

# Tuntisuunnitelma

## Tunnin teema: Yhtälöt

### Oppimistavoitteet:

- Kehittää opiskelijoiden taitoa ratkaista erilaisia yhtälöitä riittävästi perustellen ja erilaisilla ratkaisumenetelmillä.
- Oppia, mitä ylioppilaskoetehtävien ratkaisussa on hyvä huomioida yleisellä tasolla.

### Tunnin aloitus:

Tunti koskee ylioppilaskokeen A-osaa, joten käyttää vain A-osassa saatavilla olevia ohjelmia.

Syksyn 2024 pitkän matematiikan yo-kokeen lopullisten hyvien vastausten piirteiden silmäilyä

- Alkutekstin 2. ja 3. kappale
- Vastauksen hyväksyttävä tarkkuus (2. kohta pisteytysohjeiden lukuohjeissa)
- Tehtäväkohtaiseen pisteytysohjeeseen toissijaiset vähennykset
  - Opiskelijoilta voi esim. kysyä taululla ennakkoon, onko  $\frac{2\pi}{4}$  tai  $\ln e$  loppuun asti sievennetty?

### Huomioita

- Kannattaa tutkia, mitä säännönmukaisuuksia, yhtäläisyyksiä tai tuttuja asioita tehtävänannoista löytyy (esim. joku luku, joka voidaan esittää toisten lukujen summana tai tulona, voisiko hyödyntää jotain valmista kaavaa (summan neliö, erotuksen neliö, summan ja erotuksen tulon muistikaava), mitä tuttuja käsitteitä/sanoja...)
- Kannattaa tarkistaa saadut ratkaisut sijoittamalla (ei vaadita kokeessa)!
- Yhtälöratkaisussa kannattaa kirjoittaa kaikki vaiheet, mitä tekee ja lisäksi sanallista selitystä sitomaan ratkaisua (oikeista vaiheista ja selityksistä voi saada pisteitä, vaikka tulisikin virheitä).
  - Jos päätätte ratkaista tehtävän kokeilemalla, niin muistakaa tarkistaa löytämäne ratkaisut sijoittamalla ja perustella, miksi muita ratkaisuja ei ole!

### Yleisiä havaintoja teeman tehtävistä:

#### Haasteita/tärkeitä asioita

- Usean ratkaisutavan käyttö, yhteisen tekijän ottaminen (tehtävä 1)
- Itseisarvon tulkinta ja purkaminen (tehtävä 2)
- Säännönmukaisuuden (summan tai erotuksen neliö) löytäminen, tehtävänannon oletusten hyödyntäminen, kokeilu mekaanisen ratkaisemisen sijaan (miksi tässä se on tässä tehtävässä mahdollista) (lisätehtävä 1B)

- Lukujen muokkaaminen luvun 2 potensseiksi (lisätehtävä 1B.1.), useampivaiheisen trigonometrisen yhtälön ratkaiseminen (lisätehtävä 1B.2.), tarkoilla arvoilla laskeminen (lisätehtävä 1B)

## Oppitunnin sisältö:

### Tehtävä 1, K22/2:

#### 2. Useita ratkaisutapoja 12 p.

Yhtälöitä ratkaistaessa käytetään usein osittelulakia eli kerrotaan sulkeet auki tai otetaan yhteinen tekijä;

$$4(x + 1) = 4x + 4$$

on esimerkki sulkeiden auki kertomisesta ja

$$4x + 4 = 4(x + 1)$$

on esimerkki yhteisen tekijän ottamisesta.

##### 1. Ratkaise yhtälö

$$(2x + 1)(x - 6) = 0$$

ja yhtälö

$$(2y + 1)(y - 6) = -6$$

eri tavoilla niin, että toinen yhtälö ratkaistaan kertomalla sulkeet auki ja toinen niin, että sulkeita ei kerrota auki. (6 p.)

##### 2. Ratkaise yhtälö

$$5(7x - 2) + 7(7x - 2) = 12$$

ja yhtälö

$$5(7y - 2) + 7(7y + 2) = 12$$

eri tavoilla niin, että toinen yhtälö ratkaistaan kertomalla sulkeet auki ja toinen niin, että sulkeita ei kerrota auki. (6 p.)

- mitä pitää ottaa ratkaisemisessa huomioon
  - Vastaukset tarkkoina arvoina (pyöristettynä desimaalilukuna esittämisestä lähtee piste, Lopulliset Hyvän vastauksen piirteet)!
  - Vältä kokeilua (ei saa läheskään täysiä pisteitä)!
- minkälaisia ja kuinka tarkkoja perusteluja vaaditaan (ks. Hyvän vastauksen piirteet ja Lopulliset Hyvän vastauksen piirteet)
  - Tulon nollasäännön mainitseminen (jos päättääkin jakaa yhtälön, niin huomioi tilanne, jolloin jakaja olisi nolla)!
  - Yhtälöiden sieventäminen mahdollisimman pitkälle (esim. muotoon  $ax + b = c$ ) ja ratkaisu vasta sen jälkeen.
- onko erilaisia ratkaisutapoja?

- Ei juurikaan ole, paitsi esim. jotkin toisen asteen yhtälöt voidaan ratkaista usealla tavalla (ratkaisukaava, tulon nollasääntö, SpeedCrunch)
- onko jostain ohjelmistosta hyötyä
  - Yhtälönratkaisussa voi hyödyntää SpeedCrunchia, kun on sieventänyt ensin mahdollisimman pitkälle.
- tavallisimpia virheitä ja vaaranpaikkoja
  - Kohta 1
    - sulkeiden kertominen auki ensimmäisessä yhtälössä tulon nollasäännön sijaan.
    - tulon nollasäännön logiikan hyödyntäminen toisen yhtälön kohdalla.
  - Kohta 2
    - sulkujen poistaminen ensimmäisessä yhtälössä (missään vaiheessa)
    - yhteisen tekijän ottamisen yrittäminen toisessa yhtälössä
  - Toisen ratkaisun unohtaminen toisen asteen yhtälössä.
  - Ratkaistu kahdesti sama yhtälö eri menetelmin (LHVP).
  - Ei sievennä yhtälöä loppuun, vaan ratkaisee liian aikaisin esim. SpeedCrunchilla.
- miten tehtäviä voisi tunnilla neuvoa
  - Pohdi, mitä kaikkia ratkaisutapoja yhtälöille on.
  - Voiko löytää esimerkiksi yhteisen tekijän? Miksi tehtävään on valittu tiettyjä lukuja?
  - Ole tarkkana, että varmasti ratkaiset oikeaa yhtälöä (lue tarkasti tehtävänantoa ja yhtälöitä)!

## Tehtävä 2, K24/3:

### 3. Itseisarvoyhtälöitä 12 p.

Ratkaise algebrallisesti tai geometrisesti seuraavat yhtälöt.

1.  $|y + 3| = |y + 5|$ . (6 p.)

2.  $|x| + |x - 5| = 7$ . (6 p.)

- mitä pitää ottaa ratkaisemisessa huomioon
  - Jos päättää korottaa neliöön, niin pohdi, miksi niin voi tehdä ja esitä tarvittaessa neliöönkorotusehto.
  - Ole tarkkana sen suhteen, mitä itseisarvo tarkoittaa!
  - Väärät ratkaisut saa selville sijoittamalla yhtälöön (muuten kokeiluratkaisu ilman oikeita perusteluja ei anna täysiä pisteitä!)
- minkälaisia ja kuinka tarkkoja perusteluja vaaditaan (ks. HVP ja LHVP)
  - Sanalliset selitykset sille, mitä tehdään!

- onko erilaisia ratkaisutapoja?
  - Tehtävänannossa jo mainitaan ”algebrallisesti tai geometrisesti”
  - Kohta 1
    - Luvut  $y + 3$  ja  $y + 5$  ovat joko samat tai toistensa vastaluvut + yhtälönratkaisu (suositeltava)
    - Tarkasteltu kaikki mahdolliset välit (esim.  $-5 \leq y \leq -3$ ) + selitykset, milloin ratkaisuja ei ole ja yhtälönratkaisu, kun ratkaisu on olemassa.
    - Geometrinen ratkaisu eli lukujen etäisyyden avulla + perustelu, miksi ratkaisuja on vain yksi.
    - Korotettu puolittain neliöön.
  - Kohta 2
    - Tarkasteltu kaikki mahdolliset välit + selitykset, milloin ratkaisuja ei ole ja yhtälönratkaisu, kun ratkaisu on olemassa.
    - Neliöönkorotusta, sieventämistä ja yhtälönratkaisua (Muista neliöönkorotusehdot!)
    - Geometrinen ratkaisu eli lukujen etäisyyden avulla + perustelut, miksi ratkaisuja on kaksi.
- onko jostain ohjelmistosta hyötyä
  - Piirto-ohjelma geometrisessä ratkaisussa
- tavallisimpia virheitä ja vaaranpaikkoja
  - Aukaistaan itsearvot väärin (esim. vain poistetaan suoraan).
  - Unohdetaan jokin vastaus.
  - Selitysten puute (esim. miksi ei ole olemassa muita ratkaisuja)
- miten tehtäviä voisi tunnilla neuvoa
  - Kannattaa hahmotella ratkaisua piirto-ohjelmalla!
  - Mitä itseisarvon määritelmä tarkoittaa?

**Lisätehtävä 1A, S22/8 (joko tämä tai Lisätehtävä 1B, suositellaan tätä):**

## 8. Kokonaislukuratkaisuja 12 p.

Määritä yhtälön  $x^6 + 2x^3y^3 + y^6 = 4225$  kaikki kokonaislukuratkaisut, kun  $x > 0$  ja  $y > 0$ .

- mitä pitää ottaa ratkaisemisessa huomioon
  - Ole tarkka sen suhteen, että käyt kaikki mahdolliset tilanteet läpi (miksi saadut ratkaisut ovat ainoat)!
- minkälaisia ja kuinka tarkkoja perusteluja vaaditaan (ks. HVP ja LHVP)
  - Perustelu, miksi kokeilu on tässä tehtävässä ok ja miksi sille voidaan asettaa rajat (algebrallinen perustelu eli ei esim. pelkkä kuva tai kuvaaja)!
  - Maininnat, kun hyödynnetään tehtävänannon oletuksia!
  - Kaikkien kokeilutapausten esittäminen.

- onko erilaisia ratkaisutapoja?
  - Summan neliön hyödyntäminen, perusteltu arviointi (millä välillä  $x$  ja  $y$  voivat olla) ja kokeilu
  - Solve-komennon käyttö, perusteltu arviointi (millä välillä  $x$  ja  $y$  voivat olla) ja kokeilu
  - Tuntemattoman  $x$  (tai  $y$ ) arvojen kokeilu suoraan alkuperäiseen yhtälöön (mahdollisten arvojen selvittäminen) ja tuntemattoman  $y$  (tai  $x$ ) arvon ratkaiseminen.
  - Eri  $x,y$ -yhdistelmien kokeilu alkuperäiseen yhtälöön.
- onko jostain ohjelmistosta hyötyä
  - Jos tehtävä B-osassa, niin Solve-komentoa mahdollista käyttää.
- tavallisimpia virheitä ja vaaranpaikkoja
  - Tehtävänannon alkuehdon unohtaminen ( $x > 0$  ja  $y > 0$ )
  - 4225 siirtäminen yhtälön vasemmalle puolelle
  - Vastauksen ilmoittaminen väärässä muodossa (esim.  $x = 1, x = 4, y = 4$  ja  $y = 1$ ; Oikea ratkaisu on muodossa  $x = 1$  ja  $y = 4$  sekä  $x = 4$  ja  $y = 1$  tai muodossa  $(x, y) = (1,4)$  tai  $(x, y) = (4,1)$ )
- miten tehtäviä voisi tunnilla neuvoa
  - Mitä tuttua yhtälössä on? Mitä muistikaavaa tässä voisi hyödyntää?
  - Mitä hyötyä tehtävänannon oletuksista on?

## Lisätehtävä 1B, S24/3 (joko tämä tai Lisätehtävä 1A):

### 3. Yhtälöt (12 p.)

Ratkaise muuttujien  $x$  ja  $y$  tarkat arvot seuraavista yhtälöistä.

1. Yhtälö  $4 \cdot 8^x = \sqrt{2}$ . (4 p.)

2. Yhtälö  $\sin(6y - \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$ , kun  $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . (8 p.)

- mitä pitää ottaa ratkaisemisessa huomioon
  - Kohta 2
    - Tiedosta, käytätkö asteita vai radiaaneja (ja kumpi yksikkö on laskimessa valittuna)!
    - Mitä eri vaiheita ratkaisussa on?
  - Muista sieventää vastauksen mahdollisimman pitkälle ja antaa tarkkana arvona!
- minkälaisia ja kuinka tarkkoja perusteluja vaaditaan (ks. HVP ja LHVP)

- Kohta 1
  - Myös pelkillä laskuilla voi saada täydet pisteet, jos laskut ovat oikein.
  - Laskuvirheet pudottavat merkittävästi pisteitä (tarkka pistemenetys riippuu virheen suuruudesta)
  - Jos haluaa ratkaista tehtävän löytämällä vastauksen ja tarkistamalla sen, niin voi saada täydet pisteet, jos perustelee, ettei ole muita ratkaisuja.
  - Pelkkä vastaus = 0 pistettä!
- Kohta 2
  - Ratkaisun eri vaiheet tärkeä esittää!
- onko erilaisia ratkaisutapoja?
  - Kohta 1
    - Esitetään yhtälöt molemmat puolet saman kantaluvun potensseina ja muodostetaan sekä ratkaistaan yhtälö eksponenteista.
    - Yhtälön sieventäminen (vain  $8^x$  yhtälön vasemmalla puolella) ja okäytetty logaritmia.
  - Kohta 2
    - Voi laskea radiaaneilla tai asteilla.
- onko jostain ohjelmistosta hyötyä
  - Kohdassa 1 voi käyttää SpeedCrunchia (muista antaa vastaus tarkkana arvona).
- tavallisimpia virheitä ja vaaranpaikkoja
  - Kohta 1
    - Laskuvirheet (esim. virheet potenssien laskusäännöissä)
  - Kohta 2
    - Tehtävänannon ehto koskee vain kulmaa  $y$  eli ei koko sulkeiden sisällä olevaan lauseketta!
    - jaksollisuuden ja/tai suplementtikulman unohtaminen (eli usean ratkaisun olemassaolon unohtaminen)
    - tehtävänannossa annetun määrittelyvälin unohtaminen
    - $2\pi$  unohtuu jakaa luvulla 6
    - Radiaanien ja asteiden sekoittaminen
    - Ei käytä lukuna  $\pi$  esim. lukua 3,14, vaan tarkkaa arvoa.
  - Ei anneta vastauksia tarkkoina arvoina.
- miten tehtäviä voisi tunnilla neuvoa
  - Kohta 1
    - Mitä yhteistä on tehtävänannon luvuilla? Voidaanko ne esittää saman kantaluvun avulla?
  - Kohta 2
    - Millä kulman arvoilla sini on  $\frac{1}{2}$ ?
    - Mitä tehtävänannon ehto tarjoaa?

**Ekstratehtävä (jos aikaa):** Keksittekö muita ratkaisutapoja tehtäviin (erityisesti tehtävä 2 eli K24/3)?