

Mitä MAOLista pitää osata ulkoa? (Pitkän matematiikan versio)

Maolissa on kolmenlaisia kaavoja.

1. **Kategoria 1**. Osaa ulkoa!
2. **Kategoria 2**. Tunne ja käytä!
3. **Kategoria 3**. Olet kuullut näistä!

Kategoria 1 . sisältyy **Kategoriaan 2** ., ja **Kategoria 2** . sisältyy **Kategoriaan 3** .

Huom! Tässä esitetty kategorisointi on minun henkilökohtainen mielipide, eikä vastaa mitään virallista LOPSin säädöstä tai ohjetta.

Mitä kategoriat 1.-3. käytännössä tarkoittaa?

Kategorian 1 . kaavat: **Osaat nämä ulkoa** Mitä tarkoittaa “ulkoa”? Se ei tarkoita pelkästään sitä, että osaa kopioida kaavan ulkomuistista paperille, vaan myös sitä, että osaa sujuvasti käyttää kyseisiä kaavoja tarpeen tullen. Valmius käyttää niitä tarpeen tullen syntyy HARJOITELLUSTA. Samoin kuin jonglöörauksessa harjoitellaan pallojen heittämistä eri tavoilla, jalan ali, olan yli, ja niin edespäin, täytyy Kategorian 1 kaavoja harjoitella monissa eri tilanteissa. Sitä varten olen luonut harjoitustehtäviä, joissa näitä harjoitellaan. Liittymällä jäseneksi saat kaikki nämä tehtävät käyttöösi. Hyvä esimerkki **Kategorian 1** . kaavasta on binomikaava

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Kategorian 2 . kaavat: **Tunnet nämä kaavat ja osaat käyttää niitä**. Näistä kaavoista täytyy tietää niiden merkitys ja osata nopeasti löytää ne MAOLista tarpeen tullen. Ne voi myös halutessaan opiskella ulkoa, varsinkin, jos tavoittelee L:ää, koska se nopeuttaa tehtävien tekemistä. Olen tehnyt harjoitustehtäviä myös **Kategorian 2** . kaavoille. Hyvä esimerkki **Kategorian 2** . kaavasta on

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Se voi varmasti olla hyödyllinen jossain tehtävässä, ja kannattaa olla tietoinen, että tällaisia kaavoja löytyy MAOLista. Mutta pärjää ihan hyvin vaikkei muistaisi sitä ulkoa. Sama koskee esimerkiksi seuraavaa kaksinkertaisen kulman kaavaa:

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

Kategorian 3. kaavat: Olet kuullut näistä. Tähän kategoriaan kuuluu kaikki kaavat, jotka ei kuulu kategorioihin 1. ja 2. Osa on tässä kategoriassa, koska ne ei kuulu LOPSiin, esimerkiksi kompleksilukuja tai jotkut sarjakehitelmiä koskevat kaavat. Toinen esimerkki on pallon segmentin tilavuuden kaava. Pärjää ihan hyvin, vaikkei ole koskaan käyttänyt sitä, mutta on kuitenkin hyvä, jos on ainakin kerran nähnyt sen ja on kuullut siitä.

MAOLin jaottelu kategorioihin

Käydään järjestyksessä läpi koko MAOL.

Merkintöjä ja symboleja

- Kreikkalaiset aakkoset. **Kategoriaan 1** kuuluu $\alpha, \beta, \gamma, \pi$, ja σ (koska sitä käytetään keskihajontana). Muita ei tarvitse osata ja ne kuuluu **Kategoriaan 3** - täältä voi aina tarkistaa.

Iso	Pieni	Kirjaimen nimi
A	α	alfa
B	β	beeta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
E	ϵ	epsilon
Z	ζ	zeeta
H	η	eeta
Θ	θ	theeta
I	ι	ioota

- Aritmetiikka. Peruslukupöjkköjen symbolit \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , ja \mathbb{R} , ovat **Kategoriassa 1**, kuin myös melkein kaikki muu tässä listassa paitsi merkinnät $\prod_{i=1}^n$, \max ja \min .
- Geometria. Kaikki **Kategoriassa 1**.
- Vektorit. Tästäkin on hyvä jos tietää ainakin suurimman osan ulkoa. Erytysmerkinnät kuten $\bar{a} \updownarrow \bar{b}$ voi tarvittaessa tarkistaa täältä, eli ne voi sijoittaa **Kategoriaan 2**.
- Logiikka ja joukko-oppi. Funktion kuvaus $f: A \rightarrow B$ on **Kategoriassa 1** kuten myös kuuluvuus $a \in A$, yhdistetty funktio $g \circ f$ ja jonot $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Muut merkinnät voi käydä tarkistamassa täältä, eli ne kuuluvat **Kategoriaan 2**.
- Analyysi. Ensimmäiset neljä ovat Kategoriassa 1, eli raja-arvo merkinnät. Lisäksi derivaatan ja integraalin perus merkinnät $Df = \frac{d}{dx}f$ ja $\int_a^b f dx = \int_a^b F(x)$ on hyvä pitää **Kategoriassa 1**. Loput tässä listassa ovat **Kategoriassa 2**.

- Todennäköisyyslaskenta. Tapahtuman todennäköisyys $P(A)$ ja odotusarvo $E(X)$ ovat **Kategoriassa 1**. Loput Kategorioissa 2 ja 3.

Aritmetiikka ja algebra

Melkein KAIKKI kaavat tässä osiossa kuuluu osata ulkoa. Käydään ne yksitellen läpi.

- Potenssi, promille ja prosenttiyksikkö. **Kategoria 1**.
- Reaalilukujen aksioomat. **Kategoria 1**.
- Itseisarvo. **Kategoria 1**.
- Rationaalilukujen laskutoimitukset. **Kategoria 1**.
- Potenssi a^n . **Kategoria 1**.
- Potenssin laskusäännöt. Newtonin binomikaava

$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} a^{n-k} b^k$	Newtonin binomikaava
---	----------------------

kuuluu **Kategoriaan 2**, muut kaavat kuuluu **Kategoriaan 1**.

- Neliöjuuri. Kaavat 2. ja 6. seuraavat kaavoista 1. ja 3., joten niitä ei sinänsä tarvitse erikseen opetella ulkoa. Vaikka kaava 4. seuraa samalla tavalla kaavasta 5., on se silti hyvä osata ulkoa erikseen. Eli: **Kategoria 1**: Kaavat 1., 3., 4., 5, **Kategoria 2**: Kaavat 2. ja 6.

1. $(\sqrt{a})^2 = a$	3. $\sqrt{a^2} = a $	5. $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$
2. $(\sqrt{a})^{2k} = a^k$	4. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	6. $\sqrt{a^2 b} = a \sqrt{b}$

- Yleinen juuri -osion kaavat seuraavat potenssien laskusäännöistä ja sen takia luokiteltisin ne **Kategoriaan 2**.
- Polynomien jako tekijöihin -osiossa vain Muistikaavat kuuluvat (nimensä mukaan!) **Kategoriaan 1** (yhteinen tekijä ja ryhmittely kuuluvat myös, mutta ne tulevat jo

aikaisemmin osiossa Reaalilukujen aksioomat). Opettele siis nämä tosi hyvin:

Muistikaavat

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

- Toisen asteen yhtälö on **Kategoriassa 1**.
- Korkeamman asteen yhtälö osio on perustietoa, josta kannattaa olla tietoinen. Normaalimuoto menisi ehkä jopa **Kategoriaan 1**. ja loput **Kategoriaan 2**.
- Determinantti: Kaksirivinen kuuluu **Kategoriaan 1** ja kolmirivinen **Kategoriaan 2**.
- Yhtälöparit täytyy osata ratkaista, mutta Yhtälöpari -osion minä luokittelen **Kategoriaan 3**.
- Raja-arvoja -osiossa vain 7. kuuluu **Kategoriaan 1**. Kaavat 1., 2., 8. ja 9. laittaisin **Kategoriaan 2**., ja loput **Kategoriaan 3**.
- Sarjakehitelmä -osion kaavat kuuluvat **Kategoriaan 3**. lukuun ottamatta ehkä kaavaa 3., jonka voisi sijoittaa **Kategoriaan 2**:

$$3. e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

- Talousmatematiikkaa: **Kategoria 2**.
- Kompleksiluvut: **Kategoria 3** (ei kuulu LOPSiin)

Geometria


Tasokuvioita

Kolmio

Jaetaan tämä Kategoriaihin 1.-3. seuraavasti:

Kategoria 1: opiskele nämä ulkoa:

- Suorakulmainen, tasasivuinen ja tasakylkinen kolmio (sanojen merkitykset ja määritelmät),
- kulmien summa $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$,
- pinta-alan ensimmäiset kaksi:

pinta-ala	$A = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ac \sin \beta = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$	
-----------	--	---

- Sinilause!
- Kosinilause!

Kategoria 2: Tiedä nämä:

- Sisään ja ulos piirrettyjen ympyröiden säteet,
- Keskijanot, kulmien puolittajat, mediaanit, keskinormaalit.

Kategoria 3: Pidä nämä varalla:

- Loput kaavat kolmio-osiosta.

Kaikki nelikulmiot (Neliö, Neljäkäs, Suunnikas...)

Kaikki pinta-ala-kaavat ovat **Kategoriassa 1**, paitsi yleinen Nelikulmion pinta-ala $A = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi$ on **Kategoriassa 2**. Termit ovat myös **Kategoriassa 1**, eli pitää tietää mitä eroa on näljäkkäällä ja puolisuunnikkaalla jne.

Säännölliset monikulmiot

Täällä kaikki yksittäiset kaavat ovat **Kategoriassa 3**, **mutta** itse luku on **Kategoriassa 2**, eli pitää olla valmis avamaan tämä sivu MAOLissa ja tietää, että se on siinä.

Ympyrä

Kaikki nämä ovat **Kategoriassa 1**.

Ellipsi

Kategoria 2.

Avaruuskappaleita

- Kaikki tilavuudet ovat **Kategoriassa 1**. Poikkeuksena ovat katkaistun kartion, pyörähdysellipsoidin ja pyörähdysparaboloidin tilavuudet, jotka ovat **Kategoriassa 3**.
- Pintojen ja vaippojen pinta-alat ovat **Kategoriassa 2**.
- Loput (kuten kalotti ja pallosektori) ovat **Kategoriassa 3**.

Trigonometria

- Absoluuttinen kulmayksikkö radiaani: **Kategoria 1**.
- Muistikolmiot: **Kategoria 1**.
- Trigonometriset funktiot **Kategoria 1**.
- Arkusfunktiot **Kategoria 1**.
- Suorakulmaisen kolmion trigonometria **Kategoria 1**.
- Peruskaavat **Kategoria 1**. Erityisen tärkeä: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- Merkkikaaviot? Opiskele käyttäen yksikköympyrää, niin ei tarvitse opiskella tätä.
- Trigonometrinen funktioiden väliset yhteydet: **Kategoria 2**.
- Palautuskaavat. Opi johtamaan nämä yksikköympyrästä, niin ei tarvi muistaa. Jos et osaa johtaa tai et ehdi oppia sitä, opiskele ulkoa.
- Kaksinkertaiset kulmat: **Kategoria 2**.
- Kolminkertaiset kulmat: **Kategoria 3**.
- Puolikkaat kulmat: **Kategoria 2**.
- Perusyhtälöitä. Opi itse johtamaan yksikköympyrästä, tai opiskele ulkoa.
- Trigonometrinen funktioiden potensseja: **Kategoria 3**.
- Summakaavoja: Ensimmäiset kaksi kaavaa minä laitan **Kategoriaan 1**:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

Loput on kategorioissa **2**.-**3**.

Vektorilaskenta

- Laskutoimitukset. **Kategoria 1**.
- Määritelmiä. **Kategoria 1**.
- Vektorit koordinaatistossa. **Kategoriaan 1**: kuuluu kaikki **paitsi** skalaariprojektio, vektoriprojektio, ristitulo, suunnikkaan ala, ja kaikki tästä eteenpäin.

Analyyttinen geometria

- Jana: pituus ja keskipiste **Kategoria 1**., jakopiste **Kategoria 3**.
- Suora: Kulmakerroin ja yhdensuuntaisuusehto ovat **Kategoriassa 1**. Kohtisuoruusehto ja Pisteiden etäisyys suorasta ovat **Kategoriassa 2**. Loput **Kategoriassa 3**.
- Paraabeli: Koko homma on **Kategoriassa 1**.
- Ympyrä: Koko homma on **Kategoriassa 1**.
- Ellipsi: origokeskisen ellipsin perusmuoto on **Kategoriassa 1**, loput **Kategoriassa 2**.
- Hyperbeli: Perusyhtälö (ensimmäinen tässä osiossa) on **Kategoriassa 1**, loput **Kategoriassa 2**.-3.
- Suora avaruudessa: **Kategoria 3**.
- Taso avaruudessa: **Kategoria 3**.

Differentiaalilaskenta

- Derivaatan määritelmä: **Kategoria 1**.
- Derivoimissääntöjä: **Kategoria 1** !! Ehkä kaavan 7. voi siirtää **Kategoriaan 2**.
- Derivoimiskaavoja. Kaavat 8., 10., 11., 13., ja 15., ovat **Kategoriassa 1**. Loput **Kategoriassa 2**.
- Derivaatan sovelluksia: **Kategoria 2**.

Integraalilaskenta

- Määritelmä: **Kategoria 1**.
- Määräämättölmän integraaliin liittyviä sääntöjä: **Kategoria 1**, **paitsi** osittaisintegrointi on **Kategoriassa 3**.
- Integroimiskaavoja: Kaavat 5.-12., ja 16. ovat **Kategoriassa 1**., loput **Kategoriassa 2.-3** (kaavasta 16. eteenpäin **Kategoria 3**.)
- Määrätty integraali: **Kategoria 1**.
- Määrättyyn integraaliin liittyviä sääntöjä. Kaavat 23.–26. ovat **Kategoriassa 1**., loput **Kategoriassa 2.-3**.
- Käyrän kaaren pituus: **Kategoria 3**.
- Pinta-alaintegraaleja: Kaava 33. on **Kategoriassa 1**., loput **Kategoriassa 2**., paitsi 37 on **Kategoriassa 3**.
- Tilavuusintegraaleja. **Kategoria 2**.

Numeerisia menetelmiä

Tämä koko osio on **Kategoriassa 3**.

Logiikka ja lukuteoria

Tämä koko osio on **Kategoriassa 2.-3**. seuraavasti: Konnektiivit ovat **Kategoriassa 2** ja loput **Kategoriassa 3**.

Todennäköisyysslaskenta ja tilastotiede

- Tilastollisten jakaumien tunnuslukuja. Keskiarvo on **Kategoriassa 1**, keskihajonta **Kategoriassa 2**, loput **Kategoriassa 3**.
- Kahden diskreetin muuttujan tilastollinen jakauma. **Kategoria 3**.
- Diskreetti todennäköisyysjakauma. Odotusarvo ja binomijakauma ovat **Kategoriassa 1**, keskihajonta **Kategoriassa 2**, loput **Kategoriassa 3**.

- Jatkuva todennäköisyysjakauma: Laavat (1) ja (2) ovat **Kategoriassa 1**. Kertymäfunktioista todennäköisyyden laskeminen on myös **Kategoriassa 1**:

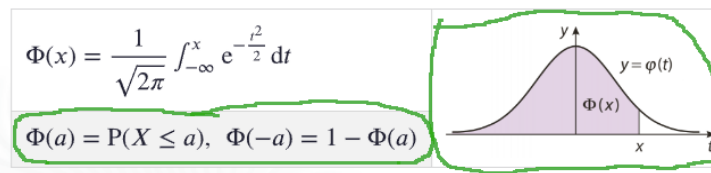
todennäköisyys	$P(X \in A) = \int_c^d f(x)dx = F(d) - F(c)$
----------------	--

Loput kaavat tässä taulukossa ovat **Kategoriassa 2** ja loput osiosta (jatkuvien jakaumien lausekkeet) **Kategoriassa 3**.

- Kombinatoriikka: **Kategoria 1**. Mielellään kaikki nämä ulkoa, vaikka ovatkin laskimessa.
- Luottamusvälit: **Kategoria 3**.

Numeerisia taulukoita

- Trigonometrinen funktioiden tarkkoja arvoja. Kannattaa osata käyttää muistikolmioita (ks. yllä, osio "Trigonometria") mutta muuten nämä arvot ovat **Kategoriassa 3**.
- Binomikertoimet (Pascalin kolmio). **Kategoria 2**.
- Newtonin binomikaava. **Kategoria 2**.
- Lukujen 1-999 alkutekijät. **Kategoria 3**.
- Normaalijakauma. **Kategoria 2**.
- Normaalijakauman tiheysfunktio. **Kategoria 2**.
- Normaalijakauman kertymäfunktio. Tuo kuva ja alempi yhtälö on **Kategoriassa 1**:



Loput **Kategoriassa 2**.