

Tuntisuunnitelma

Tunnin teema: Funktioiden keksiminen

Oppimistavoitteet:

- Harjoitella erilaisten funktioiden keksimistä.
- Kerrata polynomien, jatkuvuuden, derivoituvuuden ja käänteisfunktion käsitteitä/määritelmiä.

Tunnin aloitus:

- Ohjelmistoja kannattaa hyödyntää funktioiden löytämisessä (esim. GeoGebra ja liukusäätimet), mutta funktioiden ominaisuudet täytyy perustella laskennallisesti/sanallisesti!
- Kannattaa pohtia sekä kirjoittaa itselleen ylös, mitä erilaisia funktiotyyppejä on olemassa!
- Ole tarkka tehtävänantojen kanssa (mitä ohjeita ja ehtoja tehtävänannoista löytyy sanamuotoja myöten, esim. "täsmälleen kaksi erisuurta ratkaisua" vs. "ainakin neljä erisuurta ratkaisua")!
- Keksityt funktiot ovat (yleensä) hyvin yksinkertaisia.

Yleisiä havaintoja teeman tehtävistä:

- Tärkeitä asioita
 - Luetun ymmärtäminen (esim. "derivoituva" vs. "ei ole derivoituva") ja käsitteiden ymmärtäminen (polynomi, jatkuvuus, derivaatta, raja-arvo, käänteisfunktio)
 - Perustelu käsitteiden kautta
 - Funktioiden muotojen tunteminen (mitä eri funktioita on ja miten ne käyttäytyvät (graafisesti); erityisesti polynomifunktiot, itseisarvofunktiot, trigonometriset funktiot ja eksponenttifunktiot).
- Isoin haaste ehkä jumiin jääminen.
 - Yleensä halutut funktiot ovat yksinkertaisia.
 - Kannattaa listata, millaisia funktioita tietää, ja kokeilla Geogebralla (esim. liukusäätimet).

Oppitunnin sisältö:

Palautekysely!!!

Tehtävä 1 (K23/12):

12. Polynomikonstruktio 12 p.

Anna esimerkki polynomista $P(x)$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

Yhtälöllä $P(x) = 1$ on täsmälleen kaksi erisuurta ratkaisua, ja yhtälöllä $P(x) = -1$ on ainakin neljä erisuurta ratkaisua.

Täysien pisteiden arvoinen ratkaisu sisältää laskut, joista voidaan nähdä, että esimerkki toteuttaa vaaditut ehdot. Graafinen perustelu tai yhtälön ratkaisukäskyn käyttö eivät yksinään riitä täysiin pisteisiin.

- mitä pitää ottaa ratkaisemisessa huomioon
 - Nyt ei kysytä minkään funktion nollakohtia, mutta ratkaisu kannattaa kuitenkin ajatella (polynomien $P(x) - 1$) nollakohtien kautta.
 - Etsitään vähintään neljännen asteen polynomia!
 - Pyydetty yhtälön ratkaisut voi joko ratkaista (tarkat arvot + osoittaminen, että ei muita ratkaisuja!) tai osoittaa.
- minkälaisia ja kuinka tarkkoja perusteluja vaaditaan (ks. HVP ja LHVP)
 - Laskennalliset perusteet täytyy olla (joko lasketaan yhtälöiden ratkaisut (ja osoitetaan, ettei muita ratkaisuja ole) tai osoitetaan ratkaisujen lukumäärä!) Pisteiden saaminen ei suoraan edellytä laajoja sanallisia perusteluja, mutta sanalliset selitykset kannattavat ehdottomasti!
 - Yhtälöiden ratkaisujen oikea osoittaminen tarjoaa 10 pistettä (5+5), kun taas pelkkä graafinen ratkaisu max 2!
- onko erilaisia ratkaisutapoja?
 - Yhtälöt voi ratkaista (kunhan muistaa sen jälkeen osoittaa, ettei ratkaisuja ole enempää) tai osoittaa ratkaisujen lukumäärän.
- onko jostain ohjelmistosta hyötyä
 - Polynomien etsintä GeoGebralla.
 - Kulkukaavion piirtäminen piirto-ohjelmalla.
- tavallisimpia virheitä ja vaaranpaikkoja
 - Muodostetaan kaksi eri polynomia (0 pistettä!)
 - Osoittaminen pelkästään graafisesti (voi saada max 2 pistettä!)
 - Menee sekaisin, missä tilanteessa on 2 ratkaisua ja missä vähintään 4.
- miten tehtäviä voisi tunnilla neuvoa
 - Funktion löytäminen (esim. GeoGebralla)
 - Millainen funktion pitää olla?
 - Miten tehtävän ratkaisussa voisi hyödyntää nollakohtia? Minkä polynomien nollakohtia?
 - Miten ratkaisussa voi hyödyntää funktion kulkua/derivaattaa?

Tehtävä 2 (S23/11):

11. Väliarvolauseen ehdot 12 p.

Tässä tehtävässä tutkitaan, milloin välillä $[-1, 1]$ määritelty funktio f toteuttaa väliarvolause-ehdon:

$$f'(a) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} \quad \text{jollakin luvulla } a \in]-1, 1[.$$

Vastaa perustellen seuraaviin osatehtäviin.

1. Anna esimerkki funktiosta, joka on jatkuva suljetulla välillä $[-1, 1]$, derivoituva avoimella välillä $] -1, 1[$ ja toteuttaa väliarvolause-ehdon. (4 p.)
 2. Anna esimerkki funktiosta, joka on jatkuva suljetulla välillä $[-1, 1]$ mutta joka ei ole derivoituva avoimella välillä $] -1, 1[$ eikä toteuta väliarvolause-ehtoa. (4 p.)
 3. Anna esimerkki funktiosta, joka on derivoituva avoimella välillä $] -1, 1[$ mutta joka ei ole jatkuva suljetulla välillä $[-1, 1]$ eikä toteuta väliarvolause-ehtoa. (4 p.)
- mitä pitää ottaa ratkaisemisessa huomioon
 - Ratkaisussa pitää todeta, että keksitty funktio on/ei ole jatkuva tai derivoituva, mutta näitä ominaisuuksia ei tarvitse perustella.
 - Väliarvolauseen toteuttaminen/ei toteuttaminen täytyy perustella!
 - Esimerkkien antaminen ilman perusteluja antaa max 5 pistettä.
 - Funktioiden on täytettävä jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyvät ehdot sekä oltava määritelty välillä $[-1,1]$, jotta edes voi saada väliarvolauseen tarkasteluun liittyviä pisteitä!
 - minkälaisia ja kuinka tarkkoja perusteluja vaaditaan (ks. HVP ja LHVP)
 - Ks. edellinen kohta
 - onko erilaisia ratkaisutapoja?
 - Ehdot täyttäviä funktioita on useita erilaisia.
 - onko jostain ohjelmistosta hyötyä
 - Funktioiden kokeilu ja väliarvolauseen yhtälön muodostaminen (liikusäätimiä hyödyntäen) GeoGebralla.
 - tavallisimpia virheitä ja vaaranpaikkoja
 - Unohtaa jonkin ehdon tarkastelut.
 - Sekoittaa avoimen ja suljetun välin keskenään.
 - miten tehtäviä voisi tunnilla neuvoa

- Kannattaa lähteä pohtimaan yksinkertaisia funktioita ja sitä, voisiko edellisen kohdan funktiota hyödyntää seuraavissa kohdissa eli mitä täytyy muuttaa, kun ehdot muuttuvat!

Tehtävä 3 (K24/9):

9. Kääntyvä, muttei monotoninen 12 p.

Anna esimerkki funktiosta $f : A \rightarrow B$, jolla on käänteisfunktio, mutta joka ei ole monotoninen. Muista kertoa, mitkä ovat funktiosi määrittelyjoukko A ja arvojoukko B .

- mitä pitää ottaa ratkaisemisessa huomioon
 - Oikein määritelty funktio antaa jo 4 pistettä
 - Määrittelyjoukon kertominen (ja että funktio todella on määritelty kaikilla kyseisen joukon arvoilla) -> 1 p.
 - Oikea arvojoukko -> 1 p.
 - Ehdot toteuttava esimerkkifunktio -> 2 p.
 - Loput 8 pistettä voi saada vain, jos esimerkkifunktio on oikeanlainen
 - 4 pistettä käänteisfunktion olemassaolon osoittamisesta
 - 4 pistettä sen osoittamisesta, ettei funktio ole monotoninen.
- minkälaisia ja kuinka tarkkoja perusteluja vaaditaan (ks. HVP)
 - Matemaattinen osoittaminen olennaista!
 - Laskinta voi hyödyntää käänteisfunktion määrittämisessä ja kuvaajaa monotonisuustarkastelussa (hyvät kuvakaappaukset!), mutta pelkästään näillä ei saa täysiä pisteitä!
- onko erilaisia ratkaisutapoja?
 - Ehdot täyttäviä funktioita on useita erilaisia.
 - Voi esim. ratkaista käänteisfunktion lausekkeen tai todistaa, että funktio saa kaikki arvonsa tarkalleen kerran.
- onko jostain ohjelmistosta hyötyä
 - Laskinta voi hyödyntää käänteisfunktion määrittämisessä ja kuvaajaa monotonisuustarkastelussa (hyvät kuvakaappaukset!), mutta pelkästään näillä ei saa täysiä pisteitä!
- tavallisimpia virheitä ja vaaranpaikkoja
 - Joukkoja A ja B ei ole määritelty (tällöin tehtävästä mahdollista saada max 8 pistettä)
- miten tehtäviä voisi tunnilla neuvoa
 - Mitä käänteisfunktio tarkoittaa? Mitä monotonisuus tarkoittaa? (ylipäätään käsitteiden hallinta)

- Kannattaa hahmotella erilaisia funktioita GeoGebralla.

Lisätehtävä 1 (K22/8):

8. Jatkuva mutta ei derivoituva funktio 12 p.

Anna esimerkki jatkuvasta funktiosta $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, joka ei ole derivoituva kohdassa $x = 1$. Perustele erotusosamäärän

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

avulla, miksi funktio ei ole derivoituva kohdassa $x = 1$. Perustele lisäksi funktion jatkuvuus.

- mitä pitää ottaa ratkaisemisessa huomioon
 - Jatkuvuuden perustelusta on mahdollista saada 4 pistettä ja ei-derivoituvuuden perustelusta 8 pistettä (nämä 8 pistettä voi saada, vaikka esimerkkifunktio olisi epäjatkuva).
 - Kannattaa ajatella yksinkertaisia funktioita.
 - Muista tarkastella molemminpuoleiset raja-arvot sekä jatkuvuuden että derivaatan kohdalla!
 - Huolehdi, että funktio on määritelty myös kohdassa $x = 1$.
- minkälaisia ja kuinka tarkkoja perusteluja vaaditaan (ks. HVP ja LHVP)
 - Ks. edellinen kohta.
- onko erilaisia ratkaisutapoja?
 - Ehdot täyttäviä funktioita on useita erilaisia.
- onko jostain ohjelmistosta hyötyä
 - Sopivaa funktiota voi etsiä GeoGebralla.
 - Erotusosamäärän voi laskea laskimen kaavalla/komennolla, mutta "Undefined" laskimesta ei kelpaa perusteluksi sille, että raja-arvoa (tms.) ei ole olemassa.
- tavallisimpia virheitä ja vaaranpaikkoja
 - Unohtaa toispuoleiset raja-arvot.
 - Unohtaa raja-arvot ylipäättään.
 - Unohtaa jatkuvuustarkastelussa funktion raja-arvon ja arvon välisen yhteyden.
- miten tehtäviä voisi tunnilla neuvoa
 - Mitä jatkuvuus tarkoittaa/miten se määritellään? Entä derivoituvuus?