = c$, $x = d$, ovat integroimisrajat $a = f(c)$ ja $b = f(d)$.

PYÖRÄHDYS y-AKSELIN YMPÄRI

HUOMAUTUS 1: Mikäli alueen rajat on annettu muodossa $x = c$, $x = d$, ovat integroimisrajat $a = f(c)$ ja $b = f(d)$.
HUOMAUTUS 2: Alueen rajat voivat kummassakin pyörähdystapauksessa olla annettuna joidenkin käyrien leikkauspisteinä, jolloin integroimisrajat on laskettava kulloisenkin muuttujan suhteen.

ESIMERKKI 3.

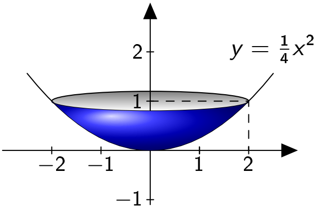
Käyrä $y = \frac{1}{4}x^2$ pyörähtää y-akselin ympäri, kun x on välillä $[0, 2]$. Laske syntyneen kappaleen tilavuus.



ESIMERKKI 3.

Käyrä $y = \frac{1}{4}x^2$ pyörähtää y-akselin ympäri, kun x on välillä $[0, 2]$. Laske syntyneen kappaleen tilavuus.

RATKAISU: Pyörähdys tapahtuu y-akselin ympäri, joten ratkaistaan x y:n suhteen

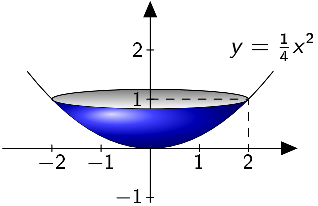


ESIMERKKI 3.

Käyrä $y = \frac{1}{4}x^2$ pyörähtää y-akselin ympäri, kun x on välillä $[0, 2]$. Laske syntyneen kappaleen tilavuus.

RATKAISU: Pyörähdys tapahtuu y-akselin ympäri, joten ratkaistaan x y:n suhteen

$$y = \frac{1}{4}x^2 \;\Big|\; \cdot 4$$



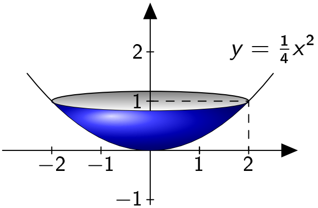
ESIMERKKI 3.

Käyrä $y = \frac{1}{4}x^2$ pyörähtää y-akselin ympäri, kun x on välillä $[0, 2]$. Laske syntyneen kappaleen tilavuus.

RATKAISU: Pyörähdys tapahtuu y-akselin ympäri, joten ratkaistaan x y:n suhteen

$$y = \frac{1}{4}x^2 \quad \Big| \cdot 4$$

$$4y = x^2$$

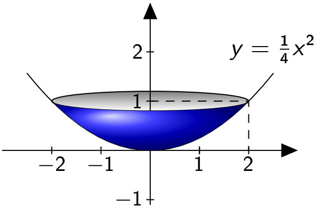


ESIMERKKI 3.

Käyrä $y = \frac{1}{4}x^2$ pyörähtää y-akselin ympäri, kun x on välillä $[0, 2]$. Laske syntyneen kappaleen tilavuus.

RATKAISU: Pyörähdys tapahtuu y-akselin ympäri, joten ratkaistaan x y:n suhteen

$$y = \frac{1}{4}x^2 \;\Big|\; \cdot 4$$
$$4y = x^2$$
$$x = \pm\sqrt{4y}$$



ESIMERKKI 3.

Käyrä $y = \frac{1}{4}x^2$ pyörähtää y-akselin ympäri, kun x on välillä $[0, 2]$. Laske syntyneen kappaleen tilavuus.

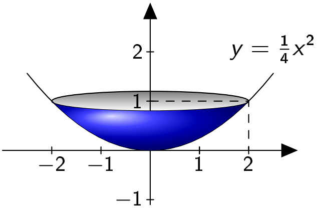
RATKAISU: Pyörähdys tapahtuu y-akselin ympäri, joten ratkaistaan x y:n suhteen

$$y = \frac{1}{4}x^2 \;\Big|\cdot 4$$

$$4y = x^2$$

$$x = \pm\sqrt{4y}$$

$$x = \pm 2\sqrt{y}.$$

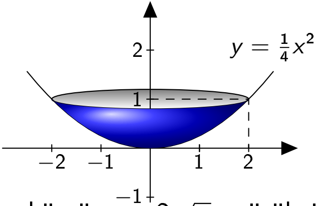


ESIMERKKI 3.

Käyrä $y = \frac{1}{4}x^2$ pyörähtää y-akselin ympäri, kun x on välillä $[0, 2]$. Laske syntyneen kappaleen tilavuus.

RATKAISU: Pyörähdys tapahtuu y-akselin ympäri, joten ratkaistaan x y:n suhteen

$$y = \frac{1}{4}x^2 \quad \Big| \cdot 4$$
$$4y = x^2$$
$$x = \pm\sqrt{4y}$$
$$x = \pm 2\sqrt{y}.$$



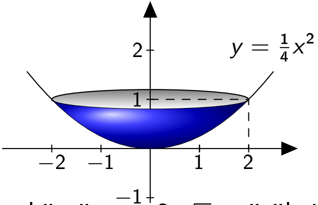
Koska $x \in [0, 2]$, riittää tarkastella, kun käyrä $x = 2\sqrt{y}$ pyörähtää y-akselin ympäri.

ESIMERKKI 3.

Käyrä $y = \frac{1}{4}x^2$ pyörähtää y-akselin ympäri, kun x on välillä $[0, 2]$. Laske syntyneen kappaleen tilavuus.

RATKAISU: Pyörähdys tapahtuu y-akselin ympäri, joten ratkaistaan x y:n suhteen

$$y = \frac{1}{4}x^2 \quad \Big| \cdot 4$$
$$4y = x^2$$
$$x = \pm\sqrt{4y}$$
$$x = \pm 2\sqrt{y}.$$



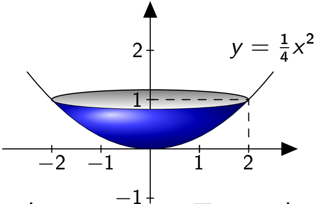
Koska $x \in [0, 2]$, riittää tarkastella, kun käyrä $x = 2\sqrt{y}$ pyörähtää y-akselin ympäri. Kun $x = 0$, niin

ESIMERKKI 3.

Käyrä $y = \frac{1}{4}x^2$ pyörähtää y-akselin ympäri, kun x on välillä $[0, 2]$. Laske syntyneen kappaleen tilavuus.

RATKAISU: Pyörähdys tapahtuu y-akselin ympäri, joten ratkaistaan x y:n suhteen

$$y = \frac{1}{4}x^2 \;\Big|\; \cdot 4$$
$$4y = x^2$$
$$x = \pm\sqrt{4y}$$
$$x = \pm 2\sqrt{y}.$$



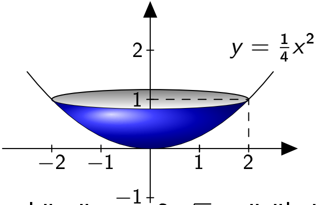
Koska $x \in [0, 2]$, riittää tarkastella, kun käyrä $x = 2\sqrt{y}$ pyörähtää y-akselin ympäri. Kun $x = 0$, niin $y = \frac{1}{4} \cdot 0^2 = 0$ ja kun $x = 2$, niin

ESIMERKKI 3.

Käyrä $y = \frac{1}{4}x^2$ pyörähtää y-akselin ympäri, kun x on välillä $[0, 2]$. Laske syntyneen kappaleen tilavuus.

RATKAISU: Pyörähdys tapahtuu y-akselin ympäri, joten ratkaistaan x y:n suhteen

$$y = \frac{1}{4}x^2 \;\Big|\; \cdot 4$$
$$4y = x^2$$
$$x = \pm\sqrt{4y}$$
$$x = \pm 2\sqrt{y}.$$



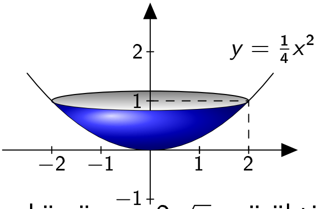
Koska $x \in [0, 2]$, riittää tarkastella, kun käyrä $x = 2\sqrt{y}$ pyörähtää y-akselin ympäri. Kun $x = 0$, niin $y = \frac{1}{4} \cdot 0^2 = 0$ ja kun $x = 2$, niin $y = \frac{1}{4} \cdot 2^2 = 1$.

ESIMERKKI 3.

Käyrä $y = \frac{1}{4}x^2$ pyörähtää y-akselin ympäri, kun x on välillä $[0, 2]$. Laske syntyneen kappaleen tilavuus.

RATKAISU: Pyörähdys tapahtuu y-akselin ympäri, joten ratkaistaan x y:n suhteen

$$y = \frac{1}{4}x^2 \quad \Big| \cdot 4$$
$$4y = x^2$$
$$x = \pm\sqrt{4y}$$
$$x = \pm 2\sqrt{y}.$$



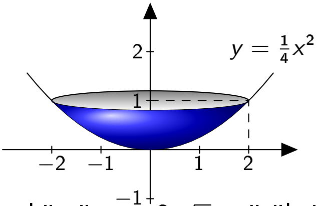
Koska $x \in [0, 2]$, riittää tarkastella, kun käyrä $x = 2\sqrt{y}$ pyörähtää y-akselin ympäri. Kun $x = 0$, niin $y = \frac{1}{4} \cdot 0^2 = 0$ ja kun $x = 2$, niin $y = \frac{1}{4} \cdot 2^2 = 1$. Siis kysytty tilavuus on

ESIMERKKI 3.

Käyrä $y = \frac{1}{4}x^2$ pyörähtää y-akselin ympäri, kun x on välillä $[0, 2]$. Laske syntyneen kappaleen tilavuus.

RATKAISU: Pyörähdys tapahtuu y-akselin ympäri, joten ratkaistaan x y:n suhteen

$$y = \frac{1}{4}x^2 \quad \Big| \cdot 4$$
$$4y = x^2$$
$$x = \pm\sqrt{4y}$$
$$x = \pm 2\sqrt{y}.$$



Koska $x \in [0, 2]$, riittää tarkastella, kun käyrä $x = 2\sqrt{y}$ pyörähtää y-akselin ympäri. Kun $x = 0$, niin $y = \frac{1}{4} \cdot 0^2 = 0$ ja kun $x = 2$, niin $y = \frac{1}{4} \cdot 2^2 = 1$. Siis kysytty tilavuus on

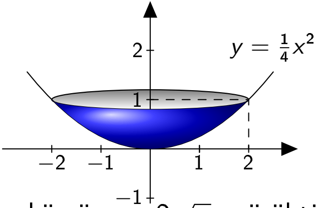
$$V =$$

ESIMERKKI 3.

Käyrä $y = \frac{1}{4}x^2$ pyörähtää y-akselin ympäri, kun x on välillä $[0, 2]$. Laske syntyneen kappaleen tilavuus.

RATKAISU: Pyörähdys tapahtuu y-akselin ympäri, joten ratkaistaan x y:n suhteen

$$y = \frac{1}{4}x^2 \quad \Big| \cdot 4$$
$$4y = x^2$$
$$x = \pm\sqrt{4y}$$
$$x = \pm 2\sqrt{y}.$$



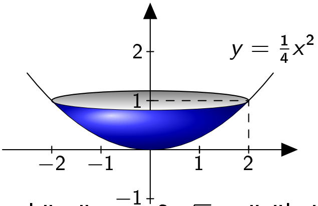
Koska $x \in [0, 2]$, riittää tarkastella, kun käyrä $x = 2\sqrt{y}$ pyörähtää y-akselin ympäri. Kun $x = 0$, niin $y = \frac{1}{4} \cdot 0^2 = 0$ ja kun $x = 2$, niin $y = \frac{1}{4} \cdot 2^2 = 1$. Siis kysytty tilavuus on

$$V = \pi \int_0^1 (2\sqrt{y})^2 \; dy =$$

ESIMERKKI 3.

Käyrä $y = \frac{1}{4}x^2$ pyörähtää y-akselin ympäri, kun x on välillä $[0, 2]$. Laske syntyneen kappaleen tilavuus.
RATKAISU: Pyörähdys tapahtuu y-akselin ympäri, joten ratkaistaan x y:n suhteen

$$
\begin{aligned}
y &= \tfrac{1}{4}x^2 \quad \Big| \cdot 4 \\
4y &= x^2 \\
x &= \pm\sqrt{4y} \\
x &= \pm 2\sqrt{y}.
\end{aligned}
$$



Koska $x \in [0, 2]$, riittää tarkastella, kun käyrä $x = 2\sqrt{y}$ pyörähtää y-akselin ympäri. Kun $x = 0$, niin $y = \frac{1}{4} \cdot 0^2 = 0$ ja kun $x = 2$, niin $y = \frac{1}{4} \cdot 2^2 = 1$. Siis kysytty tilavuus on

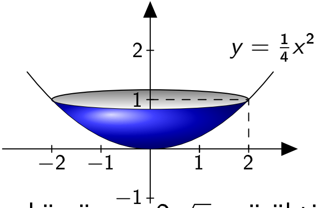
$$V = \pi \int_0^1 (2\sqrt{y})^2 \, dy = \pi \int_0^1 4y \, dy =$$

ESIMERKKI 3.

Käyrä $y = \frac{1}{4}x^2$ pyörähtää y-akselin ympäri, kun x on välillä $[0, 2]$. Laske syntyneen kappaleen tilavuus.

RATKAISU: Pyörähdys tapahtuu y-akselin ympäri, joten ratkaistaan x y:n suhteen

$$y = \frac{1}{4}x^2 \quad \Big| \cdot 4$$
$$4y = x^2$$
$$x = \pm\sqrt{4y}$$
$$x = \pm 2\sqrt{y}.$$



Koska $x \in [0, 2]$, riittää tarkastella, kun käyrä $x = 2\sqrt{y}$ pyörähtää y-akselin ympäri. Kun $x = 0$, niin $y = \frac{1}{4} \cdot 0^2 = 0$ ja kun $x = 2$, niin $y = \frac{1}{4} \cdot 2^2 = 1$. Siis kysytty tilavuus on

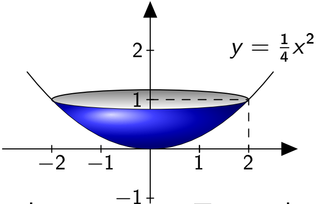
$$V = \pi \int_0^1 (2\sqrt{y})^2 \; dy = \pi \int_0^1 4y \, dy = \pi \Big/_0^1 2y^2$$

ESIMERKKI 3.

Käyrä $y = \frac{1}{4}x^2$ pyörähtää y-akselin ympäri, kun x on välillä $[0, 2]$. Laske syntyneen kappaleen tilavuus.

RATKAISU: Pyörähdys tapahtuu y-akselin ympäri, joten ratkaistaan x y:n suhteen

$$
\begin{aligned}
y &= \tfrac{1}{4}x^2 \quad \Big| \cdot 4 \\
4y &= x^2 \\
x &= \pm\sqrt{4y} \\
x &= \pm 2\sqrt{y}.
\end{aligned}
$$



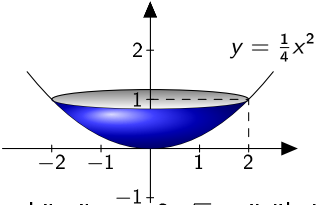
Koska $x \in [0, 2]$, riittää tarkastella, kun käyrä $x = 2\sqrt{y}$ pyörähtää y-akselin ympäri. Kun $x = 0$, niin $y = \frac{1}{4} \cdot 0^2 = 0$ ja kun $x = 2$, niin $y = \frac{1}{4} \cdot 2^2 = 1$. Siis kysytty tilavuus on

$$V = \pi \int_0^1 (2\sqrt{y})^2 \, dy = \pi \int_0^1 4y \, dy = \pi \Big/_0^1 2y^2 = 2\pi.$$

ESIMERKKI 3.

Käyrä $y = \frac{1}{4}x^2$ pyörähtää y-akselin ympäri, kun x on välillä $[0, 2]$. Laske syntyneen kappaleen tilavuus.
RATKAISU: Pyörähdys tapahtuu y-akselin ympäri, joten ratkaistaan x y:n suhteen

$$y = \frac{1}{4}x^2 \quad \Big| \cdot 4$$
$$4y = x^2$$
$$x = \pm\sqrt{4y}$$
$$x = \pm 2\sqrt{y}.$$



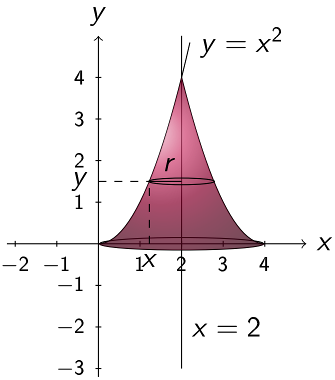
Koska $x \in [0, 2]$, riittää tarkastella, kun käyrä $x = 2\sqrt{y}$ pyörähtää y-akselin ympäri. Kun $x = 0$, niin $y = \frac{1}{4} \cdot 0^2 = 0$ ja kun $x = 2$, niin $y = \frac{1}{4} \cdot 2^2 = 1$. Siis kysytty tilavuus on

$$V = \pi \int_0^1 (2\sqrt{y})^2 \, dy = \pi \int_0^1 4y \, dy = \pi \Big/_0^1 2y^2 = 2\pi.$$

VASTAUS: $2\pi \approx 6,3$ (t.y).

ESIMERKKI 4. (pyörähdys y-akselin suuntaisen suoran ympäri)

Laske sen kappaleen tilavuus, joka syntyy käyrän $y = x^2$, x-akselin ja suoran $x = 2$ rajoittaman alueen pyörähtäessä suoran $x = 2$ ympäri.

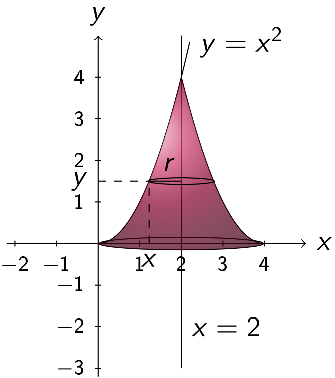


ESIMERKKI 4. (pyörähdys y-akselin suuntaisen suoran ympäri)

Laske sen kappaleen tilavuus, joka syntyy käyrän $y = x^2$, x-akselin ja suoran $x = 2$ rajoittaman alueen pyörähtäessä suoran $x = 2$ ympäri.

RATKAISU: Suoran $x = 2$ ja paraabelin $y = x^2$ leikkauspiste saadaan sijoittamalla

$$y = x^2 = 2^2 = 4.$$



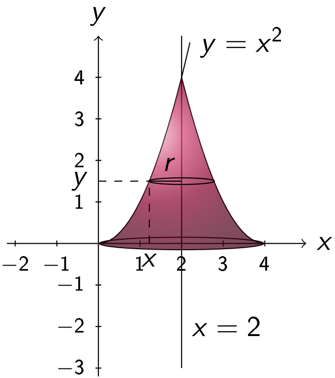
ESIMERKKI 4. (pyörähdys y-akselin suuntaisen suoran ympäri)

Laske sen kappaleen tilavuus, joka syntyy käyrän $y = x^2$, x-akselin ja suoran $x = 2$ rajoittaman alueen pyörähtäessä suoran $x = 2$ ympäri.

RATKAISU: Suoran $x = 2$ ja paraabelin $y = x^2$ leikkauspiste saadaan sijoittamalla

$$y = x^2 = 2^2 = 4.$$

Tutkitaan siis syntynyttä pyörähdyskappaletta välillä $0 \leq y \leq 4$.



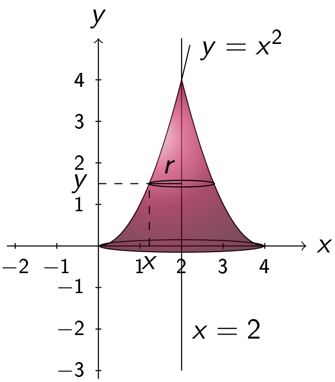
ESIMERKKI 4. (pyörähdys y-akselin suuntaisen suoran ympäri)

Laske sen kappaleen tilavuus, joka syntyy käyrän $y = x^2$, x-akselin ja suoran $x = 2$ rajoittaman alueen pyörähtäessä suoran $x = 2$ ympäri.

RATKAISU: Suoran $x = 2$ ja paraabelin $y = x^2$ leikkauspiste saadaan sijoittamalla

$$y = x^2 = 2^2 = 4.$$

Tutkitaan siis syntynyttä pyörähdyskappaletta välillä $0 \leq y \leq 4$. Ratkaistaan seuraavaksi kohdassa y olevan leikkausympyrän säde r :



ESIMERKKI 4. (pyörähdys y-akselin suuntaisen suoran ympäri)

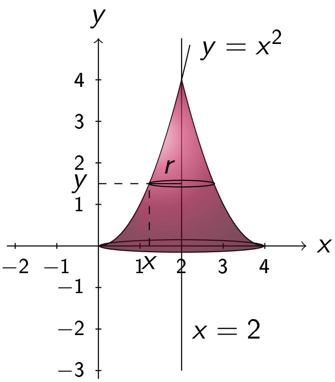
Laske sen kappaleen tilavuus, joka syntyy käyrän $y = x^2$, x-akselin ja suoran $x = 2$ rajoittaman alueen pyörähtäessä suoran $x = 2$ ympäri.

RATKAISU: Suoran $x = 2$ ja paraabelin $y = x^2$ leikkauspiste saadaan sijoittamalla

$$y = x^2 = 2^2 = 4.$$

Tutkitaan siis syntynyttä pyörähdyskappaletta välillä $0 \leq y \leq 4$. Ratkaistaan seuraavaksi kohdassa y olevan leikkausympyrän säde r :

$$y = x^2$$



ESIMERKKI 4. (pyörähdys y-akselin suuntaisen suoran ympäri)

Laske sen kappaleen tilavuus, joka syntyy käyrän $y = x^2$, x-akselin ja suoran $x = 2$ rajoittaman alueen pyörähtäessä suoran $x = 2$ ympäri.

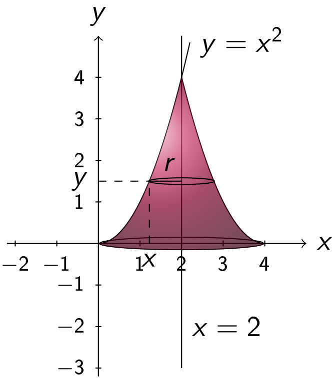
RATKAISU: Suoran $x = 2$ ja paraabelin $y = x^2$ leikkauspiste saadaan sijoittamalla

$$y = x^2 = 2^2 = 4.$$

Tutkitaan siis syntynyttä pyörähdyskappaletta välillä $0 \leq y \leq 4$. Ratkaistaan seuraavaksi kohdassa y olevan leikkausympyrän säde r :

$$y = x^2$$

$$x = \sqrt{y}, \ x \geq 0.$$



ESIMERKKI 4.

Edelleen sijoittamalla saadaan

$$r =$$

ESIMERKKI 4.

Edelleen sijoittamalla saadaan

$$r = 2 - x =$$

ESIMERKKI 4.

Edelleen sijoittamalla saadaan

$$r = 2 - x = 2 - \sqrt{y}.$$

ESIMERKKI 4.

Edelleen sijoittamalla saadaan

$$r = 2 - x = 2 - \sqrt{y}.$$

Nyt voidaan laskea kappaleen tilavuus määrätyn integraalin avulla

$$V =$$

ESIMERKKI 4.

Edelleen sijoittamalla saadaan

$$r = 2 - x = 2 - \sqrt{y}.$$

Nyt voidaan laskea kappaleen tilavuus määrätyn integraalin avulla

$$V = \pi \int_0^4 (2 - \sqrt{y})^2 \, dy$$

$$=$$

ESIMERKKI 4.

Edelleen sijoittamalla saadaan

$$r = 2 - x = 2 - \sqrt{y}.$$

Nyt voidaan laskea kappaleen tilavuus määrätyn integraalin avulla

$$V = \pi \int_0^4 (2 - \sqrt{y})^2 dy$$

$$= \pi \int_0^4 (4 - 4\sqrt{y} + y) dy$$

ESIMERKKI 4.

Edelleen sijoittamalla saadaan

$$r = 2 - x = 2 - \sqrt{y}.$$

Nyt voidaan laskea kappaleen tilavuus määrätyn integraalin avulla

$$V = \pi \int_0^4 (2 - \sqrt{y})^2 dy$$

$$= \pi \int_0^4 (4 - 4\sqrt{y} + y) dy = \pi \Big/_0^4 (4y - \frac{8}{3} y^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} y^2)$$

ESIMERKKI 4.

Edelleen sijoittamalla saadaan

$$r = 2 - x = 2 - \sqrt{y}.$$

Nyt voidaan laskea kappaleen tilavuus määrätyn integraalin avulla

$$V = \pi \int_0^4 (2 - \sqrt{y})^2 dy$$

$$= \pi \int_0^4 (4 - 4\sqrt{y} + y)dy = \pi \Big/_0^4 (4y - \frac{8}{3}y^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}y^2)$$

$$= \pi \left[(4 \cdot 4 - \frac{8}{3} \cdot 4\sqrt{4} + \frac{1}{2} \cdot 4^2) - (4 \cdot 0 - \frac{8}{3} \cdot 0\sqrt{0} + \frac{1}{2} \cdot 0^2) \right]$$

$$=$$

ESIMERKKI 4.

Edelleen sijoittamalla saadaan

$$r = 2 - x = 2 - \sqrt{y}.$$

Nyt voidaan laskea kappaleen tilavuus määrätyn integraalin avulla

$$V = \pi \int_0^4 (2 - \sqrt{y})^2 dy$$

$$= \pi \int_0^4 (4 - 4\sqrt{y} + y) dy = \pi \Big/_0^4 (4y - \frac{8}{3} y^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} y^2)$$

$$= \pi \left[(4 \cdot 4 - \frac{8}{3} \cdot 4\sqrt{4} + \frac{1}{2} \cdot 4^2) - (4 \cdot 0 - \frac{8}{3} \cdot 0\sqrt{0} + \frac{1}{2} \cdot 0^2) \right]$$

$$= \frac{8}{3}\pi$$

ESIMERKKI 4.

Edelleen sijoittamalla saadaan

$$r = 2 - x = 2 - \sqrt{y}.$$

Nyt voidaan laskea kappaleen tilavuus määrätyn integraalin avulla

$$V = \pi \int_0^4 (2 - \sqrt{y})^2 \, dy$$

$$= \pi \int_0^4 (4 - 4\sqrt{y} + y) dy = \pi \Big/_0^4 (4y - \frac{8}{3} y^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} y^2)$$

$$= \pi \left[(4 \cdot 4 - \frac{8}{3} \cdot 4\sqrt{4} + \frac{1}{2} \cdot 4^2) - (4 \cdot 0 - \frac{8}{3} \cdot 0\sqrt{0} + \frac{1}{2} \cdot 0^2) \right]$$

$$= \frac{8}{3}\pi \approx 8,38.$$

ESIMERKKI 4.

Edelleen sijoittamalla saadaan

$$r = 2 - x = 2 - \sqrt{y}.$$

Nyt voidaan laskea kappaleen tilavuus määrätyn integraalin avulla

$$V = \pi \int_0^4 (2 - \sqrt{y})^2 dy$$

$$= \pi \int_0^4 (4 - 4\sqrt{y} + y) dy = \pi \Big/_0^4 (4y - \frac{8}{3} y^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} y^2)$$

$$= \pi \left[(4 \cdot 4 - \frac{8}{3} \cdot 4\sqrt{4} + \frac{1}{2} \cdot 4^2) - (4 \cdot 0 - \frac{8}{3} \cdot 0\sqrt{0} + \frac{1}{2} \cdot 0^2) \right]$$

$$= \frac{8}{3}\pi \approx 8,38.$$

VASTAUS: $\frac{8}{3}\pi \approx 8,38$ (t.y.).