

## Derivaatta – tunti 3

### Tehtävä 1: K22/3

#### abBA -tehtävä

1. Sievennä lauseke  $(a^2 + \sqrt{2}ab + b^2)(a^2 - \sqrt{2}ab + b^2)$ . (6 p.)

2. Funktiosta

$$f(x) = Ae^{2x} + B \cos(3x)$$

tiedetään, että  $f(0) = 4$  ja  $f'(0) = 5$ . Määritä vakioiden  $A$  ja  $B$  arvot. (6 p.)

### Tehtävä 2: K24/4

#### Laskuvarjohyppääjä

Mallinnetaan laskuvarjohyppääjän putoamisnopeutta funktiolla

$$v(t) = 80 \frac{e^{t/4} - 1}{e^{t/4} + 1},$$

kun aikaa  $t$  mitataan sekunneissa hyppäyshetkestä  $t = 0$  alkaen ja nopeuden yksikkö on metriä sekunnissa

Johda derivaattakaava

$$D \left( 8 \ln(e^{t/4} + 1) - t \right) = \frac{e^{t/4} - 1}{e^{t/4} + 1}.$$

Määritä hyppääjän ensimmäisen 20 sekunnin aikana putoama matka, joka saadaan integraalista

$$h = \int_0^{20} v(t) dt.$$

## Lisätehtävä 1: K23/3

### Ratakisko

Kymmenen metriä pitkä museoratakisko on vääntynyt lämpölaajenemisen vuoksi mutkalle, mutta sen päät ovat pysyneet paikoillaan (katso liioiteltu kuva 3.A tilanteesta). Kiskon poikkeama sen alkuperäisestä sijainnista kohtisuoraan mitattuna on muotoa

$$f(x) = \frac{x^3 - 15x^2 + 50x}{1000},$$

kun  $x$  on etäisyys kiskon alkupäästä. Missä kohdissa kiskon poikkeama sen alkuperäisestä asemasta on suurin? Määritä myös suurin poikkeama. Muuttujan  $x$  ja poikkeaman yksikkönä on metri.

#### 3.A Kuva: Ratakisko



Lähde: YTL.

## Lisätehtävä 2: K21/4

### 4. Peräaalto (12 p.)

#### Aineisto

#### 4.A Kuva: Funktion kuvaaja

1. Osoita, että funktion

$$f(x) = \frac{\tan x}{2 + \tan^2 x}$$

suurin arvo  $M$  välillä  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$  on  $M = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0,3536$ . Funktion kuvaaja on esitetty kuvassa 4.A. (9 p.)

2. Veden pinnalla vakionopeudella liikkuvan kappaleen (kuten veneen tai sorsan) taakse muodostuu V-kirjaimen muotoinen peräaalto, jonka avautumiskulma ei tietyillä oletuksilla riipu kappaleen nopeudesta. Kelvinin aaltoteorian mukaan tälle kulmalle  $\alpha$  on voimassa yhtälö

$$\tan \frac{\alpha}{2} = M,$$

jossa  $M$  on kohdassa 1 laskettu arvo. Määritä kulman  $\alpha \in [0^\circ, 180^\circ]$  likiarvo asteen tarkkuudella. (3 p.)

#### 4.A Kuva: Funktion kuvaaja

