

# Tuntisuunnitelma

## Tunnin teema: Integrointi

### Oppimistavoitteet:

Tarkoituksena on kehittää rutiinia integraalitehtävien ratkaisemiseen ja erilaisten ratkaisutapojen käyttöä. Uskalletaan tarttua haastavilta näyttäviiin integraalilaskuihin.

### Tunnin aloitus:

Lue tehtävänanto huolellisesti.

Opiskelijoita on hyvä muistuttaa, että ratkaisujen pitää olla hyvin ymmärrettävissä, sekä vaadittavat välivaiheet ja selitykset täytyy olla.

Palauttakaa mieleen integrointikaavat.

A-osion tehtäviä

### Yleisiä havaintoja teeman tehtävistä:

Integrointikaavojen ja -sääntöjen muistelemine ja esimerkiksi milloin integraalivakiota tulee käyttää. Oikeiden integrointikaavojen käyttö. Lausekkeiden sieventäminen loppuun asti on tärkeää.

### Oppitunnin sisältö:

**Tehtävä 1: K21/3**

**Tehtävä 2: K22/4**

**Lisätehtävä 1: S24/4**

## Tehtävä 1: K21/3

### 3. Murtolausekkeen integraali (12 p.)

Jokaisesta osatehtävästä voi saada 4 pistettä.

1. Osoita, että yhtälö

$$\frac{4}{4-x^2} = \frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x}$$

on voimassa kaikilla  $x \neq \pm 2$ .

2. Laske integraali

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{2+x} dx.$$

3. Laske integraali

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{4-x^2} dx.$$

- mitä pitää ottaa ratkaisemisessa huomioon
  - Kohta 1: Tehtävässä täytyy osata laventaa murtolausekkeet samanlaisiksi ja yhdistää osoittajat.
  - Kohta 2: Osamäärän integrointi ja integrointisijoitukset.
  - Kohta 3: Muistaa hyödyntää aiempia kohtia.
- minkälaisia ja kuinka tarkkoja perusteluja vaaditaan (ks. HVP)
  - Selkeät välivaiheet esillä, jotta nähdään, kuinka lopputulokseen on päästy.
- onko erilaisia ratkaisutapoja?
  - Kohta 1: ainakin kaksi eri ratkaisutapaa.
  - Kohta 2: voi tehdä kahdella integroimiskaavalla (integroida osamäärän integroimiskaavalla tai  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$ )
  - Kohta 3: kaksi eri ratkaisutapaa (hyödynnetään symmetriaa tai lasketaan)
- onko jostain ohjelmistosta hyötyä
- tavallisimpia virheitä ja vaaranpaikkoja
  - Kohta 1: virheitä laventamisessa tai ratkaistu nimittäjien nollakohdat.
  - Kohta 2: ylimääräinen integrointivakio, väärä integraali saatu tai käytetty väärää kaavaa, kopiointivirhe, itseisarvon sijaan sulut, muistaa  $\ln 1 = 0$
  - Kohta 3: väärä integrointikaava, kerroin puuttuu, virhe integroinnissa, vastaus annettu desimaaleina
- miten tehtäviä voisi tunnilla neuvoa
  - Kohta 1: miten yhtälön molemmista puolista saisi samanlaiset (laventaminen)

- Vinkkinä maolista laskukaava
- Kohta 3: avata lauseke, hyödyntää kohtaa 1 ja 2

## Tehtävä 2: K22/4

### 4. Polynomit 12 p.

Polynomien  $f(x) = (x - 2)(x + 2)(x - 1)$  ja  $g(x) = -2(x - 2)(x + 2)(x + 1)$  kuvaajat leikkaavat toisensa kolmessa pisteessä  $(2, 0)$ ,  $(-2, 0)$  ja  $(x_0, y_0)$ , missä  $-2 < x_0 < 0$ .

- Määritä leikkauspiste  $(x_0, y_0)$ . (4 p.)
  - Laske polynomien kuvaajien väliin jäävän alueen pinta-ala välillä  $[0, 2]$ . (8 p.)
- mitä pitää ottaa ratkaisemisessa huomioon
    - Kohta 1: osaa muodostaa yhtälön ja ratkaista sen, eli osata yhtälönratkaisua
    - Kohta 2: täytyy hyödyntää kohtaa 1 ja osata muodostaa oikein määrätty integraali kokeilemalla
  - minkälaisia ja kuinka tarkkoja perusteluja vaaditaan (ks. HVP)
    - Vastaus tarkkana arvona ja välivaiheet näkyvillä
  - onko erilaisia ratkaisutapoja?
    - Kohta 2: useampi tapa muodostaa erotusfunktio  $g(x)-f(x)$  tai integroida funktiot erikseen.
  - onko jostain ohjelmistosta hyötyä
  - tavallisimpia virheitä ja vaaranpaikkoja
    - Kohta 1: yhtälönratkaisussa voi syntyä virheitä
    - Kohta 2: erotusfunktion ratkaisemisessa tai integroidessa voi tulla virheitä.
  - miten tehtäviä voisi tunnilla neuvoa
    - Kohta 1: muodostaa yhtälö polynomien lausekkeista ja älä kerro sulkuja auki vaan jaa molemmat puolet  $(x-2)(x+2)$

## Lisätehtävä 1: S24/4

### 4. Integraali 12 p.

Funktion  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  arvo  $f(x)$  on luvun  $x$  kokonaislukuosa. Esimerkiksi  $f(1) = 1$ ,  $f(\frac{11}{5}) = 2$  ja  $f(\pi) = 3$ . Laske

$$\int_0^{10} f(x) dx.$$

- mitä pitää ottaa ratkaisemisessa huomioon
  - Ymmärtää integraalifunktion yhteys pinta-alaan
  - Jakaa funktio/integraali osaväleihin
- minkälaisia ja kuinka tarkkoja perusteluja vaaditaan (ks. HVP)
  - Ratkaisussa pitää näkyä opiskelijan ymmärrys integraalin käsitteestä sekä sen yhteys pinta-alaan (pelkästään tästä jo saanut 2 pistettä)
  - Sanallisia perusteluita ja laskemista
- onko erilaisia ratkaisutapoja?
  - Ainakin kolme erilaista ratkaisua: piirtämällä ja laskemalla suorakulmiot, integroimalla, summan avulla
- onko jostain ohjelmistosta hyötyä
  - Voi koittaa piirtää kuvaajaa
- tavallisimpia virheitä ja vaaranpaikkoja
  - Ei ymmärrä funktiota
  - Ei osaa muodostaa integraalia tehtävänannon mukaisesti tai ei osaa pilkkoa pinta-ala suorakulmioihin ja laskea pinta-ala
- miten tehtäviä voisi tunnilla neuvoa
  - Piirrä kuva Geogebraa ja pohdi integraalin yhteyttä pinta-alaan

## Lisätehtävä 2: S21/3

### 3. Integraaleja 12 p.

Jokaisesta osatehtävästä voi saada 4 pistettä.

1. Laske

$$\int (x^2 + 1) dx.$$

2. Laske

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) dx.$$

3. Laske

$$\int_{-1}^1 |x|^3 dx.$$

- mitä pitää ottaa ratkaisemisessa huomioon
- minkälaisia ja kuinka tarkkoja perusteluja vaaditaan (ks. HVP)
- onko erilaisia ratkaisutapoja?
- onko jostain ohjelmistosta hyötyä
- tavallisimpia virheitä ja vaaranpaikkoja

miten tehtäviä voisi tunnilla neuvoa