

MAA13 3. Tunti

Tehtävä 1. K2023/t.12

12. Polynomikonstruktio 12 p.

Anna esimerkki polynomista $P(x)$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

Yhtälöllä $P(x) = 1$ on täsmälleen kaksi erisuurta ratkaisua, ja yhtälöllä $P(x) = -1$ on ainakin neljä erisuurta ratkaisua.

Täysien pisteiden arvoinen ratkaisu sisältää laskut, joista voidaan nähdä, että esimerkki toteuttaa vaaditut ehdot. Graafinen perustelu tai yhtälön ratkaisukäskyn käyttö eivät yksinään riitä täysiin pisteisiin.

Tehtävä 2. S2021/B1/t.6

6. Yhtälöitä tasossa 12 p.

1. Tasojoukko A koostuu niistä pisteistä (x, y) , joiden etäisyys pisteestä $(-3, 1)$ on 4. Mikä yhtälö kuvaa joukon A pisteitä? Miksi joukon A pisteitä ei voida esittää muodossa $y = f(x)$ minkään funktion f avulla? (6 p.)
2. Määritä niiden ympyröiden yhtälöt, joiden keskipiste on $(1, 2)$ ja jotka sivuavat ympyrää $x^2 + (y - 2)^2 = 4$. (6 p.)

Tehtävä 3. S2021/B2/t.10

10. Osittaisderivaatta 12 p.

Aineisto

10.A Kuva: Funktion kuvaaja

Tarkastellaan kahden muuttujan funktiota

$$f(x, y) = x^4 + 32x + y^2 - 6y + 60.$$

1. Laske funktion f osittaisderivaatat f_x ja f_y . (4 p.)
2. Oletetaan tunnetuksi, että tämän funktion f pienin arvo saadaan siinä tason pisteessä, jossa yhtälöpari

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$$

toteutuu (ks. kuva 10.A). Määritä funktion f pienin arvo tätä tietoa käyttämällä. (8 p.)

Huomautus: Osittaisderivaatalle f_x käytetään myös merkintöjä f'_x , $D_x f$, $D_1 f$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ ja $\partial_1 f$; vastaavalla tavalla osittaisderivaatalle f_y .

Tehtävä 4. S2022/B1/t.9

9. Neljännen asteen polynomiperhe 12 p.

Tarkastellaan polynomia $f(x) = x^4 + ax^2 + bx + c$, kun $a > 0$ ja $x \in \mathbf{R}$.

1. Osoita, että derivaatta f' on aidosti kasvava funktio. (4 p.)
2. Osoita, että yhtälöllä $f(x) = 0$ on korkeintaan kaksi erisuurta reaalijuurta. (8 p.)

Tetävä 5. S2023/B2/t.11

11. Väliarvolauseen ehdot 12 p.

Tässä tehtävässä tutkitaan, milloin välillä $[-1, 1]$ määritelty funktio f toteuttaa väliarvolause-ehdon:

$$f'(a) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} \quad \text{jollakin luvulla } a \in]-1, 1[.$$

Vastaa perustellen seuraaviin osatehtäviin.

1. Anna esimerkki funktiosta, joka on jatkuva suljetulla välillä $[-1, 1]$, derivoituva avoimella välillä $] -1, 1[$ ja toteuttaa väliarvolause-ehdon. (4 p.)
2. Anna esimerkki funktiosta, joka on jatkuva suljetulla välillä $[-1, 1]$ mutta joka ei ole derivoituva avoimella välillä $] -1, 1[$ eikä toteuta väliarvolause-ehtoa. (4 p.)
3. Anna esimerkki funktiosta, joka on derivoituva avoimella välillä $] -1, 1[$ mutta joka ei ole jatkuva suljetulla välillä $[-1, 1]$ eikä toteuta väliarvolause-ehtoa. (4 p.)

Tehtävä 6. K2023/B2/t.10

10. Positroniemissiotomografia 12 p.

Aineisto

10.A Taulukko: PET-kuvantamisen tulos

Positroniemissiotomografia (PET) on lääketieteellinen kuvantamismenetelmä, jonka avulla voidaan mallintaa sisäelinten toimintaa. PET-kuvan avulla on mahdollista muodostaa aika-aktiivisuuskäyrä, joka on muotoa $f(t) = g(t) + ue^{v-(t-w)^2}$, missä $u, v, w > 0$ ja

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{kun } t < 0, \\ a_1 t + b_1, & \text{kun } 0 \leq t < w, \\ a_2 t + b_2, & \text{kun } t \geq w. \end{cases}$$

1. Taulukko 10.A sisältää erään PET-kuvan mittausarvot ajan funktiona. Mittaus voidaan mallintaa funktion f avulla, kun $u = \frac{1}{5}$, $v = 3$, $w = 2$, $a_1 = \frac{5}{4}$, $b_1 = 0$, $a_2 = -\frac{1}{4}$ ja $b_2 = 3$. Piirrä funktion f kuvaaja ja mittausarvot koordinaatistoon. (4 p.)
2. Miten parametrit u , v ja w vaikuttavat funktion kuvaajaan? (4 p.)
3. Mitkä ehdot parametrien w , a_1 , b_1 , a_2 ja b_2 tulee toteuttaa, jotta funktio f on jatkuva? (4 p.)

Tehtävä 7. K2021/B2/t. 13

13. Polynomien esitysmuodot (12 p.)

Olkoot $n \geq 1$ kokonaisluku ja $\alpha_i \in \mathbf{R}$, $\alpha_i \neq 0$, kaikille kokonaisluville $0 \leq i \leq n$.

Tutkitaan polynomeja

$$P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \cdots + p_1 x + p_0$$

ja

$$Q(x) = \left(x - \frac{1}{\alpha_1}\right) \left(x - \frac{1}{\alpha_2}\right) \cdots \left(x - \frac{1}{\alpha_n}\right) = q_n x^n + q_{n-1} x^{n-1} + \cdots + q_1 x + q_0.$$

Tässä siis kertoimet p_i ja q_i määräytyvät yhtälöiden perusteella annettujen lukujen α_j avulla.

1. Laske kaikki luvut p_i ja q_i , kun $n = 2$, $\alpha_1 = 2$ ja $\alpha_2 = 3$. (2 p.)
2. Ratkaise kaikki luvut p_i ja q_i lukujen α_1 ja α_2 avulla tapauksessa $n = 2$. (4 p.)
3. Esitä luvut q_i lukujen p_j ($0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq n$) avulla yleisessä tapauksessa. (6 p.)

TOINEN TEHTÄVÄSARJA:

1. Osoita, että jos n on pariton kokonaisluku ja $|n| \neq 1$, niin rationaaliluku

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 3}$$

voidaan supistaa luvulla 4.

2. Olkoon funktio

$$f(x) = x + 1 + \frac{2}{x - 1}.$$

Osoita, että funktiolle f on löydettävissä peräkkäiset kokonaislukuarvot niin, että funktion arvo pysyy samana. Mitkä nämä arvot ovat?

3. Kahden positiivisen luvun harmoninen keskiarvo on lukujen käänteislukujen keskiarvon käänteisluku.
 - a) Puolet matkasta ajetaan nopeudella v_1 ja puolet nopeudella v_2 . Osoita, että keskinopeus koko matkalla on nopeuksien v_1 ja v_2 harmoninen keskiarvo.
 - b) Kahden positiivisen luvun geometrinen keskiarvo on lukujen tulon neliöjuuri. Osoita, että geometrinen keskiarvo on aina suurempi tai yhtä suuri kuin harmoninen keskiarvo.
4. Osoita, että $(a - b)\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) > -4$, kun $a > 0$ ja $b > 0$.
5. a) Olkoon a ja b positiivisia lukuja. Osoita, että
 - (i) $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}(a + b)^2$
 - (ii) $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a + b) \geq 4$.b) Määritä lausekkeen $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2$ pienin arvo, kun x ja y ovat positiivisia lukuja, joille $x + y = 1$.