MAA11 TESTI 5.5.2022

1. Tee totuustaulut lauseille $\neg A \Rightarrow \neg B \vee C$ ja $B \wedge \neg C \Rightarrow A$. (6p.)

   a) Onko jompikumpilauseista tautologia? (Perustelu) (2p.)

   b) Mitä päättelet totuustaulujen pohjalta (4p.)

   RATKAISU:

A	B	C	$\neg A$	$\neg B$	$\neg B \vee C$	$\Rightarrow$
1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1

A	B	C	$\neg C$	$B \wedge \neg C$	$\Rightarrow$
1	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1
0	0	0	1	0	1

   a) Kumpikaan ei ole tautologia koska totuustaulussa on yksi 0 kummallakin

   b) Totuustaulut ovat samanlaiset, joten lauseet ovat loogisesti ekvivalentit.

2. Esitä seuraavat väitteet predikaattilogiikan avulla

   a) Mikään vompatti ei ole matelija.

   b) Jokainen kokonaisluku on parillinen tai pariton.

   c) Erästä kaikki rakastavat

   d) Jokaisella kokonaisluvulla on vastaluku.

   RATKAISU: a) $\forall x : V(x) \rightarrow \neg M(x)$, missä $v(x) =$"x on vompatti"ja $M(x) =$"x on matelija".

   b) $\forall x \in \mathbb{Z} : P(x) \vee Q(x)$, missä $P(x) =$"x on parillinen"ja $Q(x) =$"x on pariton".

   c) $\exists y \forall x : R(x, y)$, $R(x, y) =$"x rakastaa y:tä".

   d) $\forall x \in \mathbb{Z}\, \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0$.

3. Todista seuraavat väitteet oikeiksi tai vääriksi

   a) Kahden parillisen luvun tulo on jaollinen neljällä

   b) Jokaisella reaaliluvulla on käänteisluku.

   c) Jos a^2 on irrationaaliluku, niin a on irrationaaliluku.

   RATKAISU: a) OLETUS: Luvut n ja k ovat parillisia.

   VÄITE: nk on jaollinen neljällä.

   TODISTUS: Olkoon $n = 2m$ ja $k = 2l$. Tällöin

$$nk = 2m \cdot 2l = 4ml$$

   on jaollinen neljällä. M.O.T.

   b) OLETUS: a on reaaliluku.

   VÄITE: a:lla on käänteisluku.

   TODISTUS VÄÄRÄKSI. Vastaesimerkki: Reaaliluvulla $a = 0$ ei ole käänteislukua.

   c) OLETUS: a^2 on irrationaaliluku

   VÄITE: a on irrationaaliluku.

   TODISTUS: Kontrapositio: oletetaan vastoin väitettä, että a on rationaaliluku, ts. $a = \frac{n}{k}$, missä n ja k ovat kokonaislukuja ja $k \neq 0$. Tällöin

$$a^2 = \left(\frac{n}{k}\right)^2 = \frac{n^2}{k^2},$$

   mikä on rationaaliluku, koska n^2 ja k^2 ovat kokonaislukuja ja $k^2 \neq 0$. Tämä on vastoin oletusta. Väite seuraa kontrapositioperiaatteen nojalla. M.O.T.