

1. Kombinatoriikkaa ja todennäköisyyksiä 12 p.

Valitse kussakin kohdassa oikea vaihtoehto.

1.1. Kuinka moneen eri järjestykseen voidaan asettaa seitsemän eriväristä palloa? 2 p.

- ☐ 70 ☐ 720 ☐ 7 ☒ 5040 ☐ 49 ☐ 700

1.2. 20 opiskelijan ryhmästä valitaan 5 opiskelijaa opintomatkalle ulkomaille. Kuinka monella eri tavalla 5 opiskelijan ryhmä voidaan muodostaa? 2 p.

- ☐ 95 367 431 640 625
☐ 4
☐ 3 200 000
☒ 15 504
☐ 25

1.3. Laatikossa on sekaisin 25 erilaista sukkaparia eli 50 sukkaa. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti nostetut sukat ovat samaa paria? 2 p.

- ☐ $\frac{1}{50}$ ☐ 0,49 % ☐ 49 % ☒ 2,04 % ☐ 50 %

1.4. Sievennä lauseke $\binom{n+1}{n}$ kun n on positiivinen kokonaisluku. 2 p.

- ☐ n ☐ 1 ☐ $n!$ ☒ $n+1$ ☐ $(n+1)!$

1.5. Erään normaalijakautuneen lintulajin siipivälin odotusarvo on 24 cm ja keskihajonta 3 cm. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti bongatun linnun siipiväli on korkeintaan 30 cm? 2 p.

- ☐ 99,18 % ☒ 97,72 % ☐ 57,93 % ☐ 50 % ☐ 50,80 % ☐ 99,87 %

1.6. Funktio

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq \sqrt[3]{3} \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

on satunnaismuuttujan X tiheysfunktio. Tämän perusteella $P(X < 1)$ on 2 p.

- ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ ☐ $\frac{3}{3}$ ☐ 0 ☒ $\frac{1}{3}$

2. Derivaatta 12 p.

2.1. Määritä funktion $f(x) = -5x^2 - 100x$ derivaatan nollakohta. 4 p.

2.2. Määritä funktion $f(x) = -5x^2 - 100x$ suurin arvo. 4 p.

2.3. Määritä funktion $f(x) = -5x^2 - 100x$ kuvaajalle kohtaan $x = 1$ piirretyn tangentin yhtälö. 4 p.

2.1

Funktion derivaatta:

$$f'(x) = -10x - 100$$

Merkitään derivaatta nolaksi ja ratkaistaan yhtälö:

$$-10x - 100 = 0$$

$$x = -10$$

Derivaatta: 2p

Derivaatta merkitty nolaksi: 1p

Oikea derivaatan nolakohta: 1p

2.2

Funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Funktion suurin arvo löytyy sen derivaatan nolakohdasta.

Edellisen kohdan perusteella funktion derivaatan nolakohta on $x = -10$.

Funktion suurin arvo siis:

$$f(-10) = -5 \cdot (-10)^2 - 100 \cdot (-10) = -500 + 1000 = 500$$

Oikea päättely: 2p

1p

$$f(-10)$$

Vastaus 1p

(Jos vastauksena annettu -10 , max 2p)

2.3

Kohtaan $x = 1$ piirretyn tangentin kulmakerroin saadaan funktion derivaatasta kohdassa $x = 1$:

$$f'(1) = -10 \cdot 1 - 100 = -110$$

Kohdan $x = 1$ y-koordinaatti on $f(1)$:

$$f(1) = -5 \cdot 1^2 - 100 \cdot 1 = -105$$

Tangentin yhtälö saadaan nyt yhtälöstä

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

$$y - (-105) = -110(x - 1)$$

$$y + 105 = -110x + 110$$

$$y = -110x + 5$$

$f(1)$ laskettu oikein 1p

Tangentin runko oikein 1p

Oikea vastaus 2p

3. Trigonometria 12 p.

3.1. Määritä $\sin(\alpha)$, kun $\cos(\alpha) = \frac{2}{3}$ ja $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. 6 p.

3.2. Määritä yhtälön $2 \cos^2(x) = 1$ ne ratkaisut, jotka ovat välillä $[2\pi, 4\pi]$. 6 p.

3.1

$$\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = \pm\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}$$

$$\sin(\alpha) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)} \quad (\text{valitaan positiivinen vaihtoehto, koska kulma kuuluu välille } \left[0, \frac{\pi}{2}\right])$$

$$\sin(\alpha) = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$\sin(\alpha) = \sqrt{1 - \frac{4}{9}}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

1p per rivi

3.2

$$2 \cos^2(x) = 1$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}$$

$$\cos(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 1\text{p}$$

Tutkitaan erikseen positiivinen ja negatiivinen ratkaisu.
Positiivinen ratkaisu:

$$\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi \quad 1\text{p}$$

Annetun välin ratkaisut ovat:

$$\frac{9\pi}{4} \text{ ja } \frac{15\pi}{4} \quad 1\text{p}$$

Negatiivinen ratkaisu:

$$\cos(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = \pm \frac{3\pi}{4} + n \cdot 2\pi \quad 1\text{p}$$

Annetun välin ratkaisut ovat:

$$\frac{11\pi}{4} \text{ ja } \frac{13\pi}{4} \quad 1\text{p}$$

Vastaus:

$$x \in \left\{ \frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}, \frac{15\pi}{4} \right\} \quad 1\text{p}$$

Pisteytys merkitty ratkaisun eri vaiheisiin

Ratkaisussa käytetty asteita: max 3p

Vastauksessa ei huomioitu annettua väliä: max 3p

Ratkaisun alussa $\pm$ puuttuu ja tutkittu vain positiivista ratkaisua: max 3p

4. Yhtälölle ratkaisut 12 p.

Määritä vakion a arvo/arvot siten, että yhtälöllä $4x^3 + ax^2 + x = 0$ on täsmälleen kaksi ratkaisua. Määritä tätä vakiota vastaavan yhtälön ratkaisut.

$$4x^3 + a \cdot x^2 + x = 0$$

1p

$$x(4x^2 + a \cdot x + 1) = 0$$

1p

$$x = 0 \text{ tai } 4x^2 + a \cdot x + 1 = 0$$

Ratkaisuja on kaksi, jos toisen asteen yhtälöllä on täsmälleen yksi ratkaisu (1p). Toisen asteen yhtälön diskriminantti

2p

$$D = a^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1$$

2p Oltava $D=0$, joten

$$a^2 - 16 = 0$$

$$a^2 = 16$$

2p

$$a = 4 \text{ tai } a = -4$$

Jos $a=4$, niin

$$4x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$(2x + 1)^2 = 0$$

$$2x + 1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

2p

ja toinen alkuperäisen yhtälön ratkaisu on $x=0$.

Jos $a=-4$, niin

$$4x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$(2x - 1)^2 = 0$$

$$2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

1p

ja toinen alkuperäisen yhtälön ratkaisu on $x=0$.

Pisteytys: merkitty laskujen viereen

5. Hyttysiä ja muurahaisia 12 p.

Huoneen pituus on 6 m, leveys 5 m ja korkeus 3 m. Laske lyhin reitti katon nurkasta lattian keskipisteeseen

5.1. hyttyselle 6 p.

5.2. muurahaiselle. 6 p.

5.1

Hyttynen lentää suoraan lähtöpaikastaan lattian keskipisteeseen. Tällöin sijainnin korkeus muuttuu 3m, pituus 3m ja leveys 2,5 m. Kuljettu matka on tällöin:

Tarkka arvo: $\sqrt{3^2 + 3^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} \rightarrow \frac{\sqrt{97}}{2}$

Likiarvo: $\sqrt{3^2 + 3^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} \rightarrow 4.92443$

Vastaus: Hyttysen lyhimmän reitin pituus on noin 4,9 metriä.

Pisteytys:

Oikea päätelmä 2p

Oikea lasku 4p

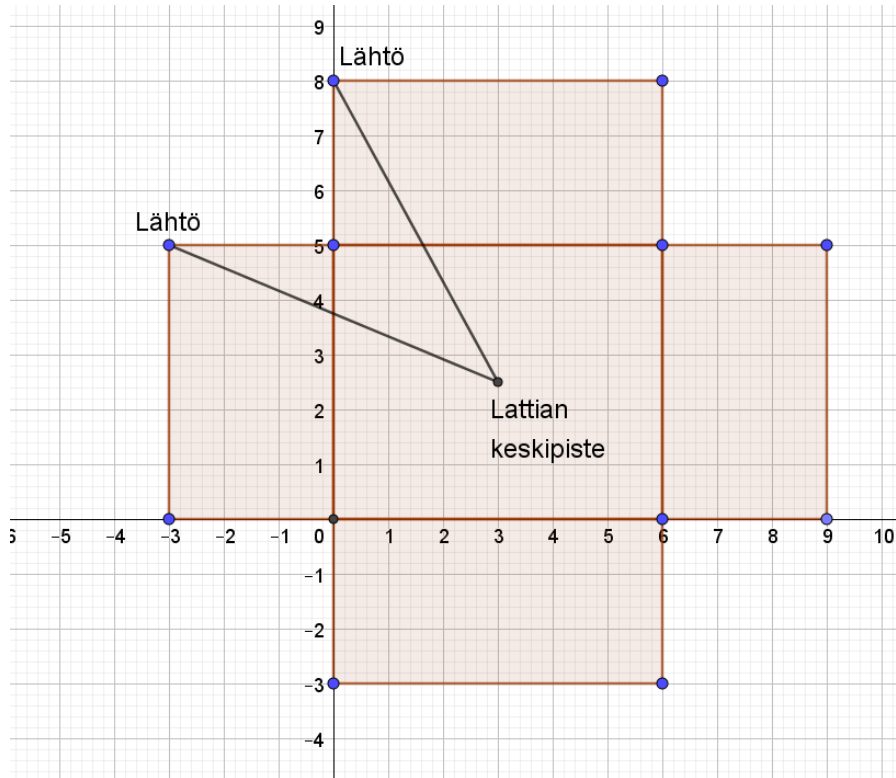
Pyöristysvirhe -2p

Neliöjuuri puuttuu: max 3p

Laskettu pelkkä avaruuslävistäjä: max 3p

5.2

Levitetään huoneen seinät tasoksi, jolloin kahden pisteen (lähtöpiste ja lattian keskipiste) lyhin etäisyys toisistaan on pisteiden välinen jana.



Eri vaihtoehdot:

Tarkka arvo: $\sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2 + 3^2} \rightarrow \frac{\sqrt{157}}{2}$

Likiarvo: $\sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2 + 3^2} \rightarrow 6.26498$

Toinen reitti:

Tarkka arvo: $\sqrt{6^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} \rightarrow \frac{13}{2}$

Likiarvo: $\sqrt{6^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} \rightarrow 6.5$

Vastaus: Lyhin reitti on noin 6,3 metriä.

Pisteytys:

Ajatus tasoon levittämistä 2p

Oikeat laskut 2p

Oikea vastaus 2p

Pyöristysvirhe -2p

Vain toinen matka laskettu ilman perusteluja: max 3p

6. Käyrän ja x-akselin välinen pinta-ala 12 p.

Funktiosta $f(x)$ tiedetään seuraavat tiedot:

$$f(2) = 4 \quad f(3) = 3 \quad f(4) = 4 \quad f(5) = 5 \quad f(6) = 4 \quad f(7) = 5 \quad f(8) = 5$$

Tarkastellaan funktion $f(x)$ kuvaajan ja x -akselin rajoittamaa pinta-alaa välillä $[2, 8]$. Olkoon S_n puolisuunnikassäännön määräämä pinta-ala, kun n on puolisuunnikkaiden lukumäärä.

6.1. Määritä S_1 4 p.

6.2. Määritä S_6 4 p.

6.3. Määritä funktion $f(x)$ kuvaajan ja x -akselin välinen pinta-ala approksioimalla funktio $f(x)$ kuudennen asteen polynomifunktioksi. 4 p.

Määritä

a) S_1

b) S_6

c) funktion $f(x)$ kuvaajan ja x -akselin välinen pinta-ala approksimoimalla $f(x)$ kuudennen asteen polynomifunktioksi.

6.1

$$S_1 = h \cdot \left(\frac{1}{2} f(x_0) + \frac{1}{2} f(x_1) \right) = (8-2) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 5 \right) \blacktriangleright 27$$

2p

2p

6.2

$$S_6 = h \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) + \frac{1}{2} \cdot f(x_6) \right) =$$

$$\frac{8-2}{6} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4 + 3 + 4 + 5 + 4 + 5 + \frac{1}{2} \cdot 5 \right) \blacktriangleright \frac{51}{2}$$

2p

2p

6.3

$$f(x) := a \cdot x^6 + b \cdot x^5 + c \cdot x^4 + d \cdot x^3 + e \cdot x^2 + m \cdot x + n \blacktriangleright \text{Valmis}$$

1p

$$\text{solve} \left(\begin{pmatrix} f(2)=4 \\ f(3)=3 \\ f(4)=4 \\ f(5)=5, \{a,b,c,d,e,m,n\} \\ f(6)=4 \\ f(7)=5 \\ f(8)=5 \end{pmatrix} \right)$$

$$\blacktriangleright a = \frac{-19}{720} \text{ and } b = \frac{61}{80} \text{ and } c = \frac{-1265}{144} \text{ and } d = \frac{2465}{48} \text{ and } e = \frac{-7186}{45} \text{ and } m = \frac{14963}{60} \text{ and } n = -149$$

1p

$$1p \int_2^8 f(x) \left| a = \frac{-19}{720} \text{ and } b = \frac{61}{80} \text{ and } c = \frac{-1265}{144} \text{ and } d = \frac{2465}{48} \text{ and } e = \frac{-7186}{45} \text{ and } m = \frac{14963}{60} \right.$$

1p ▶ 26.2357142863

Pisteytys: laskujen vieressä

7. Ruletin voittostrategia 12 p.

Ruletti on yksi maailman suosituimpia uhkapelejä. Eurooppalaisessa ruletissa on käytössä 37 numeroa (0-36). Numeroista 1-36 puolet ovat mustia ja puolet punaisia, nolla on vihreä. Pelaajalla on erilaisia mahdollisuuksia veikata oikea luku, jonka määrittää pyörítettävässä ruletissa olevan kuulan pysähtymiskohta. Pelaaja voi halutessaan veikata esimerkiksi kuulan määrittämän luvun, luvun värin, luvun parillisuuden tai suuruusluokan (1-12, 13-24 tai 25-36). Pelaaja panostaa haluamansa rahasumman. Voittaessaan pelaaja saa panostamansa rahasumman takaisin määrättyllä kertoimella, hävitessään menettää panoksensa.

Yksi ruletin voittamisen strategia on ns. Martingaalistrategia. Strategian ideana on kaksinkertaistaa jokaisen häviön jälkeinen panos seuraavaan peliin niin kauan, kunnes voittaa ensimmäisen kerran. Käytännössä strategian käytön estävät mm. pelaajan rajallinen varallisuus sekä ruletin rajoitus maksimipanostuksessa.

Martingaalistrategiaa voidaan soveltaa yksinkertaiseen kolikonheittoon, jossa molemmat osapuolet asettavat yhtä suuren panoksen. Se pelaaja, jonka veikkaama kolikon puoli jää näkyviin, saa molempien panokset itselleen.

Heität kumppanisi kanssa kolikkoa ja asetatte ensimmäiseksi panokseksi a euroa. Päätät tuplata panoksesi joka kerta niin kauan, kunnes ensimmäisen kerran voitat.

7.1. Kuinka paljon jäät voitolle, jos voitat ensimmäisen kerran 5. kierroksella, jonka jälkeen lopetat pelin? 4 p.

7.2. Osoita, että martingaalistrategiaa käyttämällä (eli tuplaamalla panoksesi jokaisen häviön jälkeen niin kauan, kunnes ensimmäisen kerran jäät voitolle) pääset kolikonheitossa varmasti voitolle. Määritä myös voiton suuruus. 4 p.

7.3. Kaksinkertaistamisen sijaan päätät kolminkertaistaa panoksesi joka kerta. Muodosta funktio, joka kuvaa rahamäärääsi, kun ensimmäinen voitto tulee heitolla n . 4 p.

7.1

Häviöt

1p

$$a+2 \cdot a+4 \cdot a+8 \cdot a \rightarrow 15 \cdot a$$

Voitto 5. kierroksella

1p

$$16 \cdot a$$

1p

$$\text{Erotus } 16 \cdot a - 15 \cdot a \rightarrow a$$

1p

Vastaus; Jään voitolle a euroa

7.2

Ensimmäinen voitto kierroksella n

Häviöt

geometrinen summa

$$1p+1p \quad a+2a+\dots+2^{n-2}a = a \cdot \frac{1-2^{n-1}}{1-2} \rightarrow \frac{a \cdot (2^{n-2})}{2} \quad (\text{tai } \sum_{i=0}^{n-2} (2^i \cdot a) \rightarrow a \cdot \left(\frac{2^n}{2} - 1 \right))$$

Voitto kierroksella n

$$2^{n-1} \cdot a$$

1p

$$\text{Erotus } 2^{n-1} \cdot a - \frac{a \cdot (2^{n-2})}{2} \rightarrow a > 0 \text{ joten jään voitolle.}$$

1p

Vastaus: jään voitolle a euroa

7.3

Ensimmäinen voitto kierroksella n

Häviöt

geometrinen summa

1p+1p

$$a+3a+\dots+3^{n-2}a = a \cdot \frac{1-3^{n-1}}{1-3} \rightarrow \frac{a \cdot (3^n-3)}{6} \text{ (tai } \sum_{i=0}^{n-2} (3^i \cdot a) \rightarrow a \cdot \left(\frac{3^n}{6} - \frac{1}{2} \right))$$

Voitto kierroksella n

$$3^{n-1} \cdot a$$

1p

Jään voitolle $3^{n-1} \cdot a - \frac{a \cdot (3^n-3)}{6} \rightarrow a \cdot \left(\frac{3^n}{6} + \frac{1}{2} \right)$ euroa

Vastaus: Rahamäärää ensimmäisen voiton jälkeen kuvaa funktio $f(n) = a \cdot \left(\frac{3^n}{6} + \frac{1}{2} \right)$

1p

Pisteytys: laskujen vieressä

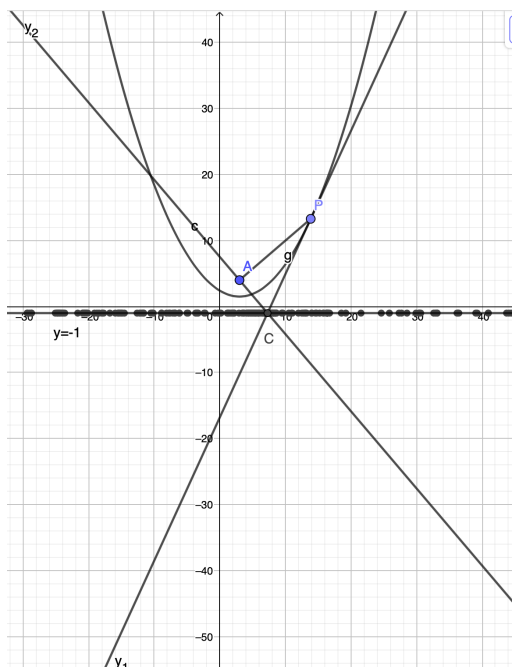
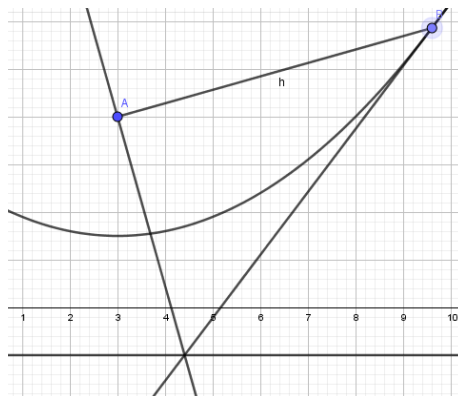
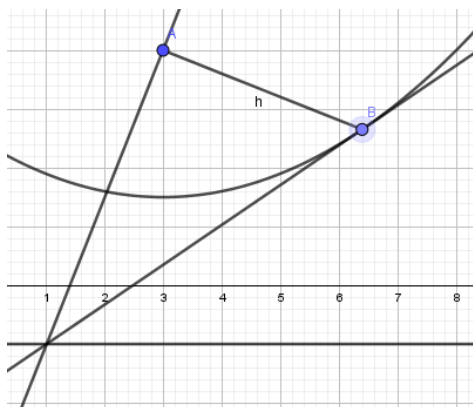
8. Paraabeli 12 p.

Olko paraabelin polttopiste $(3, 4)$ ja johtosuora $y = -1$. Olko suora y_1 paraabelille kohtaan (x, y) piirretty tangentti ja suora y_2 se polttopisteen kautta kulkeva suora, joka on kohtisuorassa polttopisteen ja pisteen (x, y) välistä janaa vastaan.

8.1. Tarkastele graafisesti: Minkä pistejoukon suorien y_1 ja y_2 leikkauspisteet muodostavat? 6 p.

8.2. Osoita tehtävässä 8.1. saamasi tulos algebrallisesti. 6 p.

8.1



Vastaus: Leikkauspisteet muodostavat suoran $y = -1$

Pisteytys:

Tilannetta kuvaava kuvankaappaus 3p

Vastaus 3p

8.2

1p Paraabelin yhtälö on $\text{solve}(\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}=|y-1|, y) \rightarrow y = \frac{x^2-6 \cdot x+24}{10}$ ⚠

1p Kohtaan $x=a$ piirretty tangentti $y = \text{tangentLine}\left(\frac{x^2-6 \cdot x+24}{10}, x, a\right) \rightarrow y = \frac{(a-3) \cdot x}{5} - \frac{a^2-24}{10}$

Janan kulmakerroin $\frac{\frac{x^2-6 \cdot x+24}{10} - 4}{x-3} \Big|_{x=a} \rightarrow \frac{a^2-6 \cdot a-16}{10 \cdot (a-3)}$

1p Suoran y_2 kulmakerroin $\frac{-1}{\frac{a^2-6 \cdot a-16}{10 \cdot (a-3)}} \rightarrow \frac{-10 \cdot (a-3)}{a^2-6 \cdot a-16}$ ⚠

Suoran y_2 yhtälö

1p $y-4 = \frac{-10 \cdot (a-3)}{a^2-6 \cdot a-16} \cdot (x-3) \rightarrow y-4 = \frac{-10 \cdot (a-3) \cdot (x-3)}{a^2-6 \cdot a-16}$

Suorien y_1 ja y_2 leikkauspiste

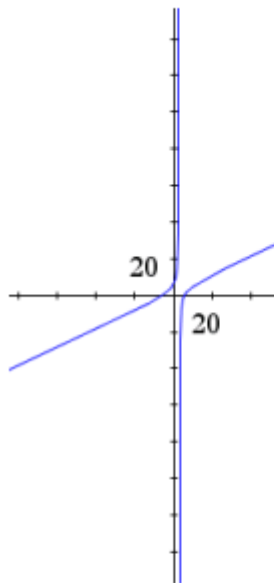
1p $\text{solve}\left(\begin{cases} y = \frac{(a-3) \cdot x}{5} - \frac{a^2-24}{10} \\ y-4 = \frac{-10 \cdot (a-3) \cdot (x-3)}{a^2-6 \cdot a-16} \end{cases}, \{x, y\}\right) \rightarrow x = \frac{a^2-34}{2 \cdot (a-3)} \text{ and } y = -1 \text{ and } a+2 \neq 0 \text{ and } a-8 \neq 0$

Koko suora $y=-1$ täyttyy pisteillä, sillä

$f(a) := \frac{a^2-34}{2 \cdot (a-3)} \rightarrow \text{Valmis}$

$\lim_{a \rightarrow \infty} (f(a)) \rightarrow \infty$ ja $\lim_{a \rightarrow -\infty} (f(a)) \rightarrow -\infty$ ja $\lim_{a \rightarrow 3^+} (f(a)) \rightarrow -\infty$ ja $\lim_{a \rightarrow 3^-} (f(a)) \rightarrow \infty$

ja f on määrittelyjoukossaan jatkuva

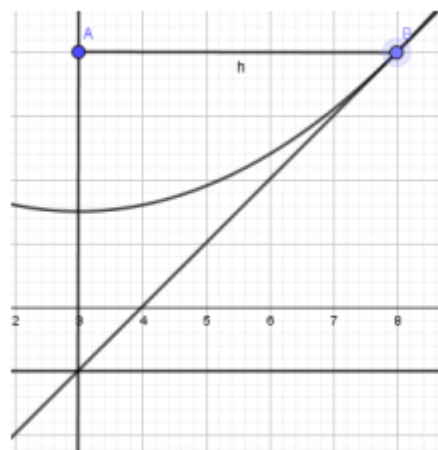


ja kun $a=8$ tai $a=-2$, niin

$$y = \frac{x^2 - 6 \cdot x + 24}{10} \Big|_{x=8} \rightarrow y=4 \text{ ja } y = \frac{x^2 - 6 \cdot x + 24}{10} \Big|_{x=-2} \rightarrow y=4$$

jolloin suora y_2 on pystysuora ja saavutetaan suoralta $y=-1$ kohta $x=3$ (kuva)

1p



Toinen ratkaisuvaihtoehto suorien leikkauspisteen selvittämiseen:

$$\mathbf{x_0}:=3 \rightarrow 3$$

$$\mathbf{y_0}:=4 \rightarrow 4$$

$$\mathbf{johto}:= -1 \rightarrow -1$$

$$\text{solve}\left(\frac{|y-\mathbf{johto}|}{1}=\sqrt{(x-\mathbf{x_0})^2+(y-\mathbf{y_0})^2},y\right) \rightarrow y=\frac{x^2-6\cdot x+24}{10} \text{⚠}$$

$$\mathbf{f(x)}:=\frac{x^2-6\cdot x+24}{10} \rightarrow \textit{Valmis}$$

$$\mathbf{d(x)}:=\frac{d}{dx}(\mathbf{f(x)}) \rightarrow \textit{Valmis}$$

$$\text{solve}\left(\begin{cases} y-\mathbf{f(x_1)}=\mathbf{d(x_1)}\cdot (x-x_1) \\ y-\mathbf{y_0}=\left(\frac{\mathbf{f(x_1)}-\mathbf{y_0}}{\mathbf{x_0}-x_1}\right)^{-1}\cdot (x-\mathbf{x_0}),\{x,y\} \end{cases}\right) \rightarrow x=\frac{x_1^2-34}{2\cdot (x_1-3)} \text{ and } y=-1 \text{ and } x_1+2\neq 0 \text{ and } x_1-8\neq 0 \text{⚠}$$

|

9. Välivaiheiden selvittäminen 12 p.

Löydät Villen muistiinpanoista seuraavat merkinnät:

1. Tiedetään $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, 5, 7)$, $C = (3, 1, 5)$ ja $P = (7, 5, 1)$.

2.
$$\begin{cases} x = 1 + s + 2t \\ y = 2 + 3s - t \\ z = 3 + 4s + 2t \end{cases}$$

3. $\overrightarrow{PQ} = (1 + s + 2t - 7)\vec{i} + (2 + 3s - t - 5)\vec{j} + (3 + 4s + 2t - 1)\vec{k}$

4. $\overrightarrow{PQ} = (s + 2t - 6)\vec{i} + (3s - t - 3)\vec{j} + (4s + 2t + 2)\vec{k}$.

5.
$$\begin{cases} 1 \cdot (s + 2t - 6) + 3 \cdot (3s - t - 3) + 4 \cdot (4s + 2t + 2) = 0 \\ 2 \cdot (s + 2t - 6) - 1 \cdot (3s - t - 3) + 2 \cdot (4s + 2t + 2) = 0 \end{cases}$$

6. Laskin: $s = \frac{28}{185}$ ja $t = \frac{81}{185}$

7. Sijoitetaan ja saadaan $Q = \left(\frac{75}{37}, \frac{373}{185}, \frac{829}{185}\right)$

8.
$$\sqrt{\left(\frac{75}{37} - 7\right)^2 + \left(\frac{373}{185} - 5\right)^2 + \left(\frac{829}{185} - 1\right)^2} = \frac{92}{\sqrt{185}}$$

9. Vastaus: $\frac{92\sqrt{185}}{185}$

9.1. Selvitä perustellen, mitä Ville on laskenut. Kerro, mitä eri vaiheissa tapahtuu. Kerro myös, mikä on koko laskun tarkoitus. Voit käyttää rivinumeroita viitatessasi eri välivaiheisiin. 9 p.

9.2. Muodosta tehtävänanto, jonka vastaukseksi Villen vastaus sopisi. 3 p.

9.1

1. Ville on kopioinut tehtäväksiannosta annetut pisteet A,B,C ja P.

2. Ville on laskenut tason ABC yhtälön. 1p

3. Q on tasossa ABC oleva mielivaltainen piste.

Ville on laskenut vektorin PQ. 1p

4. Ville on siventänyt vektorin PQ.

5. Ville vaatii, että PQ on kohtisuorassa tason ABC suuntavektoreita vastaan eli pistetulon pitää olla nolla molempien suuntavektoreiden kanssa.

PQ on kohtisuorassa siten tasoa ABC vastaan. 1p

6. Ville on ratkaissut edellisen kohdan yhtälöparin laskimella. 1p

7. Ville on sijoittanut kohtaan 2 kohdassa 6 saadut luvut s ja t

ja saanut pisteen Q koordinaatit. Q on tasossa ABC lähinnä pistettä

P oleva piste. 1p

8. Ville on sieventänyt janan PQ pituuden. 1p

9. Janan PQ pituus sievennettynä laskimella.

Ville on laskenut pisteen P etäisyyden siitä tasosta, jonka pisteet A, B ja C muodostavat. (1p)

Ratkaisussa Ville on määrittänyt tasolta pisteen Q siten, että vektori PQ on tason normaali. (1p)

Tällöin vektorin PQ pituus on kysytty etäisyys. (1p)

9.2

Määritä pisteen P etäisyys tasosta ABC, kun

3p

$$A = (1, 2, 3), B = (2, 5, 7), C = (3, 1, 5) \text{ ja } P = (7, 5, 1).$$

Pisteytys: laskujen vieressä

10. l'Hospitalin sääntö 12 p.

Tutustu kokeen liitteenä olevaan artikkeliin [l'Hospitalin sääntö \(L'Hospital.fi.pdf\)](#) ja määritä sen avulla raja-arvot

10.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 3x - 1}{3x^5}$ 6 p.

10.2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{3x^6}$ 6 p.

10.1

1p

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 3 \cdot x - 1) \rightarrow 0 \text{ OK}$$

1p

$$\lim_{x \rightarrow 0} (3 \cdot x^5) \rightarrow 0 \text{ OK}$$

1p

$$\frac{d}{dx}(e^x - 3 \cdot x - 1) \rightarrow e^x - 3$$

1p

$$\frac{d}{dx}(3 \cdot x^5) \rightarrow 15 \cdot x^4 \neq 0 \text{ kun } x \neq 0 \text{ OK}$$

joten

1p

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 3 \cdot x - 1}{3 \cdot x^5} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 3}{15 \cdot x^4} \right) = -\infty$$

Perustelut viimeiselle laskulle:

Koska

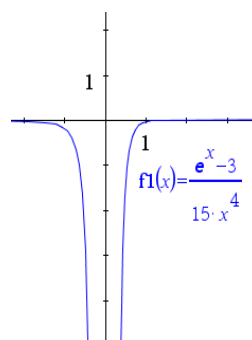
$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 3) \rightarrow -2 \neq 0 \text{ ja } \lim_{x \rightarrow 0} (15 \cdot x^4) \rightarrow 0, \text{ niin kohdassa } 0 \text{ ei ole raja-arvoa.}$$

Koska

$$\frac{e^x - 3}{15 \cdot x^4} < 0 \text{ kohdan } x=0 \text{ molemilla puolilla (kuva), niin}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x - 3}{15 \cdot x^4} \right) = -\infty \text{ ja } \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^x - 3}{15 \cdot x^4} \right) = -\infty, \text{ joten epä-oleellinen raja-arvo on olemassa.}$$

1p



10.2

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - x - 1) \rightarrow 0 \text{ OK}$$

1p

$$\lim_{x \rightarrow 0} (3 \cdot x^6) \rightarrow 0 \text{ OK}$$

$$\frac{d}{dx} (e^x - x - 1) \rightarrow e^x - 1$$

1p

$$\frac{d}{dx} (3 \cdot x^6) \rightarrow 18 \cdot x^5 \neq 0 \text{ kun } x \neq 0 \text{ OK}$$

joten

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - x - 1}{3 \cdot x^6} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{18 \cdot x^5} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) \rightarrow 0 \text{ OK}$$

1p

$$\lim_{x \rightarrow 0} (18 \cdot x^5) \rightarrow 0 \text{ OK}$$

$$\frac{d}{dx} (e^x - 1) \rightarrow e^x$$

1p

$$\frac{d}{dx} (18 \cdot x^5) \rightarrow 90 \cdot x^4 \neq 0 \text{ kun } x \neq 0 \text{ OK}$$

joten

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - x - 1}{3 \cdot x^6} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{18 \cdot x^5} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x}{90 \cdot x^4} \right) = \infty$$

1p

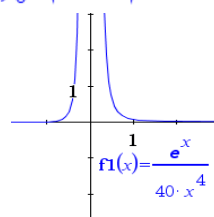
Perustelut viimeiselle laskulle:

Koska $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x) \rightarrow 1 \neq 0$ ja $\lim_{x \rightarrow 0} (90 \cdot x^4) \rightarrow 0$, niin kohdassa 0 ei ole raja-arvoa.

Koska $\frac{e^x}{90 \cdot x^4} > 0$ kohdan $x=0$ molemilla puolilla (kuva), niin

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x}{90 \cdot x^4} \right) = \infty$ ja $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^x}{90 \cdot x^4} \right) = \infty$, joten epä-oleellinen raja-arvo on olemassa.

1p



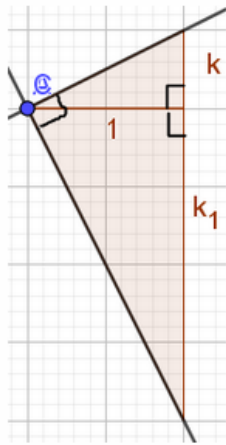
11. Keskeneräiset todistukset 12 p.

Janne ja Jaana saavat tehtäväkseen todistaa lauseen "Jos suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, niin niiden kulmakertoimien tulo on -1 tai toinen on x-akselin suuntainen ja toinen y-akselin suuntainen." Janne oli käynyt vektorilaskennan kurssin, mutta Jaanan oli selviydyttävä geometrian kurssin tiedoilla. Janne aloitti todistuksen seuraavasti:

Olkoon suoran s_1 suuntavektori $\vec{s}_1 = \vec{i} + k_1\vec{j}$ ja suoran s_2 suuntavektori $\vec{s}_2 = \vec{i} + k_2\vec{j}$

mutta hän ei osannut viedä sitä loppuun.

Jaana perehtyi asiaan tekemällä liitteenä olevan [Geogebra-tiedoston \(kohtisuoruus.ggb\)](https://www.geogebra.org/m/kohtisuoruus.ggb) ja siitä saamiensa ideoiden pohjalta aloitti todistuksen seuraavasti:



Yhdenmuotoisista kolmioista saadaan...

Jaanalla loppui kuitenkin aika kesken. Viimeistele Jannen ja Jaanan todistukset. Perustele tarkasti.

Jannen todistus:

Jos suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, myös niiden suuntavektorit ovat. Tällöin vektorilaskennan nojalla suuntavektoreiden pistetulo on oltava nolla. Tällöin saadaan yhtälö

$$1 \cdot 1 + k_1 \cdot k_2 = 0, \text{ ja edelleen}$$

$$k_1 \cdot k_2 = -1.$$

Koska k_1 ja k_2 ovat selvästi annettujen suorien kulmakertoimet, lause on todistettu.

Akseliin suuntaisten suorien tapauksessa väite on triviaali.

Jaanan todistus:

Yhdenmuotoisista kolmioista saadaan yhtälö $\frac{|k|}{1} = \frac{1}{|k_1|}$, josta edelleen

$$|k| \cdot |k_1| = 1$$

Koska suorista toinen on nouseva ja toinen laskeva, ovat kulmakertoimet erimerkkisiä, on tulon oltava -1 .

Akseliin suuntaisten suorien tapauksessa väite on triviaali.

Esimerkki oikeasta todistuksesta, mutta ei Jaanan ratkaisun mukaisesti (3p):
(Yhdenmuotoisista kolmioista saadaan puuttuu)

Jaanan todistus:

Yhdenmuotoisista kolmioista saadaan yhtälöt $\tan(\alpha) = \frac{|k|}{1}$ sekä $\tan(90^\circ - \alpha) = \frac{|k_1|}{1}$, joista saadaan

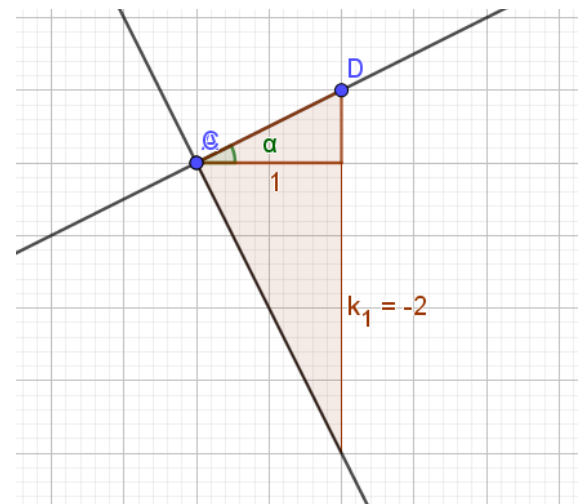
edelleen yhtälöt $|k| = \tan(\alpha)$ sekä $|k_1| = \tan(90^\circ - \alpha)$.

Tarkastellaan seuraavaksi kulmakertoimien itseisarvojen tuloa:

$$|k| \cdot |k_1| = \tan(\alpha) \cdot \tan(90^\circ - \alpha) = \tan(\alpha) \cdot \cot(\alpha) = \tan(\alpha) \cdot \frac{1}{\tan(\alpha)} = 1$$

Koska suorista toinen on nouseva ja toinen laskeva, ovat kulmakertoimet erimerkkisiä, on tulon oltava -1 .

Akselien suuntaisten suorien tapauksessa väite on triviaali.



Pisteytys:

Pelkät yhtälöt: max 2p per kohta eli yhteensä max 4p

Todistettu vektorilaskennalla ja geometrialla, mutta ei Jannen ja Jaanan mukaisesti: max 6p

12. Lammas niityllä 12 p.

Lammas sidotaan niityllä rautakankeen metrin pituisella köydellä, jolloin se syö ympyränmuotoisen alueen ruohoa. Seuraavaksi rautakanki sijoitetaan syntyneen ympyrän kehälle. Kuinka pitkään köyteen lammas tulee nyt laittaa, jotta se pystyisi syömään saman verran ruohoa kuin aluksi?

Asetetaan rautakanki origoon. Tällöin alkuperäisen ympyränmuotoisen alueen kehä noudattaa yhtälöä $x^2 + y^2 = 1$.

Asetetaan rautakangen uudeksi paikaksi piste $(1,0)$ ja köyden pituudeksi a , jonka pitää triviaalisti olla vähemmän kuin 2 (*). Tällöin uuden ympyrän yhtälö on $(x-1)^2 + y^2 = a^2$.

Ratkaistaan ympyröiden yhtälöt muuttujan y suhteen ja selvitetään ympyröiden leikkauspisteet:

Ratkaistaan alkuperäisen ympyrän yhtälö muuttujan y suhteen:

$$\text{solve}(x^2+y^2=1, y) \rightarrow y = -\sqrt{1-x^2} \text{ and } x^2-1 \leq 0 \text{ or } y = \sqrt{1-x^2} \text{ and } x^2-1 \leq 0$$

Ratkaistaan uuden ympyrän yhtälö muuttujan y suhteen:

$$\text{solve}((x-1)^2+y^2=a^2, y) \rightarrow y = -\sqrt{-x^2+2 \cdot x+a^2-1} \text{ and } x^2-2 \cdot x-a^2+1 \leq 0 \text{ or } y = \sqrt{-x^2+2 \cdot x+a^2-1} \text{ and } x^2-2 \cdot x-a^2+1 \leq 0$$

Ratkaistaan ympyröiden leikkauspisteet:

$$\text{solve}\left(\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ (x-1)^2+y^2=a^2 \end{cases}, \{x, y\}\right) \rightarrow x = \frac{-(a^2-2)}{2} \text{ and } y = \frac{a \cdot \sqrt{4-a^2}}{2} \text{ and } a^2 \cdot (a^2-4) \leq 0 \text{ or } \\ x = \frac{-(a^2-2)}{2} \text{ and } y = \frac{-a \cdot \sqrt{4-a^2}}{2} \text{ and } a^2 \cdot (a^2-4) \leq 0$$

Uuden ympyrän ja x-akselin leikkauspisteet:

$$\text{solve}((x-1)^2+y^2=a^2, x)|_{y=0} \rightarrow x=1-a \text{ or } x=a+1$$

Selvitetään niiden alueiden pinta-alat, jotka lammas on uudesta ympyrästä jo syönyt. Nimetään tämä muuttujasta a riippuva funktio nimellä $\text{syöty}(a)$.

$$\text{syöty}(a) := 2 \cdot \int_{1-a}^{\frac{-(a^2-2)}{2}} \sqrt{-x^2+2 \cdot x+a^2-1} \, dx + 2 \cdot \int_{\frac{-(a^2-2)}{2}}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx \rightarrow \text{Valmis}$$

Lasketaan lopuksi, mikä tulee olla parametrin a arvo, kun uuden alueen syömätön pinta-ala on yhtä suuri kuin alkuperäinen pinta-ala:

$$\text{solve}(\pi \cdot a^2 - \text{syöty}(a) = \pi \cdot 1^2, a) \rightarrow a = -0.794136 \text{ or } a = 1.25121 \text{ ⚠}$$

(* ok)

Vastaus: Lammas tulee asettaa köyteen, jonka pituus on vähintään 1,25 metriä.

Pisteytys:

Alkuperäisen ympyrän yhtälö 0p

Parametrissa riippuvan ympyrän yhtälö 2p

Ympyröiden leikkauspisteet: 2p

Syödyn alueen pinta-ala: 2p

Muodostettu yhtälö ja ratkaistu se 4p

Vastaus 2p

Vastaus saatu oikein vain graafisella tarkastelulla: max 6p

13. Suuruusjärjestyksen osoittaminen 12 p.

Osoita, että $7^n > 4n$ kaikilla $n = 1, 2, 3, \dots$. Voit käyttää esimerkiksi induktiotodistusta.

Todistetaan väite matemaattisella induktiolla:

1) Osoitetaan, että väite pätee, kun $n = 1$:

$$7^1 > 4 \cdot 1$$

2) Oletetaan, että väite pätee, kun $n = k$:

$$7^k > 4 \cdot k$$

3) Osoitetaan, että väite pätee myös, kun $n = k + 1$:

$$VP = 7^{k+1} = 7 \cdot 7^k > 7 \cdot 4k > 4 \cdot k = 4(k + k + k + k) > 4(k + 1) = OP$$

(ensimmäinen epäyhtälö induktio-oletuksesta)

Väite todistettu.

Pisteytys:

$n = 1$ -tarkastelu 2p

Induktio-oletus 2p

Induktioväitteen vasen puoli 2p

Pienennys induktio-oletuksen avulla 2p

Toinen pienennys 2p

Saatu väitteen oikea puoli 2p

Myös muut todistustavat mahdollisia, kuten

Määritellään funktio

$$f(x) := 7^x - 4, x \geq 1 \quad \text{Valmis}$$

1p f on jatkuva ja derivoituva funktio

Lasketaan derivaatta

$$d(x) := \frac{d}{dx}(f(x)) \quad \text{Valmis}$$

1p $d(x) \rightarrow \ln(7) \cdot 7^x - 4$

Lasketaan derivaatan nollakohdat

1p $\text{solve}(d(x)=0, x) \rightarrow x = \frac{-\ln\left(\frac{\ln(7)}{4}\right)}{\ln(7)}$

1p $\frac{-\ln\left(\frac{\ln(7)}{4}\right)}{\ln(7)} \rightarrow 0.370296928094 < 1$ joten derivaatan nollakohtia ei ole kun $x \geq 1$.

1p Kokeillaan derivaatan merkki $d(2) \rightarrow 91.3495973037 > 0$

1p joten koska derivaatta on jatkuva,

derivaatta on positiivinen kaikilla $x \geq 1$.

1p Koska derivaatta on positiivinen,

niin funktio on aidosti kasvava.

1p Siten funktion pienin arvo on $f(1) \rightarrow 3 > 0$

1p joten $f(x) > 0$ kaikilla $x \geq 1$

1p joten $7^x > 4x$ kaikilla reaaliluvuilla $x \geq 1$

1p joka pätee myös kokonaisluvuilla $x \geq 1$

1p M.O.T.