Sivu 11.12. klo 11:09

RAJA-ARVO, JATKUVUUS JA DERIVAATTA

Esimerkkejä

1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$

Osoittaja: $\lim\limits_{x\to1}\left(x^2-3x+2\right)=0$

Nimittäjä $\lim\limits_{x\to1}x-1=0$

Osoittajan nollakohdat $x^2-3x+2=0$

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}=\frac{3\pm1}{2}=\begin{cases}2\\1\end{cases}$$

Siis $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-2)(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x-2)=-1$

2) $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}$

Sekä osoittajan, että nimittäjän raja-arvot ovat nollia, kun x lähestyy lukua 6.

$$\sqrt{x+3}+3)\ \frac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}=\frac{\left(\sqrt{x+3}+3\right)\left(\sqrt{x+3}-3\right)}{(x-6)\left(\sqrt{x+3}+3\right)}=\frac{x+3-9}{(x-6)\left(\sqrt{x+3}+3\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x+3}+3}$$

Lasketaan raja-arvo

$$\lim_{x\to6}\frac{1}{\sqrt{x+3}+3}=\frac{1}{6}$$

Jatkuvuus Jos $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$, niin funktio $f(x)$ on jatkuva pisteessä $x=a$.

3) Määritä sellainen vakio a , että $f(x)=\begin{cases}x^2+a, & \text{kun } x\geq1\\3x-a & \text{kun } x<1\end{cases}$ on jatkuva kaikkialla.

Jos $x\neq1$, niin $f(x)$ on jakuva polynomifunktiona.

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(3x-a)=3-a$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\left(x^2+a\right)=1+a$$

$$f(1)=1+a$$

Siis $3-a=1+a\,(=1+a)$

$$2a=2$$

$$a=1$$

VASTAUS: $a=1$

Derivaatta

$$f'(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Määritä määritelmän perusteella $f'(2)$, kun $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{\frac{1}{(2+h)^2}-\frac{1}{4}}{h}=\frac{4-(2+h)^2}{h(2+h)^2\cdot 4}=\frac{4-4-4h-h^2}{4h(2+h)^2}$$

$$=\frac{-4h-h^2}{4h(2+h)^2}=\frac{-4-h}{4(2+h)^2}$$

Lasketaan raja-arvo

$$\lim_{h\to 0}\frac{-4-h}{4(2+h)^2}=\frac{-4}{4\cdot 4}=-\frac{1}{4}$$