Tunti 11: Uusi käsite

Tehtävä 1. Syksy 2023/10

10. Parilliset ja parittomat funktiot 12 p.

Funktio $h: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ on *parillinen*, jos $h(-x) = h(x)$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$, ja *pariton*, jos $h(-x) = -h(x)$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Valitse osatehtävissä 10.1–10.4 oikea vaihtoehto. Vastauksia ei tarvitse perustella. Oikea vastaus 1 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

Jos olet aloittanut tehtävään vastaamisen, mutta et haluakaan jättää tehtävää arvosteltavaksi, poista vastauksesi valitsemalla pudotusvalikosta tyhjä rivi.

Kirjoita osatehtävien 10.5 ja 10.6 vastaukset perusteluineen vastauslaatikkoon.

1. Funktio $a(x) = \sin x$ 1 p.
2. Funktio $b(x) = \cos x$ 1 p.
3. Funktio $c(x) = x \sin x$ 1 p.
4. Funktio $d(x) = \sin x + \cos x$ 1 p.
5. Oletetaan, että f on pariton. Osoita, että $f(0) = 0$. **(4 p.)**
6. Oletetaan, että g on parillinen ja derivoituva. Osoita, että g' on pariton. **(4 p.)**

Tehtävä 2. Syksy 2024/9

9. Jaksollisuus 12 p.

Funktio $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ on *jaksollinen*, jos on olemassa sellainen $L > 0$, että sen kuvaaja pysyy samana, kun sitä siirretään L yksikköä vaakasuorassa suunnassa. Tämä ominaisuus voidaan esittää myös ehdolla $f(x + L) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Pienin tällainen luku L on funktion *perusjakso*.

Piirrä jokaisessa osatehtävässä funktion kuvaaja omaan koordinaatistoonsa. Anna vastauksena funktion perusjakso sekä kuvaaja, johon on merkitty perusjakson mittainen osa x-akselia.

1. $f(x) = \sin(2\pi x)$ **(4 p.)**
2. $g(x) = |\sin(\pi x) + \sin(2\pi x)|$ **(4 p.)**
3. Anna esimerkki jaksollisesta funktiosta $h: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, jonka perusjakso on 4. **(4 p.)**

Tehtävä 3. Syksy 2024/12

12. Bézier-käyriä 12 p.

> **Aineisto**
>
> 12.A Teksti ja animaatio: Bézier-käyrän määritelmä

Bézier-käyriä käytetään tietokoneavusteisessa suunnittelussa (CAD), joka on vektorigrafiikan tärkeä sovelluskohde. Bézier-käyrä määritetään niin sanottujen ohjauspisteiden avulla, kuten tekstissä 12.A on kuvattu.

1. Eräs lineaarinen Bézier-käyrä koostuu pisteistä $B(t) = (4t, t + 2), 0 \leq t \leq 1$. Määritä tämän käyrän ohjauspisteet. **(4 p.)**
2. Erään toisen asteen Bézier-käyrän ohjauspisteet ovat $P_0 = (-2, 0)$, $P_1 = (0, 8)$ ja $P_2 = (2, 0)$. Määritä käyrän yhtälö muodossa $y = f(x)$. **(8 p.)**

Tehtävä 4. Kevät 2022/9

9. Ympyrä ja numeeriset menetelmät 12 p.

Tarkastellaan yksikköympyrän ensimmäisessä neljänneksessä sijaitsevaa osaa, eli ehtojen $0 \leq x \leq 1$ ja $0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$ määräämää aluetta B. Arvioidaan alueen B pinta-alaa puolisuunnikassäännöllä ja keskipistesäännöllä. Keskipistesääntö tarkoittaa suorakaidesääntöä, jossa suorakaiteen korkeus määräytyy osavälin keskipisteen mukaan.

Valitse kolme seuraavista väitteistä, ja selvitä, ovatko ne tosia vai epätosia:

- Väite 1. Keskipistesäännöllä voidaan saada arvio, joka on suurempi kuin alueen B todellinen pinta-ala.
- Väite 2. Keskipistesäännöllä voidaan saada arvio, joka on pienempi kuin alueen B todellinen pinta-ala.
- Väite 3. Puolisuunnikassäännöllä voidaan saada arvio, joka on suurempi kuin alueen B todellinen pinta-ala.
- Väite 4. Puolisuunnikassäännöllä voidaan saada arvio, joka on pienempi kuin alueen B todellinen pinta-ala.

Muista myös perustella vastauksesi.