

Tuntisuunnitelma

Tunnin teema: Kuvaajan piirtäminen ja tulkinta

Oppimistavoitteet:

S22/12 Derivaatan geometrinen tulkinta

- Osataan osoittaa graafisesti derivaatan määritelmä
- Osataan osoittaa derivaatan määritelmän avulla tietyn funktion derivaatta laskennallisesti

K24/8 Maan kierto auringon ympäri mallintaminen xy-koordinaatistossa yksikköympyrän kehää pitkin

- Osataan piirtää sanallisesta tehtävästä mallikuva
- Etäisyyksien osoittamista vektorien avulla
- Kulman laskeminen vektoreiden avulla

K23/10 Sisäelinten toiminnan mallintaminen funktiolla, kuinka eri parametrit vaikuttavat funktion kuvaajaan

- Funktion muodostamista
- Parametrien vaikutusta kuvaajaan sekä funktion jatkuvuuteen

Tunnin aloitus:

Kysy rohkeasti apua

Tehtävänanto voi vaikuttaa vaikealta, mutta sitä ei kannata säikähtää

Dokumentointi!

Yleisiä havaintoja teeman tehtävistä:

Avaa kaikki tiedostot, jotka liittyvät tehtävään

Tehtävässä K24/8 tarkastellaan kiertoa xy-akselilla, mutta maan akseli on xz-tasossa

Tehtävä 1: S22/13

13. Derivaatan määritelmä 12 p.

1. Derivaatta määritellään erotusosamäärän raja-arvona. Esitä derivaatan määritelmän geometrinen tulkinta funktion $f(x) = \ln x$ avulla pisteessä $x = 2$. (4 p.)
2. Osoita derivaatan määritelmän avulla, että funktion $f(x) = \ln x$ derivaatta on $f'(x) = \frac{1}{x}$, kun $x > 0$. Voit käyttää tietoa

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{1/t} = e.$$

Mitä pitää ottaa ratkaisemisessa huomioon?

1.

Piirrä kuvaaja ja tangentti pisteen $x=2$ kautta tai suora kahden kuvaajan pisteen kautta.

Kuviossa tangentin kulmakerroin vastaa derivaatan erotusosamäärää, josta otetaan raja-arvo.

Kuvan sijaan kelpaa vastaava kuvaus sanallisesti.

2.

Funktion derivaatta pisteessä x voidaan tutkia kahdella eri kaavalla.

Logaritmin laskusäännöt Maolista.

Hyödynnä muuttujan vaihdosta ja muista myös muuttaa raja-arvon muotoa tällöin.

Sievennä mahdollisimman pitkälle, hyödynnä tehtävänannossa olevaa tietoa.

Pohdi muuttujien riippuvuuksia.

$\ln(e)=1$.

Minkälaisia ja kuinka tarkkoja perusteluja vaaditaan (ks. HVP)

Kuva tai sanallinen kuvaus

Kaikki laskennalliset välivaiheet näkyviin

Onko erilaisia ratkaisutapoja?

Onko jostain ohjelmistosta hyötyä?

Geogebra

Tavallisimpia virheitä ja vaaranpaikkoja

1. muodostaa tangentin kulmakertoimen väärin
2. Ei hyödynnä logaritmin laskusääntöjä
Ei osaa käyttää derivaatan määritelmää
Ei sievennä mahdollisimman pitkälle

Miten tehtäviä voisi tunnilla neuvoa?

Piirrä kuvaaja

Kertaa derivaatan määritelmä, tarkoitus

Toisessa kohdassa auttaa löytämään oikeat logaritmin laskukaavat

Neuvomaan tekemään muuttujanvaihdon

Raja-arvossa voi pohtia muuttujien riippuvuuksia, voiko jotain siirtää raja-arvosta ulkopuolelle

Tehtävä 2. K23/10

10. Positroniemissiotomografia 12 p.

Aineisto

10.A Taulukko: PET-kvantamisen tulos

Positroniemissiotomografia (PET) on lääketieteellinen kuvantamismenetelmä, jonka avulla voidaan mallintaa sisäelinten toimintaa. PET-kuvan avulla on mahdollista muodostaa aika-aktiivisuuskäyrä, joka on muotoa $f(t) = g(t) + ue^{v-(t-w)^2}$, missä $u, v, w > 0$ ja

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{kun } t < 0, \\ a_1 t + b_1, & \text{kun } 0 \leq t < w, \\ a_2 t + b_2, & \text{kun } t \geq w. \end{cases}$$

1. Taulukko 10.A sisältää erään PET-kuvan mittausarvot ajan funktiona. Mittaus voidaan mallintaa funktion f avulla, kun $u = \frac{1}{5}$, $v = 3$, $w = 2$, $a_1 = \frac{5}{4}$, $b_1 = 0$, $a_2 = -\frac{1}{4}$ ja $b_2 = 3$. Piirrä funktion f kuvaaja ja mittausarvot koordinaatistoon. (4 p.)
2. Miten parametrit u , v ja w vaikuttavat funktion kuvaajaan? (4 p.)
3. Mitkä ehdot parametrien w , a_1 , b_1 , a_2 ja b_2 tulee toteuttaa, jotta funktio f on jatkuva? (4 p.)

Mitä pitää ottaa ratkaisemisessa huomioon?

1.

Huomaa avata tekstilinkki, josta löytyy pisteparit

Piirrä pisteparit sekä funktio Geogebraalla

muista myös kirjoittaa $g(t)$ määritelmä Geogebraalla

Geogebraassa tulee näkyä tarvittavat asiat!

2.

Parametrien arvojen vaikutusta kuvaajan muotoon voi testata liikusäätimen avulla ja

muista testata molempiin suuntiin

3.

Funktio on kahden funktion summa, pohdi jatkuvuutta erikseen

Funktio on jatkuva, jos toispuoleiset raja-arvot ovat yhtä suuret kuin funktion arvo tässä pisteessä.

Muista tutkia raja-arvoa oikealta ja vasemmalta

Minkälaisia ja kuinka tarkkoja perusteluja vaaditaan (ks. HVP)

Onko erilaisia ratkaisutapoja?

Parametreille voimassa olevat ehdot voi esittää a_1 , a_2 , w tai b_2 avulla, ei väliä.

Onko jostain ohjelmistosta hyötyä?

Tehtävä toteutetaan Geogebraalla

Tavallisimpia virheitä ja vaaranpaikkoja?

1. Unohtaa merkitä pisteparit tai funktion tai $g(t)$ määrittelyehdot

2. Tulkitsee muutoksia väärin

3.

Ei tarkastele raja-arvoa molemmilta puolin

Ei osaa valita oikeaa funktiota tarkasteluun oikealle tai vasemmalle raja-arvolle

Ei tarkastele funktion arvoa siinä pisteessä

Miten tehtäviä voisi tunnilla neuvoa?

1. Piirrä pisteparit, funktio ja $g(t)$ määritelmät

2. Tutki parametrien arvojen vaikutusta kuvaajan muotoon liikusäätimen avulla

3. Pohdi jatkuvuutta erikseen, eksponenttifunktion jatkuvuutta sekä funktion $g(t)$ jatkuvuutta.

Milloin raja-arvo lähenee nollaa oikealta ja vasemmalta (mitä funktiota käytetään tutkimiseen).

Tehtävä 3: K24/8

8. Taivaanmekaniikka 12 p.

Aineisto

8.A [Video: Maapallon akseli](#)

Maapallo pyörii akselinsa ympäri. Akselin ja Maan kiertoradan tason (eli ratatason) normaalin välisen kulman suuruus on $23,5^\circ$ astetta, ja akselin suunta pysyy samana Maan kiertäessä Aurinkoa. Akselin asento on sellainen, että pohjoisnapa on kesäpäivänseisauksena lähimpänä Aurinkoa ja talvipäivänseisauksena kauimpana siitä. Videossa [8.A](#) on havainnollistettu tilannetta.

Määritä Maan akselin ja Auringosta Maahan kulkevan säteen välinen kulma kuukausi kesäpäivänseisauksen jälkeen. Maapallon kiertorata oletetaan tässä ympyräksi.

Mitä pitää ottaa ratkaisemisessa huomioon?

Piirrä mallikuva xy-koordinaatistoon, niin että Aurinko sijoitetaan origoon ja maapallo kulkee xy-koordinaatistossa yksikköympyrän kehää pitkin.

Maan akselin ja auringosta maahan kulkevan säteen välinen kulma kuukausi kesäpäivänseisauksen jälkeen (piirrä etäisyys KPS yksikkö ympyrän kaarta eteenpäin).

Trigonometrisia funktioita sini ja kosini

miten muodostetaan vektoreita xy-koordinaatistossa ja xz-koordinaatistossa.

Ensimmäisessä kohdassa vektorin voi muodostaa auringosta maahan tai maasta aurinkoon (ei väliä) ja akselin suuntavektorin muodostamisessa ei väliä suunnalla

Maan akseli on xz-suuntainen

Vastaukseksi voi saada myös $110,2017\dots^\circ$. Riippuen, onko valinnut Auringosta maahan kulkevan säteen suuntavektorin vai maasta aurinkoon kulkevan säteen suuntavektorin ja vastaavasti pohjoiselle vai eteläiselle pallonpuoliskolle osoittavan akselin suuntavektorin. Vastauksesta

110,2017...° tulee huomata, että kahden suoran välinen kulma on enintään 90°, jolloin oikea vastaus on

$$180^\circ - 110,2017...^\circ = 69,7982...^\circ \approx 69,8^\circ.$$

Minkälaisia ja kuinka tarkkoja perusteluja vaaditaan (ks. HVP)

Kaikki oleelliset laskuvaiheet pitää olla näkyvillä

Onko erilaisia ratkaisutapoja?

Mallikuvan voi piirtää käsin tai Geogebraalla

Suuntavektoreiden valinta

Onko jostain ohjelmistosta hyötyä?

Geogebra

Tavallisimpia virheitä ja vaaranpaikkoja?

Ei hahmota tilannetta, ei pääse alkuun

Ei osaa muodostaa vektoreita trigonometristen funktioiden avulla

Miten tehtäviä voisi tunnilla neuvoa?

Piirrä mallikuva xy-koordinaatistoon, niin että Aurinko sijoitetaan origoon ja maapallo kulkee xy-koordinaatistossa yksikköympyrän kehää pitkin.

Missä pisteessä Maa sijaitsee kuukausi kesäpäiväseisauksen jälkeen?

Laskemaan Maan ja x-akselin väliin jäävän kulman suuruus

Maasta aurinkoon kulkeva yksikkövektori $\mathbf{r}$

Hahmottamaan kuva kiertoradan tason normaalista $\mathbf{n}$ ja akselin suuntavektorista $\mathbf{a}$

Suuntavektorin $\mathbf{a}$ muodostaminen

Akselin ja auringosta maahan kulkevan säteen välinen kulma