229

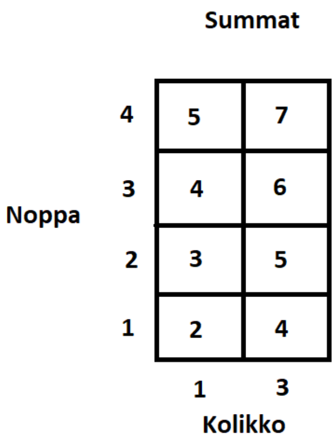
a) Heitetään kolikkoa ja nelisivuista noppaa. Kolikossa on silmäluvut 1 ja 3 sekä nopassa silmäluvut $1-4$.

Olkoon X:”kolikon ja nopan silmälukujen summa”.

Satunnaismuuttuja voi saada arvot 2, 3, 4, 5, 6 ja 7.

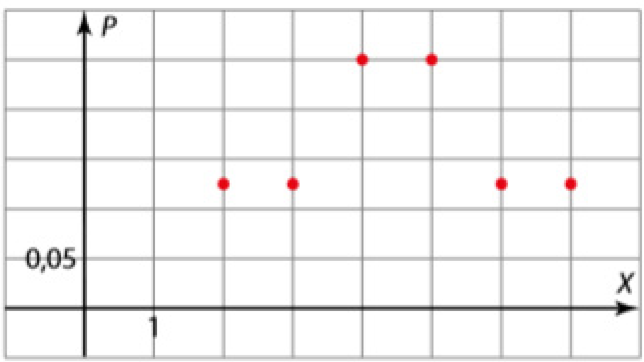
b) Kolikossa on kaksi tapaa saada silmäluku ja nopassa neljä. Yhteensä erilaisia vaihtoehtoja on $2\cdot 4=8$.

Muodostetaan satunnaismuuttujan X jakauma.



X	P
2	$\frac{1}{8}$
3	$\frac{1}{8}$
4	$\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$
5	$\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$
6	$\frac{1}{8}$
7	$\frac{1}{8}$

c) Muodostetaan jakaumasta pistekuvio.



Vastaus a) 2, 3, 4, 5, 6 ja 7

230

a) Pakasta vedetään 4 korttia. Olkoon X:”kädessä olevien kuninkaiden määrä”.

Muodostetaan satunnaismuuttujan X jakauma.

X	P
0	$\dfrac{\binom{4}{0}\cdot\binom{48}{4}}{\binom{52}{4}}=\dfrac{38916}{54145}=0,7187...\approx 0,719$
1	$\dfrac{\binom{4}{1}\cdot\binom{48}{3}}{\binom{52}{4}}=\dfrac{69184}{270725}=0,2555...\approx 0,256$
2	$\dfrac{\binom{4}{2}\cdot\binom{48}{2}}{\binom{52}{4}}=\dfrac{6768}{270725}=0,02499...\approx 0,0250$
3	$\dfrac{\binom{4}{3}\cdot\binom{48}{1}}{\binom{52}{4}}=\dfrac{192}{270725}=0,0007092...\approx 0,00071$
4	$\dfrac{\binom{4}{4}\cdot\binom{48}{0}}{\binom{52}{4}}=\dfrac{1}{270725}=0,00000369...\approx 0,0000037$

b) Määritetään satunnaismuuttujan X odotusarvo.

$$E(X) = 0 \cdot \frac{38916}{54145} + 1 \cdot \frac{69184}{270725} + 2 \cdot \frac{6768}{270725} + 3 \cdot \frac{192}{270725} + 4 \cdot \frac{1}{270725}$$
$$= 0,3076... \approx 0,31$$

Vastaus a)

X	P
0	0,719
1	0,256
2	0,025
3	0,00071
4	0,0000037

b) $E(X) = 0,31$

231

a) Saatuja rahasummia vastaavien kulmien suuruudet ovat:

$0:\ 90° + 60° = 150°$
$5:\ 60° + 45° = 105°$
$10:\ 60°$
$20:\ 45°$

Pyöräytys maksaa 5 euroa, joten mahdolliset voitot ovat -5, 0, 5 ja 15 euroa.

Määritetään pelaajan voiton odotusarvo yhdellä pyöräytyksellä.

$$E(X) = -5 \cdot \frac{150°}{360°} + 0 \cdot \frac{105°}{360°} + 5 \cdot \frac{60°}{360°} + 15 \cdot \frac{45°}{360°}$$
$$= \frac{5}{8} = 0{,}625 \approx 0{,}63$$

Yhden pyöräytyksen voiton odotusarvo on noin 0,63 €.

b) Arvioidaan kokonaisvoittoa 50 pyöräytyksen jälkeen.

$$\frac{5}{8} \cdot 50 = \frac{125}{4} = 31{,}25$$

Kokonaisvoitto on noin 30 €.

Vastaus a) noin 0,63 € b) voitto noin 30 €

232

a) Heitetään yhtä aikaa nelisivuista ja kuusisivuista noppaa. Olkoon satunnaismuuttuja X: ”silmälukujen summa”. Taulukoidaan kaikki summat.

kuusisivuinen noppa				
6	7	8	9	10
5	6	7	8	9
4	5	6	7	8
3	4	5	6	7
2	3	4	5	6
1	2	3	4	5
	1	2	3	4

nelisivuinen noppa

Määritetään kaikkien mahdollisten silmälukujen summien todennäköisyydet.

$$P(X=2)=\frac{1}{24}$$

$$P(X=3)=\frac{2}{24}$$

$$P(X=4)=\frac{3}{24}$$

$$P(X=5)=\frac{4}{24}$$

$$P(X=6)=\frac{4}{24}$$

$$P(X=7)=\frac{4}{24}$$

$$P(X=8)=\frac{3}{24}$$
$$P(X=9)=\frac{2}{24}$$
$$P(X=10)=\frac{1}{24}$$

b) Määritetään silmälukujen summan odotusarvo.

$$\begin{aligned}E(X)&=2\cdot\frac{1}{24}+3\cdot\frac{2}{24}+4\cdot\frac{3}{24}+5\cdot\frac{4}{24}+6\cdot\frac{4}{24}+7\cdot\frac{4}{24}+8\cdot\frac{3}{24}+9\cdot\frac{2}{24}+10\cdot\frac{1}{24}\\&=6\end{aligned}$$

Vastaus a) $P(X=2)=\frac{1}{24}$, $P(X=3)=\frac{2}{24}$, $P(X=4)=\frac{3}{24}$,
$P(X=5)=\frac{4}{24}$, $P(X=6)=\frac{4}{24}$, $P(X=7)=\frac{4}{24}$,
$P(X=8)=\frac{3}{24}$, $P(X=9)=\frac{2}{24}$, $P(X=10)=\frac{1}{24}$

b) 6

233

Heitetään kahta tavallista noppaa ja lasketaan silmälukujen summa.

Taulukoidaan mahdolliset summat.

1. noppa \ 2. noppa	1	2	3	4	5	6
6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7

Jos silmälukujen summa on vähintään 8, Maisa maksaa Lasselle kolme euroa. Muissa tapauksissa Lasse maksaa Maisalle kaksi euroa.

Tapauksia on yhteensä 36, joissa 15:ssä summa on vähintään 8.

Olkoon satunnaismuuttuja X_1 :”yhdellä kierroksella Maisan saama voitto”.

$$E(X_1) = -3 \cdot \frac{15}{36} + 2 \cdot \frac{21}{36} = -\frac{1}{12}$$

Maisan voiton odotusarvo on $-\frac{1}{12}$ €.

Olkoon satunnaismuuttuja X_2 :”yhdellä kierroksella Lassen saama voitto”.

$$E(X_2) = 3 \cdot \frac{15}{36} - 2 \cdot \frac{21}{36} = \frac{1}{12}$$

Lassen voiton odotusarvo on $\frac{1}{12}$ €.

Peli ei ole reilu, koska molempien pelaajien voiton odotusarvo ei ole nolla.

Vastaus peli ei ole reilu

234

Olkoon satunnaismuuttuja X:”pelaajan yhdellä kierroksella saama voitto”.

Muodostetaan jakauma.

X	P
$-3-2=-5$	$\frac{1}{6}$
$-3-1=-4$	$\frac{1}{6}$
$-3+3=0$	$\frac{1}{6}$
$-3+4=1$	$\frac{1}{6}$
$-3+5=2$	$\frac{1}{6}$
$-3+6=3$	$\frac{1}{6}$

Lasketaan yhden kierroksen voiton odotusarvo.

$$\begin{aligned} E(X) &= -5\cdot\frac{1}{6}+(-4)\cdot\frac{1}{6}+0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Arvioidaan kokonaisvoiton suuruutta 20 pelikerran jälkeen.

$$-\frac{1}{2}\cdot 20=-10$$

Kokonaisvoiton suuruus 20 pelikerran jälkeen on noin -10 € eli pelaaja on 10 euroa tappiolla.

Vastaus -10 €

235

Pelaaja voi menettää kaikki panoksensa, jos tulos on luku, joka ei ole punainen eikä väliltä 1 – 12. Tällöin voitto on -7 pelimerkkiä.

Pelaaja voi menettää toisen panoksensa ja voittaa toisella. Tapaukset ovat punainen luku, joka ei ole väliltä 1 – 12, jolloin pelaajan voitto on $-7+2\cdot 5=3$. Tai luku on väliltä 1 – 12, joka ei ole punainen, jolloin pelaajan voitto on $-7+3\cdot 2=-1$.

Pelaaja voi voittaa molemmilla panoksilla, jolloin tulos on punainen luku väliltä 1 – 12, jolloin pelaajan voitto on $-7+2\cdot 3+5\cdot 2=9$.

Olkoon satunnaismuuttuja X:”pelaajan voitto yksittäisellä kierroksella”.

Muodostetaan jakauma.

X	P
-7	$\frac{13}{37}$
-1	$\frac{6}{37}$
3	$\frac{12}{37}$
9	$\frac{6}{37}$

Lasketaan pelaajan voiton odotusarvo yhdellä kierroksella.

$$
\begin{aligned}
E(X) &= -7 \cdot \frac{13}{37} - 1 \cdot \frac{6}{37} + 3 \cdot \frac{12}{37} + 9 \cdot \frac{6}{37} \\
&= -\frac{7}{37}
\end{aligned}
$$

Arvioidaan pelaajan kokonaisvoittoa, kun samoilla panoksilla pelataan 60 kierrosta.

$$60 \cdot (-\frac{7}{37}) = -11,35... \approx -11$$

Pelaaja on tappiolla noin 11 pelimerkkiä.

Vastaus tappio noin 11 pelimerkkiä

236

a) Tapahtuman ”ainakin yksi hyökkääjä tekee maalin” vastatapahtuma on ”kukaan hyökkääjistä ei tee maalia”.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{ainakin yksi tekee maalin}) \\
&= 1 - P(\text{kukaan ei tee maalia}) \\
&= 1 - (1-0,65)\cdot(1-0,75)\cdot(1-0,54) \\
&= 0,959\ldots \approx 0,96
\end{aligned}
$$

b) Maaleja voi tulla 0, 1, 2 tai 3. Olkoon satunnaismuuttuja X:”maalien määrä yhdellä yrityksellä”.

Muodostetaan jakauma.

X	P
0	$0,35\cdot 0,25\cdot 0,46 = 0,04025$
1	$0,35\cdot 0,25\cdot 0,54 + 0,35\cdot 0,75\cdot 0,46 + 0,65\cdot 0,25\cdot 0,46 = 0,24275$
2	$0,35\cdot 0,75\cdot 0,54 + 0,65\cdot 0,25\cdot 0,54 + 0,65\cdot 0,75\cdot 0,46 = 0,45375$
3	$0,65\cdot 0,75\cdot 0,54 = 0,26325$

$$
\begin{aligned}
E(X) &= 0 + 1\cdot 0,24275 + 2\cdot 0,45375 + 3\cdot 026325 \\
&= 1,94
\end{aligned}
$$

Vastaus a) 0,96 b) 1,94

237

Laatikossa on neljä palloa, jotka on numeroitu numeroilla $1, 2, 3$ ja 4. Laatikosta nostetaan kaksi palloa. Olkoon satunnaismuuttuja *X*:”suurempi nostettuihin palloihin merkityistä luvuista”.

Taulukoidaan mahdolliset tapaukset.

1. pallo				
4	4	4	4	**x**
3	3	3	**x**	4
2	2	**x**	3	4
1	**x**	2	3	4
	1	2	3	4

2.pallo

Muodostetaan jakauma.

X	P
2	$\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$
3	$\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$
4	$\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$

Lasketaan odotusarvo.

$$E(X)=2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{3}+4\cdot\frac{1}{2}=\frac{10}{3}$$

Vastaus

X	P
2	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{2}$

$$E(X) = \frac{10}{3}$$

238

Arvan hinta on 2 euroa. Arpajaisissa voi joko menettää arvan hinnan tai voittaa jonkin kolmesta rahasummasta. Olkoon satunnaismuuttuja X:”henkilön voitto ostettaessa yksi arpa”.

Muodostetaan jakauma.

X	***P***
998	0,00025
498	$0,00025\cdot 4=0,001$
98	$0,001\cdot 5=0,005$
-2	$1-(0,00025+0,001+0,005)=0,99375$

Lasketaan odotusarvo.

$$\begin{aligned}E(X)&=998\cdot 0,00025+498\cdot 0,001+98\cdot 0,005+(-2)\cdot 0,99375\\&=-0,75\end{aligned}$$

Voiton odotusarvo on $-0,75$ €.

Lasketaan keskihajonta.

$$\begin{aligned}D(X)&=\sqrt{0,00025(998-(-0,75))^2+0,001(498-(-0,75))^2+0,005(98-(-0,75))^2+0.99375(-2(-0,75))^2}\\&=23,41\ldots\approx 23\end{aligned}$$

Keskihajonta on noin 23 €.

Vastaus odotusarvo $-0,75$ € ja keskihajonta n. 23 €

239

Rasiassa on kuusi palloa, joista kolmessa on numero 1 ja kolmessa numero 2. Rasiasta nostetaan kolme palloa.

Olkoon satunnaismuuttuja X:”nostettujen pallojen lukujen summa”.

Summa voi olla 3, 4, 5 tai 6.

Muodostetaan jakauma.

X	***P***	
3	$\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$	1, 1 ja 1
4	$3\cdot\frac{3\cdot2\cdot3}{6\cdot5\cdot4}=\frac{9}{20}$	1, 1, 2 tai 1, 2, 1 tai 2, 1, 1
5	$3\cdot\frac{3\cdot2\cdot3}{6\cdot5\cdot4}=\frac{9}{20}$	2, 2, 1 tai 2, 1, 2 tai 1, 2, 2
6	$\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$	2, 2, ja 2

240

Heitetään kahta tavallista noppaa. Olkoon satunnaismuuttuja X:”silmälukujen summan neliö”.

Taulukoidaan arvot.

1. noppa \ 2. noppa	1	2	3	4	5	6
6	49	64	81	100	121	144
5	36	49	64	81	100	121
4	25	36	49	64	81	100
3	16	25	36	49	64	81
2	9	16	25	36	49	64
1	4	9	16	25	36	49

Muodostetaan jakauma.

X	P
4	$\frac{1}{36}$
9	$\frac{2}{36}$
16	$\frac{3}{36}$
25	$\frac{4}{36}$
36	$\frac{5}{36}$
49	$\frac{6}{36}$
64	$\frac{5}{36}$
81	$\frac{4}{36}$
100	$\frac{3}{36}$
121	$\frac{2}{36}$
144	$\frac{1}{36}$

Lasketaan odotusarvo.

$$
\begin{aligned}
E(X) &= 4 \cdot \frac{1}{36} + 9 \cdot \frac{2}{36} + \ldots + 121 \cdot \frac{2}{36} + 144 \cdot \frac{1}{36} \\
&= \frac{329}{6} = 54{,}833\ldots \approx 54{,}8
\end{aligned}
$$

Vastaus $\frac{329}{6} \approx 54,8$

241

Henkilö A kuolee seuraavan vuoden aikana todennäköisyydellä 0,0015.

a) Olkoon satunnaismuuttuja X:”edunsaajan voitto”.

Muodostetaan jakauma.

X	***P***
–200	0,9985
99 800	0,0015

Lasketaan odotusarvo.

$$E(X) = -200 \cdot 0,9985 + 99800 \cdot 0,0015 = -49,46 \approx -50$$

Edunsaajalle henkivakuutuksen odotusarvo on noin -50 €.

b) Olkoon satunnaismuuttuja X:”vakuutusyhtiön voitto”

Muodostetaan jakauma.

X	***P***
200	0,9985
−99 800	0,0015

Lasketaan odotusarvo.

$$E(X) = 200 \cdot 0,9985 - 99800 \cdot 0,0015 = 49,46 \approx 50$$

Vakuutusyhtiölle henkivakuutuksen odotusarvo on noin 50 €.

Vastaus a) -50 € b) 50 €

242

Noppaa heitetään, kunnes saadaan parillinen luku tai kolme paritonta lukua. Heittoja pitää tehdä korkeintaan kolme. Kolmannessa heitossa on kaksi tapausta: pariton-pariton-pariton tai pariton-pariton-parillinen.

Olkoon satunnaismuuttuja X:"heittojen lukumäärä".

Muodostetaan jakauma.

X	***P***	
1	$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$	parillinen
2	$\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{4}$	parillinen, pariton
3	$\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}+\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{4}$	parillinen, parillinen, parillinen tai parillinen, parillinen, pariton

Lasketaan heittojen lukumäärän odotusarvo.

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{4}=\frac{7}{4}=1,75$$

Vastaus 1,75

243

a) Heitetään umpimähkäisesti kaksi tikkaa tauluun. Tulon mahdolliset arvot ovat 1, 5, 10, 25, 50 tai 100.

Keskimmäisen ympyrän säde on 5,0 cm ja muiden renkaiden paksuus on 10,0 cm.

Koko ympyrän pinta-ala on $\pi \cdot 25^2 = 625\pi$.

10 pisteen ympyrän pinta-ala on $\pi \cdot 5^2 = 25\pi$.
5 pisteen renkaan pinta-ala on $\pi \cdot 15^2 - 25\pi = 200\pi$
1 pisteen renkaan pinta-ala on $625\pi - \pi \cdot 15^2 = 400\pi$

Olkoon satunnaismuuttuja *X*:”tikkojen pistemäärien tulo”. Muodostetaan jakauma.

X	***P***
1	$\frac{400\pi \cdot 400\pi}{625\pi \cdot 625\pi} = \frac{256}{625}$
5	$2 \cdot \frac{400\pi \cdot 200\pi}{625\pi \cdot 625\pi} = \frac{256}{625}$
10	$2 \cdot \frac{400\pi \cdot 25\pi}{625\pi \cdot 625\pi} = \frac{32}{625}$
25	$\frac{200\pi \cdot 200\pi}{625\pi \cdot 625\pi} = \frac{64}{625}$
50	$2 \cdot \frac{200\pi \cdot 25\pi}{625\pi \cdot 625\pi} = \frac{16}{625}$
100	$\frac{25\pi \cdot 25\pi}{625\pi \cdot 625\pi} = \frac{1}{625}$

b) Lasketaan tulon odotusarvo.

$$E(X)=\frac{256}{625}+5\cdot\frac{256}{625}+10\cdot\frac{32}{625}+25\cdot\frac{64}{625}+50\cdot\frac{16}{625}+100\cdot\frac{1}{625}$$
$$=6,969...\approx 7,0$$

Vastaus b) 7,0

244

Asiakkaalla on yhteensä 10 kolikkoa: 3 kappaletta 0,50 €, 5 kappaletta 1 € ja 2 kappaletta 2 € kolikoita. Maksun hetkellä asiakas kauhaisee taskusta kolme kolikkoa.

a) Olkoon *X*:”kauhaistujen kolikoiden yhteisarvo”. Muodostetaan jakauma.

X	**P**
1,50	$\dfrac{\binom{3}{3}\cdot\binom{5}{0}\cdot\binom{2}{0}}{\binom{10}{3}}=\dfrac{1}{120}$
2	$\dfrac{\binom{3}{2}\cdot\binom{5}{1}\cdot\binom{2}{0}}{\binom{10}{3}}=\dfrac{1}{8}$
2,50	$\dfrac{\binom{3}{1}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{2}{0}}{\binom{10}{3}}=\dfrac{1}{4}$
3	$\dfrac{\binom{3}{2}\cdot\binom{5}{0}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{10}{3}}+\dfrac{\binom{3}{0}\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{2}{0}}{\binom{10}{3}}=\dfrac{2}{15}$

3,50	$\dfrac{\binom{3}{1}\cdot\binom{5}{1}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{10}{3}}=\dfrac{1}{4}$
4	$\dfrac{\binom{3}{0}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{10}{3}}=\dfrac{1}{6}$
4,50	$\dfrac{\binom{3}{1}\cdot\binom{5}{0}\cdot\binom{2}{2}}{\binom{10}{3}}=\dfrac{1}{40}$
5	$\dfrac{\binom{3}{0}\cdot\binom{5}{1}\cdot\binom{2}{2}}{\binom{10}{3}}=\dfrac{1}{24}$

b) Lasketaan, millä todennäköisyydellä kolikot riittävät maksamaan 3,50 euron ostoksen. Näin käy summilla 3,50, 4, 4,50 ja 5 euroa.

P(kolikot riittävät maksamaan 3,50 € ostoksen)

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{40}+\frac{1}{24}=\frac{29}{60}=0,4833...\approx 0,48$$

c) Määritetään odotusarvo.

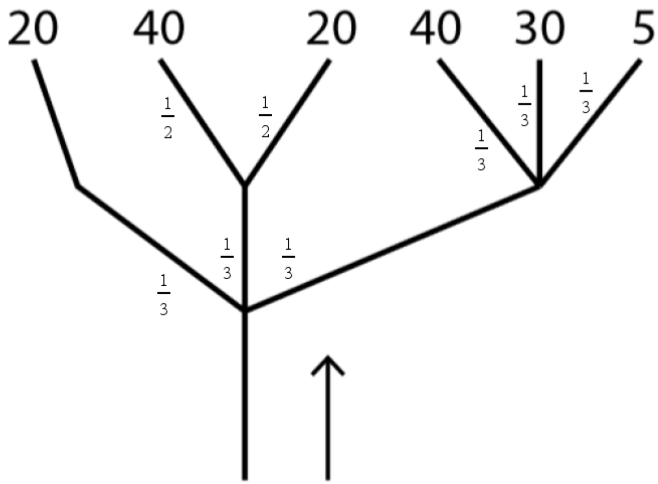
$$E(X) = 1,5 \cdot \frac{1}{120} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 2,5 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{2}{15} + 3,5 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 4,5 \cdot \frac{1}{40} + 5 \cdot \frac{1}{24}$$
$$= 3,15$$

Odotusarvo on $3,15$ €.

Vastaus b) 0,48 c) 3,15 €

245

Merkitään kuvion haaroihin valinnan todennäköisyydet.



a) Pistemäärän 40 voi saavuttaa kahta reittiä.

$$P(40 \text{ pistettä}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{18}$$

b) Olkoon satunnaismuuttuja X:”pelaajan saavuttama pistemäärä”. Muodostetaan jakauma.

X	P
5	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$
20	$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$
30	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$
40	$\frac{5}{18}$

Määritetään odotusarvo.

$$E(X)=5\cdot\frac{1}{9}+20\cdot\frac{1}{2}+30\cdot\frac{1}{9}+40\cdot\frac{5}{18}=25$$

Vastaus a) $\frac{5}{18}$ b) 25

246

Heitetään kahta noppaa. Merkitään taulukkoon noppien silmälukujen erotuksen itseisarvot.

1. noppa						
6	5	4	3	2	1	0
5	4	3	2	1	0	1
4	3	2	1	0	1	2
3	2	1	0	1	2	3
2	1	0	1	2	3	4
1	0	1	2	3	4	5
	1	2	3	4	5	6

2. noppa

Olkoon satunnaismuuttuja X:"silmälukujen erotuksen itseisarvo"

a) Muodostetaan jakauma.

X	P
0	$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$
1	$\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$
2	$\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$
3	$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$
4	$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$
5	$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

b) Määritetään odotusarvo.

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{5}{18}+2\cdot\frac{2}{9}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{9}+5\cdot\frac{1}{18}$$
$$=\frac{35}{18}=1,944...\approx 1,9$$

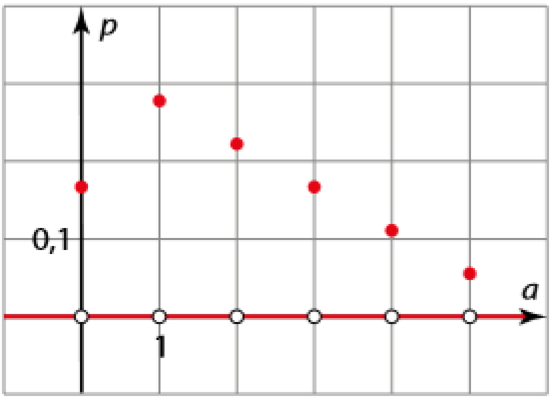
Vastaus b) 1,9

247

Muodostetaan edellisen tehtävän satunnaismuuttujan
X:”silmälukujen erotuksen itseisarvo” pistetodennäköisyysfunktio.

$$p(a) = P(X = a) = \begin{cases} \frac{1}{6}, \text{ kun } a = 0 \\ \frac{5}{18}, \text{ kun } a = 1 \\ \frac{2}{9}, \text{ kun } a = 2 \\ \frac{1}{6}, \text{ kun } a = 3 \\ \frac{1}{9}, \text{ kun } a = 4 \\ \frac{1}{18}, \text{ kun } a = 5 \\ 0 \quad \text{muulloin} \end{cases}$$

Piirretään pistetodennäköisyysfunktion kuvaaja.



248

Arvotaan satunnainen reaaliluku x väliltä $[0, 9[$ ja lasketaan $\sqrt{x}$.

Olkoon satunnaismuuttuja X:”luvun $\sqrt{x}$ desimaaliesityksessä pilkkua edeltävä kokonaisosa”.

Jos luku on väliltä $[0, 1[$, on X:n arvo 0.
Jos luku on väliltä $[1, 4[$, on X:n arvo 1.
Jos luku on väliltä $[4, 9[$, on X:n arvo 2.

Muodostetaan jakauma.

X	**P**
0	$\frac{1-0}{9}=\frac{1}{9}$
1	$\frac{4-1}{9}=\frac{1}{3}$
2	$\frac{9-4}{9}=\frac{5}{9}$

Määritetään odotusarvo.

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{9}+1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{5}{9}=\frac{13}{9}=1,444...\approx 1,4$$

Määritetään keskihajonta.

$$D(X)=\sqrt{\frac{1}{9}\left(0-\frac{13}{9}\right)^2+\frac{1}{3}\left(1-\frac{13}{9}\right)^2+\frac{5}{9}\left(2-\frac{13}{9}\right)^2}$$
$$\approx 0,68$$

Vastaus $E(X)=\frac{13}{9}\approx 1,4$ ja $D(X)\approx 1,68$

249

Asiakas valitsee 50 narusta. Yhden päässä on 20 € arvoinen palkinto, viiden päässä 5 € arvoinen palkinto ja 44 päässä 1 € arvoinen palkinto.

Olkoon x narunvedon hinta ja satunnaismuuttuja X:”asiakkaan saama voitto”.

Muodostetaan jakauma.

X	**P**
$1-x$	$\frac{44}{50}$
$5-x$	$\frac{5}{50}$
$20-x$	$\frac{1}{50}$

Tivoli haluaa narunvedosta voittoa 3 €, joten yksittäisen vedon odotusarvon asiakkaalle on oltava $E(X)=-3$.

$$-3=(1-x)\cdot\frac{44}{50}+(5-x)\cdot\frac{5}{50}+(20-x)\cdot\frac{1}{50}$$
$$x=4,78$$

Yksittäisen vedon hinta pitää olla 5 €.

Vastaus 5 €

250

Olkoon x pelaajan tämän hetkinen pistemäärä ja satunnaismuuttuja X: ”pelaajan pistemäärä seuraavan noston jälkeen”.

Muodostetaan jakauma.

X	**P**
x	$\frac{32}{52}=\frac{8}{13}$
$x+5$	$\frac{12}{52}=\frac{3}{13}$
$x+10$	$\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$
0	$\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$

Pelaajan kannattaa nostaa vielä kortti, kun seuraavan noston odotusarvo on suurempi kuin pelaajan nykyinen pistemäärä eli $E(X)>x$.

$$x\cdot\frac{8}{13}+(x+5)\cdot\frac{3}{13}+(x+10)\cdot\frac{1}{12}+0\cdot\frac{1}{13}>x$$

$$x<25$$

Pelaajan kannattaa nostaa uusi kortti, kun hänen pistemääränsä on alle 25.

Vastaus alle 25

251

a) Olkoon satunnaismuuttuja X:”Annin saama voitto yhdellä heitolla”. Muodostetaan jakauma.

X	P
$-x$	$\frac{1}{6}$
x^2	$\frac{5}{6}$

Jotta peli olisi Annille suotuisa, on odotusarvon oltava positiivinen eli $E(X) > 0$.

$$-x \cdot \frac{1}{6} + x^2 \cdot \frac{5}{6} > 0$$

$x < 0$ tai $x > 0,20$

Maksettava summa ei voi olla alle nollan, joten peli on suotuisa Annille, kun panos on suurempi kuin 0,20 €.

b) Peli on suotuisa Helenalle silloin, kun Annin voiton odotusarvo on negatiivinen eli $E(X) < 0$.

$$-x \cdot \frac{1}{6} + x^2 \cdot \frac{5}{6} < 0$$

$0 < x < 0,20$

Peli on suotuisa Helenalle, kun panos on välillä
$0 \text{ €} < x < 0,20 \text{ €}$

Vastaus a) $x > 0,20$ euroa b) $0 < x < 0,20$ euroa

252

Arvotaan kokonaisluku n väliltä $[1, 500]$. Olkoon satunnaismuuttuja X:”luvun lg n desimaaliesityksen kokonaisosa”.

Jos luku on joukosta $\{1, \ldots, 9\}$, kokonaisosa on 0.
Jos luku on joukosta $\{10, \ldots, 99\}$, kokonaisosa on 1.
Jos luku on joukosta $\{99, \ldots, 500\}$, kokonaisosa on 2.

Muodostetaan jakauma.

X	***P***
0	$\frac{9}{500}$
1	$\frac{90}{500}$
2	$\frac{401}{500}$

Määritetään odotusarvo.

$$E(X) = 0\cdot\frac{9}{500} + 1\cdot\frac{90}{500} + 2\cdot\frac{401}{500} = \frac{223}{125} = 1{,}784 \approx 1{,}8$$

Määritetään keskihajonta.

$$D(X) = \sqrt{\frac{9}{500}\left(0-\frac{223}{125}\right)^2 + \frac{90}{500}\left(1-\frac{223}{125}\right)^2 + \frac{401}{500}\left(2-\frac{223}{125}\right)^2}$$
$$= 0{,}4531\ldots \approx 0{,}45$$

Vastaus $\quad E(X) = \frac{223}{125} \approx 1{,}8$ ja $D(X) \approx 0{,}45$

253

Heitetään nelisivuista noppaa ja kahta kolikkoa. Olkoon satunnaismuuttujat X:”nopan silmäluku” ja Y:”saatujen klaavojen lukumäärä ja $Z = X + Y$.

a) Muodostetaan jakaumat.

X	**P**
1	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{4}$

Y	**P**
0	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

Z	**P**	
1	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$	1+0
2	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$	1+1 tai 2+0

3	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$	1+2 tai 2+1 tai 3+0
4	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$	2+2 tai 3+1 tai 4+0
5	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$	3+2 tai 4+1
6	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$	4+2

b) Määritetään odotusarvot.

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{4}=2,5$$

$$E(Y)=0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}=1$$

$$E(Z)=1\cdot\frac{1}{16}+2\cdot\frac{3}{16}+3\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{4}+5\cdot\frac{3}{16}+6\cdot\frac{1}{16}=3,5$$

c) $E(Z)=E(X)+E(Y)$

Vastaus b) $E(X)=2,5 \quad E(Y)=1 \quad E(Z)=3,5$
c) $E(Z)=E(X)+E(Y)$

254

Muodostetaan jakaumat.

X	***P***
x_1	p_1
x_2	p_2

Y	***P***
y_1	q_1
y_2	q_2
y_3	q_3

Z	***P***
x_1+y_1	p_1q_1
x_1+y_2	p_1q_2
x_1+y_3	p_1q_3
x_2+y_1	p_2q_1
x_2+y_2	p_2q_2
x_2+y_3	p_2q_3

Määritetään odotusarvot.

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3$$
$$E(Y) = y_1q_1 + y_2q_2 + y_3q_3$$
$$E(X) + E(Y) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + y_1q_1 + y_2q_2 + y_3q_3$$

$$
\begin{aligned}
E(Z) &= (x_1 + y_1)p_1q_1 + (x_1 + y_2)p_1q_2 + (x_1 + y_3)p_1q_3 + (x_2 + y_1)p_2q_1 \\
&\quad + (x_2 + y_2)p_2q_2 + (x_2 + y_3)p_2q_3 \\
&= x_1p_1q_1 + y_1p_1q_1 + x_1p_1q_2 + y_2p_1q_2 + x_1p_1q_3 + y_3p_1q_3 + x_2p_2q_1 \\
&\quad + y_1p_2q_1 + x_2p_2q_2 + y_2p_2q_2 + x_2p_2q_3 + y_3p_2q_3 \\
&= x_1p_1\underbrace{(q_1 + q_2 + q_3)}_{=1} + x_2p_2\underbrace{(q_1 + q_2 + q_3)}_{=1} + y_1q_1\underbrace{(p_1 + p_2)}_{=1} \\
&\quad + y_2q_2\underbrace{(p_1 + p_2)}_{=1} + y_3q_3\underbrace{(p_1 + p_2)}_{=1} \\
&= \underbrace{x_1p_1 + x_2p_2}_{=E(X)} + \underbrace{y_1q_1 + y_2q_2 + y_3q_3}_{=E(Y)} \\
&= E(X) + E(Y)
\end{aligned}
$$

Saatiin, että $E(Z) = E(X) + E(Y)$

255

Toistojen lukumäärä $n = 4$. Todennäköisyys saada silmäluku 5 tai 6 yksittäisessä toistossa on $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Satunnaismuuttuja $X \sim \text{Bin}(4, \frac{1}{3})$.

Määritetään satunnaismuuttujan jakauma.

X	**todennäköisyyden laskeminen**	***P***
0	$P(X=0) = \binom{4}{0} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 0{,}1975...$	0,198
1	$P(X=1) = \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 0{,}3950...$	0,395
2	$P(X=2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 0{,}2962...$	0,296
3	$P(X=3) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 = 0{,}09876...$	0,0988
4	$P(X=4) = \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 0{,}01234...$	0,0123

256

Poikien lukumäärä X noudattaa jakaumaa Bin(60; 0,513) ja tyttöjen lukumärä Y jakaumaa Bin(60; 0,487).

Määritetään odotusarvot.

$$E(X) = n \cdot p = 60 \cdot 0,513 = 30,78 \approx 31$$

$$E(Y) = 60 \cdot 0,487 = 29,22 \approx 22$$

Jotta kunnassa syntyisi yhtä monta poikaa ja tyttöä, molempia on synnyttävä täsmälleen 30. Jos poikia syntyy 30, niin tyttöjäkin syntyy 30.

Lasketaan todennäköisyys, että poikia syntyy täsmälleen 30.

$$P(X = 30) = \binom{60}{30} \cdot 0,513^{30} \cdot 0,487^{30} = 0,1005.... \approx 0,10$$

(Huomaa, että voit laskea yhtä hyvin todennäköisyyden, että tyttöjä syntyy täsmälleen 30.=

Vastaus Poikien lukumäärä noudattaa jakaumaa Bin(60; 0,513) ja tyttöjen jakaumaa $Y \sim$ Bin(60; 0,487).
Poikien odotusarvo on noin 31 ja tyttöjen 29.
Todennäköisyys on 0,10.

257

Kyseessä on toistokoe, jossa on 10 toistoa. Oikean vastauksen todennäköisyys yksittäisessä toistossa on $\frac{1}{2}=0,5$.
Satunnaismuuttuja $X \sim \text{Bin}(10;\ 0,5)$.

a) Lasketaan todennäköisyys $X = 5$.

$P(X=5)=0,246...\approx 0,25$ Lasketaan laskimella.

b) Koe hyväksytään, kun oikeita vastauksia on vähintään 7.

Lasketaan todennäköisyys, että kokeessa saa vähintään 7 oikein.

$P(X\geq 7)=P(7\leq X\leq 10)=0,1718...\approx 0,17$

c) Lasketaan odotusarvo.

$E(X)=10\cdot 0,5=5$

Vastaus a) 0,25 b) 0,17 c) 5

258

Tilanne voidaan ajatella toistokokeeksi, jossa on 572 toistoa. Punavihersokeuden todennäköisyys yksittäisessä toistossa on $0,08$. Satunnaismuuttuja $X \sim \text{Bin}(572;\ 0{,}08)$.

a) Lasketaan todennäköisyys, että korkeintaan 50 miesopiskelijaa on punavihersokeita.

$$P(X \leq 50) = P(0 \leq X \leq 50) = 0{,}7705... \approx 0{,}77$$

b) Lasketaan todennäköisyys, että ainakin 50 miesopiskelijaa on punavihersokeita.

$$P(X \geq 50) = P(50 \leq X \leq 572) = 0{,}2773... \approx 0{,}28$$

Vastaus a) 0,77 b) 0,28

259

Tilanne voidaan ajatella toistokokeeksi, jossa on 34 toistoa.
Valkoruskean koiran todennäköisyys yksittäisessä toistossa on $0,65$.
Satunnaismuuttuja $X \sim$ Bin(34; 0,65).

a) Lasketaan todennäköisyys, että ainakin puolet koirista on valkoruskeita.

$$P(X \geq 17) = P(17 \leq X \leq 34) = 0,9759... \approx 0,98$$

b) Lasketaan odotusarvo.

$$E(X) = 34 \cdot 0,65 = 22,1 \approx 22$$

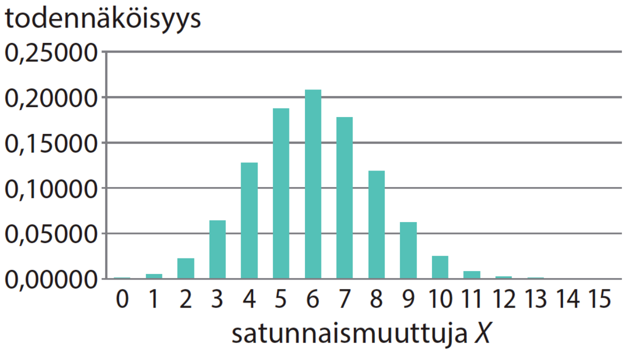
Vastaus a) 0,98 b) 22

260

a) Määritetään jakauma $X \sim \text{Bin}(15; 0,4)$
taulukkolaskentaohjelmalla ja piirretään jakaumasta pylväskaavio.

X	***P***
0	0,00047
1	0,0047
2	0,0219
3	0,0633
4	0,1268
5	0,1859
6	0,2066
7	0,1771
8	0,1180
9	0,0612
10	0,0245
11	0,0074
12	0,0016
13	0,0003
14	0,00002
15	0,000001

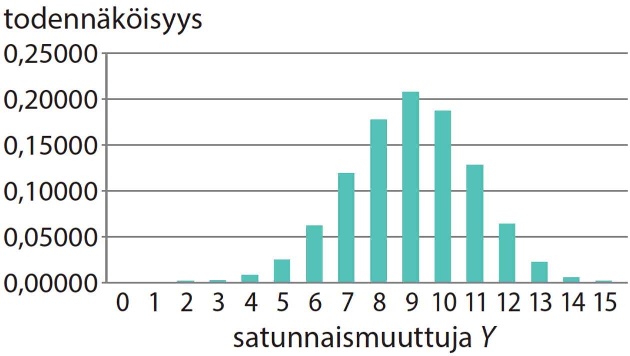
= binomijakauma(A1; 15; 0,4; 0)



b) Määritetään jakauma $Y \sim \mathrm{Bin}(15; 0,6)$ taulukkolaskentaohjelmalla ja piirretään jakaumasta pylväskaavio.

Y	P
0	0,000001
1	0,00002
2	0,0003
3	0,0016
4	0,0074
5	0,0245
6	0,0612
7	0,1181
8	0,1771
9	0,2066
10	0,1860
11	0,1267
12	0,063
13	0,0219
14	0,0047
15	0,0005

= binomijakauma(A1; 15; 0,6; 0)



261

Kyseessä on toistokoe, jossa on 13 toistoa. Oikean vastauksen todennäköisyys yksittäisessä toistossa on $\frac{1}{3}$.

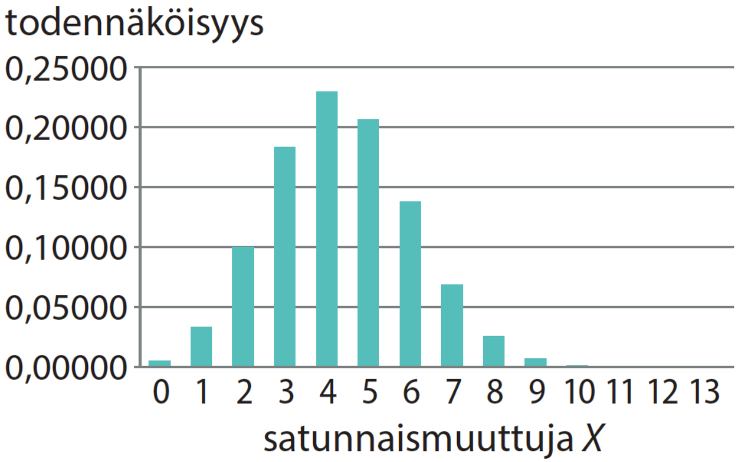
Satunnaismuuttuja $X \sim \text{Bin}(13, \frac{1}{3})$.

a) Määritetään jakauma taulukkolaskentaohjelmalla.

X	P
0	0,00514
1	0,03340
2	0,10020
3	0,18369
4	0,22961
5	0,20665
6	0,13777
7	0,06888
8	0,02583
9	0,00718
10	0,00144
11	0,00020
12	0,00002
13	$6{,}3 \cdot 10^{-7} \approx 0{,}00000$

=binomijakauma(A1; 13; 1/3; 0)

b) Havainnollistetaan jakaumaa pylväskuviolla.



c) Lasketaan odotusarvo.

$$
\begin{aligned}
E(X) &= n \cdot p \\
&= 13 \cdot \frac{1}{3} \\
&= \frac{13}{3} \\
&= 4,333... \approx 4,3
\end{aligned}
$$

Vastaus c) 4,3

262

Tilanne voidaan ajatella toistokokeeksi, jossa on 4 toistoa.

Olkoon onnistumistodennäköisyys yksittäisessä toistossa p. Olkoon X: ”koriin saatujen heittojen lukumäärä 4 heitolla”.

Tällöin $X \sim \text{Bin}(4, p)$.

Todennäköisyys, että 4 toistosta 2 onnistuu on

$$P(X=2) = \binom{4}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^2 = 6p^2 \cdot (1-p)^2$$

Tiedetään, että todennäköisyys on 0,25. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan p.

$6p^2 \cdot (1-p)^2 = 0{,}25$ Ratkaistaan laskimella.

$p = -0{,}173... \approx -0{,}17$ tai $p = 0{,}285... \approx 0{,}29$

tai $p = 0{,}714 \approx 0{,}71$ tai $p = 1{,}173... \approx 1{,}17$

Koska todennäköisyys p toteuttaa ehdon $0 \le p \le 1$,
niin $p = 0{,}29$ tai $p = 0{,}71$.

Ari saa yksittäisellä heitolla korin todennäköisyydellä 0,29 tai 0,71.

Vastaus 0,29 tai 0,71

263

Tapahtuman voidaan ajatella olevan toistokoe, jossa on 12 toistoa.

Olkoon onnistumistodennäköisyys yksittäisessä toistossa p ja
X: ”Petran voittojen lukumäärä 12 pelissä.”

Tällöin $X \sim \text{Bin}(12, p)$.

a) Todennäköisyys, että 12 toistosta 6 onnistuu on

$$P(X=6) = \binom{12}{6} \cdot p^6 \cdot (1-p)^6 = 924p^6 \cdot (1-p)^6$$

Tiedetään, että todennäköisyys on 0,15. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan p.

$924p^6 \cdot (1-p)^6 = 0{,}15$ Ratkaistaan laskimella.

$p \approx -0{,}20$ tai $p \approx 0{,}37$ tai $p \approx 0{,}63$ tai $p \approx 1{,}20$

Koska todennäköisyys p toteuttaa aina ehdon $0 \le p \le 1$, niin $p \approx 0{,}37$ tai $p \approx 0{,}63$.

Petra voittaa yksittäisen pelin todennäköisyydellä 0,37 tai 0,63.

b) Mikäli $p = 0,3717...$, niin 12 pelissä voittojen odotusarvo on
$E(X) = 12 \cdot 0,3717... = 4,461... \approx 4,5$.

Tällöin 6 voittoa on Petralle hyvä tulos.

Mikäli $p = 0,6282...$, niin 12 pelissä voittojen odotusarvo on
$E(X) = 12 \cdot 0,6282... = 7,538... \approx 7,5$.

Tällöin 6 voittoa on Petralle huono tulos.

Vastaus a) 0,37 tai 0,63
b) Jos $p \approx 0,37$, niin $E(X) \approx 4,5$ ja tulos on hyvä.
Jos $p \approx 0,63$, niin $E(X) \approx 7,5$ ja tulos on huono.

264

Tarkastellaan satunnaismuuttujaa $X \sim \mathrm{Bin}(12;\ 0{,}2)$.

a) Lasketaan satunnaismuuttujan odotusarvo.

$$E(X) = 12 \cdot 0{,}2 = 2{,}4$$

b) Määritetään satunnaismuuttujan X jakauma taulukkolaskentaohjelmalla.

X	**P**
0	0,069
1	0,206
2	0,283
3	0,236
4	0,133
5	0,053
6	0,016
7	0,003
8	0,0005
9	0,00006
10	0,000004
11	0,0000002
12	0,000000004

=binomijakauma(A1; 12; 0,2; 0)

Todennäköisin arvo yhdessä toistossa on 2.

Vastaus a) 2,4 b) 2

265

Tapahtuma voidaan ajatella toistokokeeksi, jossa on 5 toistoa. Oikean vastauksen todennäköisyys yksittäisessä toistossa on $\frac{1}{4}=0,25$. Satunnaismuuttuja $X\sim$ Bin(5; 0,25).

Määritetään satunnaismuuttujan jakauma.

X	**todennäköisyyden laskeminen**	***P***
0	$P(X=0)=\binom{5}{0}\cdot 0,25^0\cdot 0,75^5=0,2373...$	0,237
1	$P(X=1)=\binom{5}{1}\cdot 0,25^1\cdot 0,75^4=0,3955...$	0,396
2	$P(X=2)=\binom{5}{2}\cdot 0,25^2\cdot 0,75^3=0,2636...$	0,264
3	$P(X=3)=\binom{5}{3}\cdot 0,25^3\cdot 0,75^2=0,08789...$	0,0879
4	$P(X=4)=\binom{5}{4}\cdot 0,25^4\cdot 0,75^1=0,01464...$	0,0146
5	$P(X=5)=\binom{5}{5}\cdot 0,25^5\cdot 0,75^0=0,0009765...$	0,000977

266

Tapahtuma voidaan ajatella toistokokeeksi, jossa on 50 toistoa. Oikean vastauksen todennäköisyys yksittäisessä toistossa on $\frac{1}{2}=0,5$. Satunnaismuuttuja $X\sim$ Bin(50; 0,5).

a) Lasketaan todennäköisyys $X=25$.

$$P(X=25)=0,1122...\approx 0,11$$

b) Lasketaan todennäköisyys, että kokeessa saadaan vähintään 42 oikein.

$$P(X\geq 42)=P(42\leq X\leq 50)=5,817...\cdot 10^{-7}\approx 5,8\cdot 10^{-7}$$

c) Lasketaan odotusarvo.

$$E(X)=50\cdot 0,5=25$$

Vastaus a) 0,11 b) $5,8\cdot 10^{-7}$ c) 25

267

Tapahtuma voidaan ajatella toistokokeeksi, jossa on 24 toistoa.

a) Veriryhmän O todennäköisyys yksittäisessä toistossa on $0,33$.
Satunnaismuuttuja $X \sim$ Bin(24; 0,33).

Lasketaan todennäköisyys, että joukossa on enintään yhdeksän ihmistä, joiden veriryhmä on O.

$P(X \leq 9) = P(0 \leq X \leq 9) = 0,7574... \approx 0,76$

b) Veriryhmän B todennäköisyys yksittäisessä toistossa on $0,17$.
Satunnaismuuttuja $Y \sim$ Bin(24; 0,17).

Lasketaan todennäköisyys, että joukossa on 3–9 ihmistä, joiden veriryhmä on B.

$P(3 \leq Y \leq 9) = 0,7962... \approx 0,80$

Vastaus a) 0,76 b) 0,80

268

Tapahtuma voidaan ajatella toistokokeeksi, jossa on 40 toistoa. Oikeakätisyyden todennäköisyys yksittäisessä toistossa on $0,9$. Satunnaismuuttuja $X \sim$ Bin(40; 0,9).

a) Lasketaan todennäköisyys, että ainakin $90\ \%$ partiolaisista eli ainakin $0,90 \cdot 40 = 36$ partiolaista on oikeakätisiä.

$$P(X \geq 36) = P(36 \leq X \leq 40) = 0,6290... \approx 0,63$$

b) Lasketaan todennäköisyys, että ainakin $80\ \%$ partiolaisista eli ainakin $0,80 \cdot 40 = 32$ on oikeakätisiä.

$$P(X \geq 32) = P(32 \leq X \leq 40) = 0,9845... \approx 0,98$$

Vastaus a) 0,63 b) 0,98

269

Määritetään jakauma taulukkolaskentaohjelmalla ja piirretään pylväskuvaaja.

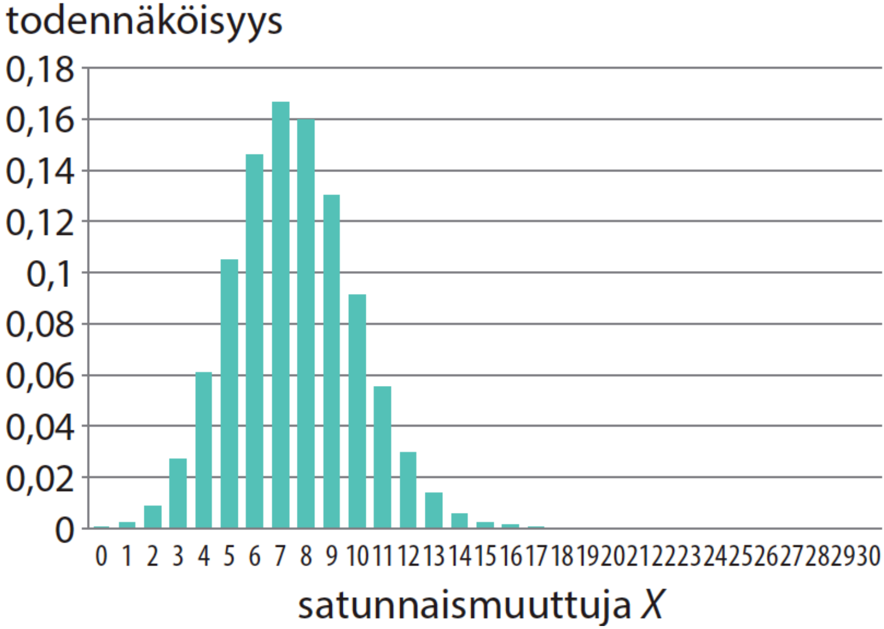
a)

$X \sim \mathrm{Bin}(30; 0{,}25)$

Laskukomento: =binomijakauma(A1; 30; 0,25; 0)

X	P
0	0,0002
1	0,0018
2	0,0086
3	0,0269
4	0,0604
5	0,1047
6	0,1455
7	0,1662
8	0,1593
9	0,1298
10	0,0909
11	0,0550
12	0,0290
13	0,0134
14	0,0054
15	0,0020

X	P
16	0,0006
17	0,0002
18	0,00004
19	0,000008
20	0,000002
21	0,0000002
22	0,00000003
23	0,000000004
24	$3 \cdot 10^{-10}$
25	$3 \cdot 10^{-12}$
26	$2 \cdot 10^{-13}$
27	$9{,}5 \cdot 10^{-14}$
28	0
29	0
30	0

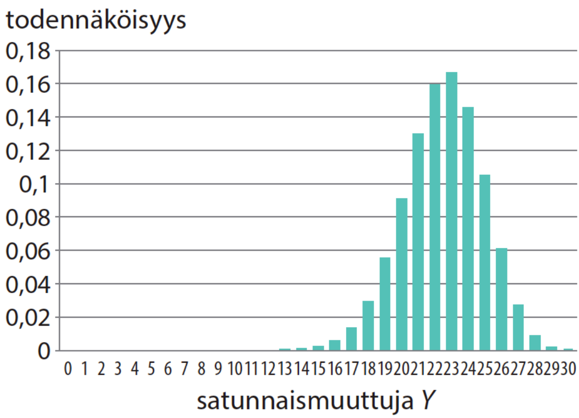

todennäköisyys
0,18
0,16
0,14
0,12
0,1
0,08
0,06
0,04
0,02
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30
satunnaismuuttuja X

b)

Y	P
0	$8{,}7\cdot 10^{-19}$
1	$7{,}8\cdot 10^{-17}$
2	$3{,}4\cdot 10^{-15}$
3	$9{,}5\cdot 10^{-14}$
4	$2\cdot 10^{-12}$
5	$3\cdot 10^{-11}$
6	$3{,}8\cdot 10^{-10}$
7	0,000000004
8	0,00000003
9	0,0000002
10	0,000002
11	0,000008
12	0,00004
13	0,0002
14	0,0006
15	0,0019
16	0,0054
17	0,0134
18	0,0291
19	0,0550
20	0,0909
21	0,1298
22	0,1593
23	0,1662
24	0,1455
25	0,1047
26	0,0604
27	0,0269
28	0,0086
29	0,0018
30	0,0002

$Y \sim \text{Bin}(30;\ 0{,}75)$

Laskukomento:
=binomijakauma(A1; 30; 0,75; 0)

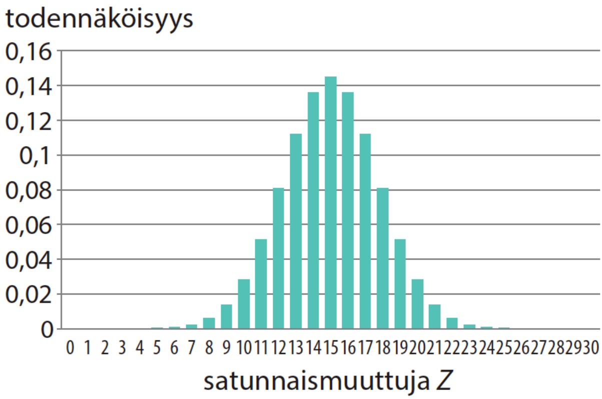


c)

Z	P
0	$9{,}3\cdot 10^{-10}$
1	0,00000003
2	0,0000004
3	0,000004
4	0,00003
5	0,0001
6	0,0006
7	0,0019
8	0,0054
9	0,0133
10	0,0280
11	0,0509
12	0,0805
13	0,1115
14	0,1354
15	0,1445
16	0,1354
17	0,1115
18	0,0806
19	0,0509
20	0,0280
21	0,0133
22	0,0054
23	0,0019
24	0,0006
25	0,0001
26	0,00003
27	0,000004
28	0,0000004
29	0,00000003
30	$9{,}3\cdot 10^{-10}$

$Z \sim \text{Bin}(30;\ 0{,}5)$

Laskukomento:
=binomijakauma(A1; 30; 0, 5; 0)



270

Tapahtuma voidaan ajatella toistokokeeksi, jossa on 12 toistoa.
Olkoon kuutosen todennäköisyys yksittäisessä toistossa p.
Tällöin $X \sim \text{Bin}(12, p)$.

Todennäköisyys, että 12 toistossa saadaan kaksi kuutosta on

$$P(X=2)=\binom{12}{2}\cdot p^2\cdot(1-p)^{10}=66p^2\cdot(1-p)^{10}$$

Tiedetään, että todennäköisyys on $0{,}283$. Muodostetaan yhtälö.

$66p^2\cdot(1-p)^{10}=0{,}283$ Ratkaistaan laskimella.

$p=-0{,}0510...$ tai $p=0{,}1360...$ tai $p=0{,}2006...$
tai $p=1{,}5322...$

Koska todennäköisyys p toteuttaa aina ehdon $0<p<1$, niin
$p\approx 0{,}136$ tai $p\approx 0{,}201$.

Silmäluvun 6 todennäköisyys yksittäisessä toistossa on noin $0{,}136$ tai $0{,}201$.

Vastaus $0{,}136$ tai $0{,}201$

271

Tapahtuma voidaan ajatella toistokokeeksi, jossa on 3 toistoa.
Olkoon onnistumistodennäköisyys yksittäisessä toistossa p.
Tällöin $X \sim \text{Bin}(3, p)$.

a) Todennäköisyys, että 3 toistosta 2 onnistuu on

$$P(X=2)=\binom{3}{2}\cdot p^2\cdot(1-p)^1=3p^2\cdot(1-p)$$

Tiedetään, että todennäköisyys on $0{,}40$. Muodostetaan yhtälö.

$$3p^2\cdot(1-p)=0{,}40$$ Ratkaistaan laskimella.

$$p=-0{,}3180... \quad \text{tai} \quad p=0{,}5361... \quad \text{tai} \quad p=0{,}7819...$$

Koska todennäköisyys p toteuttaa aina ehdon $0<p<1$, niin
$p\approx 0{,}536$ tai $p\approx 0{,}782$

Tanja saa maalin yksittäisellä rangaistuspotkulla
todennäköisyydellä $0{,}536$ tai $0{,}782$.

b) Mikäli $p = 0,5361...$, niin 5 rangaistuspotkussa maalien odotusarvo on $E(X) = 5 \cdot 0,5361... = 2,6806... \approx 2,7$.

Tällöin 3 maalia on Tanjalle hyvä tulos.

Mikäli $p = 0,7819...$, niin 5 rangaistuspotkussa maalien odotusarvo on $E(X) = 5 \cdot p = 0,7819... = 3,9096... \approx 3,9$.

Tällöin 3 maalia on Tanjalle huono tulos.

Vastaus a) 0,536 tai 0,782

b) Jos $p \approx 0,536$, niin $E(X) \approx 2,7$ ja tulos on hyvä.

Jos $p \approx 0,782$, niin $E(X) \approx 3,9$ ja tulos on huono.

272

Klaavan todennäköisyys yksittäisessä heitossa on p.
Kolikkoa heitetään n kertaa.
Satunnaismuuttuja X: ”saatujen klaavojen lukumäärä”.

Tiedetään, että $E(X) = np = 12$ ja $D(X) = \sqrt{np(1-p)} = 2$.

Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan n ja p.

$$\begin{cases} np = 12 \\ \sqrt{np(1-p)} = 2 \end{cases}$$

Sijoitetaan $np = 12$ alempaan yhtälöön.
(Yhtälöparin voi ratkaista myös laskimella)

$$\begin{aligned} \sqrt{12(1-p)} &= 2 \\ \sqrt{12-12p} &= 2 \qquad \Big|(\ )^2 \\ 12-12p &= 4 \\ 12p &= 8 \\ p &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Ratkaistaan n.

$$np = 12$$

$$n = \frac{12}{p} = \frac{12}{\frac{2}{3}} = 12 \cdot \frac{3}{2} = 18$$

Vastaus $n = 18$ ja $p = \frac{2}{3}$

273

Tapahtuman voidaan ajatella olevan toistokoe, jossa on 25 toistoa. Pilaantuneen omenan todennäköisyys yksittäisessä toistossa on 0,15. Tällöin $X \sim \text{Bin}(25; 0,15)$.

a) Määritetään pilaantuneiden omenoiden lukumäärän odotusarvo.

$$E(X) = 25 \cdot 0,15 = 3,75$$

b) Todennäköisyysjakauman moodi on se satunnaismuuttujan arvo, jonka todennäköisyys on suurin.

Määritetään jakauma taulukkolaskentaohjelmalla.

X	***P***
1	0,07587
2	0,16067
3	0,21738
4	0,21099
5	0,15638
6	0,09199
7	0,04406
8	0,01749
9	0,00583
…	…

=binomijakauma(A1; 25; 0,15; 0)

Jakaumasta havaitaan, että suurin todennäköisyys on tapahtumalla $X = 3$ Pilaantuneiden omenoiden lukumäärän moodi on 3.

Vastaus a) 3,75 b) 3

274

Tarkastellaan satunnaismuuttujia $X \sim (25;\ 0{,}40)$ ja $Y \sim (17;0{,}59)$.

a) Lasketaan satunnaismuuttujien odotusarvot.

$$E(X) = 25 \cdot 0{,}40 = 10$$

$$E(Y) = 17 \cdot 0{,}59 = 10{,}03 \approx 10$$

b) Määritetään satunnaismuuttujien keskihajonnat.

$$D(X) = \sqrt{25 \cdot 0{,}40 \cdot (1 - 0{,}40)} = 2{,}4494... \approx 2{,}45$$

$$D(Y) = \sqrt{17 \cdot 0{,}59 \cdot (1 - 0{,}59)} = 2{,}0278... \approx 2{,}03$$

Molempien jakaumien odotusarvo on likimain sama (10). Jakauman X keskihajonta on suurempi, joten jakauman X arvojen heilahtelut ovat suurempia jakauman Y arvoihin verrattuna.

Vastaus a) $E(X) = 10$ ja $E(Y) = 10{,}03 \approx 10$

b) $D(X) \approx 2{,}45$ ja $D(Y) \approx 2{,}03$.

Odotusarvot ovat likimain samat, mutta jakauman X arvojen heilahtelut ovat suurempia jakauman Y arvoihin verrattuna.

275

a) Pascalin kolmion viides rivi on $(n = 4)$ 1 4 6 4 1.

$$(x+1)^4 = 1x^4 + 4x^3 \cdot 1 + 6x^2 \cdot 1^2 + 4x \cdot 1^3 + 1 \cdot 1^4$$
$$= x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

b) Muodostetaan kuudes rivi. Käytetään apuna viidettä riviä. Jokaisen rivin ensimmäinen ja viimeinen luku on 1 ja jokainen muu luku kahden ylemmän luvun summa.

$n=4$	1	4	6	4	1	
$n=5$	1	5	10	10	5	1

$$(x+2)^5 = 1x^5 + 5x^4 \cdot 2 + 10x^3 \cdot 2^2 + 10x^2 \cdot 2^3 + 5x \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5$$
$$= x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$$

Vastaus a) $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

b) kuudes rivi: 1 5 10 10 5 1
$x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$

276

Lausekkeessa $(x+1)^6$ $a=x$, $b=1$ ja $n=6$.

Sievennetään käyttäen binomikaavaa.

$$(x+1)^6 = x^6 + \binom{6}{1}\cdot x^{6-1}\cdot 1 + \binom{6}{2}\cdot x^{6-2}\cdot 1^2 + \binom{6}{3}\cdot x^{6-3}\cdot 1^3$$
$$+\binom{6}{4}\cdot x^{6-4}\cdot 1^4 + \binom{6}{5}\cdot x\cdot 1^{6-1} + 1^6$$

$$= x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1$$

Vastaus $x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1$

277

a) Määritetään polynomin $(x-3)^{12}$ kolmannen asteen termi.

$$\binom{12}{9} \cdot x^{\overbrace{12-9}^{=3}} \cdot (-3)^9 = 220x^3 \cdot (-19\ 683)$$
$$= -4\ 330\ 260x^3$$

b) Määritetään polynomin $(x-3)^{12}$ kuudennen asteen termi.

$$\binom{12}{6} \cdot x^{\overbrace{12-6}^{=6}} \cdot (-3)^6 = 924x^6 \cdot 729$$
$$= 673\ 596x^6$$

Vastaus a) $-4\ 330\ 260x^3$ b) $673\ 596x^6$

278

a) Tarkastellaan summaa $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+...+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$.

$n=0$:

$$\binom{0}{0}=1$$

$n=1$:

$$\binom{1}{0}+\binom{1}{1}=1+1=2$$

$n=2$:

$$\binom{2}{0}+\binom{2}{1}+\binom{2}{2}=1+2+1=4$$

$n=3$:

$$\binom{3}{0}+\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}=1+3+3+1=8$$

$n=4$:

$$\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=1+4+6+4+1=16$$

b) Summan arvo saadaan kaavalla 2^n.

Koska $2^n = (1 + 1)^n$, voidaa käyttää binomikaavaa.

$$
\begin{aligned}
2^n &= (1+1)^n \\
&= 1^n + \binom{n}{1} \cdot 1^{n-1} \cdot 1 + \binom{n}{2} \cdot 1^{n-2} \cdot 1^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} \cdot 1 \cdot 1^{n-1} + 1^n \\
&= 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + 1 \\
&= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}
\end{aligned}
$$

On siis osoitettu, että

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \qquad \square$$

Vastaus a) 1, 2, 4, 8 ja 16 b) 2^n

279

a) Määritetään luku k niin, että tiheysfunktion määritelmän ehdot toteutuvat, kun $f(x)=\begin{cases} kx, \text{ kun } 0 \le x \le 5 \\ 0, \text{ muulloin.} \end{cases}$

1) Pitää olla $f(x) \ge 0$ kaikilla x. Funktion arvot ovat epänegatiivisia, kun $k \ge 0$.

2) Funktion kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-alan tulee olla 1. Välin $0 \le x \le 5$ ulkopuolella funktion kuvaaja kulkee pitkin x-akselia. Siten funktion kuvaajan ja x-akselin välillä $[0, 5]$ rajaaman alueen pinta-alan tulee olla 1.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan k.

$$\int_0^5 kx\mathrm{d}x = 1$$

$$k = \frac{2}{25}$$

b) Lasketaan todennäköisyys $P(0 < X < 2)$.

$$P(0 < X < 2) = \int_0^2 \frac{2}{25}x\mathrm{d}x = \frac{4}{25} = 0{,}16$$

Vastaus a) $k = \frac{2}{25}$ b) $P(0 < X < 2) = \frac{4}{25} = 0{,}16$

280

a) Koska funktion $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}, \text{ kun } 1\le x\le 3\\ 0, \text{ muulloin}\end{cases}$ arvo on nolla kohdasta 3 eteenpäin, on pinta-ala yhtä suuri kuin välille $[2, 3]$ rajautuvan alueen pinta-ala.

$$P(X>2)=\int_2^3\left(\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}x=\frac{9}{16}=0{,}5625\approx 0{,}563$$

b) Lasketaan tiheysfunktion kuvaajan ja x-akselin välillä $[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$ rajaaman alueen pinta-ala.

$$P(\frac{3}{2}\le X\le \frac{5}{2})=\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}\left(\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}=0{,}5$$

Vastaus a) $\frac{9}{16}\approx 0{,}563$ b) $\frac{1}{2}=0{,}5$

281

a) Määritetään luku a niin, että tiheysfunktion määritelmän ehdot toteutuvat, kun $f(x)=\begin{cases} ae^{ax}, \text{ kun } 0 \le x \le 2 \\ 0, \text{ muulloin} \end{cases}$.

Pitää olla $f(x) \ge 0$ kaikilla x. Ehto toteutuu, kun $a \ge 0$.

Funktion kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-alan tulee olla 1. Välin $0 \le x \le 2$ ulkopuolella funktion kuvaaja kulkee pitkin x-akselia. Siten funktion kuvaajan ja x-akselin välillä $[0, 2]$ rajaaman alueen pinta-alan tulee olla 1.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan a.

$$\int_0^2 ae^{ax}\mathrm{d}x = 1$$

$$a = \frac{1}{2}\ln 2$$

b) Lasketaan todennäköisyys $P(1 \le X \le 2)$.

$$P(1 \le X \le 2) = \int_1^2 \frac{1}{2}\ln 2 \cdot e^{\frac{1}{2}\ln 2x}\mathrm{d}x = 2-\sqrt{2} = 0{,}5857... \approx 0{,}59$$

Vastaus a) $a = \frac{1}{2}\ln 2$ b) $2-\sqrt{2} \approx 0{,}59$

282

Kertymäfunktio $F(x)=\begin{cases}0,\text{ kun } x<0\\ 2^{\frac{1}{3}x}-1,\text{ kun } 0\le x\le 3\\ 1,\text{ kun } x>3\end{cases}$

a) Lasketaan todennäköisyys.

$$P(X\le 2)=F(2)=2^{\frac{1}{3}\cdot 2}-1=0,5874...\approx 0,59$$

b) Lasketaan todennäköisyys vastatapahtuman avulla.

$$\begin{aligned}P(X>1)&=1-P(X\le 1)\\&=1-F(1)\\&=1-(2^{\frac{1}{3}\cdot 1}-1)\\&=0,7400...\approx 0,74\end{aligned}$$

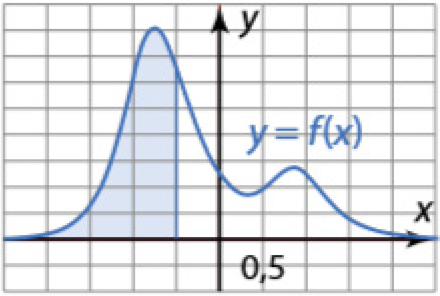
c) Lasketaan todennäköisyys.

$$\begin{aligned}P(1\le X\le 3)&=F(3)-F(1)\\&=2^{\frac{1}{3}\cdot 3}-1-(2^{\frac{1}{3}\cdot 1}-1)\\&=0,7400...\approx 0,74\end{aligned}$$

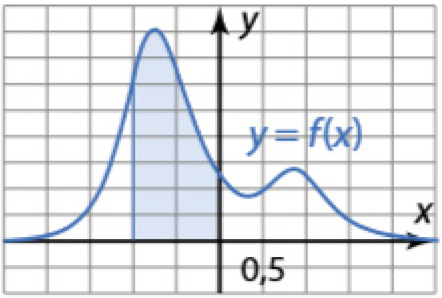
Vastaus a) 0,59 b) 0,74 c) 0,74

283

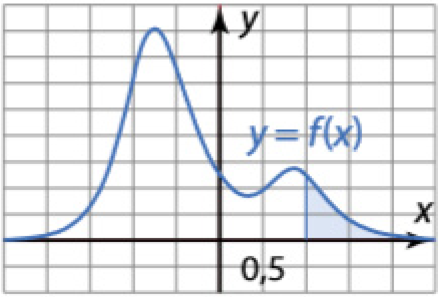
a) Vaihtoehto 4: $\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x$



b) Vaihtoehto 6: $F(0) - F(-1)$



c) Vaihtoehto 2: $P(X \geq 1)$ ja vahtoehto 7: $1 - F(-1)$



Vastaus a) 4 b) 6 c) 2 ja 7

284

Olkoon X: ”satunnaiseen aikaan pysäkille saapuvan henkilön odotusaika ennen bussin lähtöä”

a) Bussi lähtee 20 minuutin välein, joten odotusaika on välillä $0 \le X < 20$.

Satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on muotoa

$$f(x) = \begin{cases} p, \text{ kun } 0 \le x < 20 \\ 0, \text{ muulloin.} \end{cases}$$

Määritetään vakio p niin, että tiheysfunktion määritelmä ehdot toteutuvat.

1) Pitää olla $f(x) \ge 0$ kaikilla x. Tämä toteutuu kun $p \ge 0$.
2) Funktion f kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-ala tulee olla 1. Tämä alue on suorakulmio, jonka leveys on 20 ja korkeus on p. Ratkaistaan p.

$$20p = 1$$

$$p = \frac{1}{20}$$

Tiheysfunktio on

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{20}, \text{ kun } 0 \le x < 20 \\ 0, \text{ muulloin.} \end{cases}$$

b) Muodostetaan kertymäfunktion $F(t)$ lauseke.

Jos $t < 0$, niin rajan t vasemmalla puolella tiheysfunktion f arvo on 0 ja $F(t) = P(X \le t) = 0$.

Jos $0 \le t < 20$, niin kohtaan t mennessä kertynyt todennäköisyys saadaan tiheysfunktion määrättynä integraalina kohdasta 0 kohtaan t.

$$F(t) = P(X \le t) = \int_0^t \frac{1}{20}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{20}t$$

Koska kaikki todennäköisyys on kertynyt kohtaan $t = 20$ mennessä, on

$$F(t) = P(X \le t) = 1 \quad \text{kaikilla} \quad t \ge 20.$$

Muodostetaan kertymäfunktio ja vaihdetaan muuttujaksi x.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0 \\ \frac{1}{20}x, & \text{kun } 0 \le x < 20 \\ 1, & \text{kun } x \ge 20 \end{cases}$$

c) Lasketaan todennäköisyys, että odotusaika on yli 15 min eli 15 – 20 minuuttia.

$$\begin{aligned} P(X > 15) &= P(15 < X < 20) \\ &= F(20) - F(15) \\ &= \frac{1}{20}\cdot 20 - \frac{1}{20}\cdot 15 \\ &= 0{,}25 \end{aligned}$$

Vastaus a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{20}, & \text{kun } 0 \le x < 20\\ 0, & \text{muulloin.}\end{cases}$

b) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{kun } x < 0\\ \dfrac{1}{20}x, & \text{kun } 0 \le x < 20\\ 1, & \text{kun } x \ge 20\end{cases}$

c) 0,25

285

Tiheysfunktio $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{1000}x^2, \text{ kun } 0\le x<10\\ 0, \text{ muulloin}\end{cases}$

a) Lasketaan todennäköisyys $P(X < 6)$. Kun $x < 0$, on $f(x) = 0$. Integraali voidaan rajoittaa välille [0, 6[.

$$P(X<6)=\int_0^6 \frac{3}{1000}x^2\mathrm{d}x=\frac{27}{125}=0{,}216$$

b) Muodostetaan kertymäfunktion $F(t)$ lauseke.

Jos $t<0$, niin rajan t vasemmalla puolella tiheysfunktion f arvo on 0 ja $F(t)=P(X\le t)=0$.

Jos $0\le t<10$, niin kohtaan t mennessä kertynyt todennäköisyys saadaan tiheysfunktion määrättynä integraalina kohdasta 0 kohtaan t.

$$F(t)=P(X\le t)=\int_0^t \frac{3}{1000}\mathrm{x}^2\mathrm{d}x=\frac{1}{1000}t^3$$

Koska kaikki todennäköisyys on kertynyt kohtaan $t=10$ mennessä, on

$F(t)=P(X\le t)=1$ kaikilla $t\ge 10$.

Muodostetaan kertymäfunktio ja vaihdetaan muuttujaksi x.

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{kun } x<0\\ \dfrac{1}{1000}x^3, & \text{kun } 0\le x<10\\ 1, & \text{kun } x\ge 10\end{cases}$$

c) Lasketaan todennäköisyydet.

$$P(X<4)=F(4)=\frac{1}{1000}\cdot 4^3=\frac{8}{125}=0,064$$

$$\begin{aligned}P(2\le X\le 10)&=F(10)-F(2)\\ &=\frac{1}{1000}\cdot 10^3-\frac{1}{1000}\cdot 2^3\\ &=\frac{124}{125}=0,992\end{aligned}$$

Vastaus a) $\dfrac{27}{125}=0,216$

b) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{kun } x<0\\ \dfrac{3}{1000}x^3, & \text{kun } 0\le x<10\\ 1, & \text{kun } x\ge 10\end{cases}$

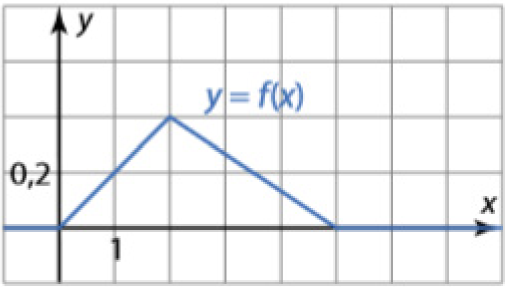
c) $P(X<4)=\dfrac{8}{125}=0,064$ ja

$P(2\le X\le 10)=\dfrac{124}{125}=0,992$

286

a) Piirretään tiheysfunktion $f(x)=\begin{cases}0, \text{ kun } x<0\\ \frac{1}{5}x, \text{ kun } 0\leq x<2\\ -\frac{2}{15}x+\frac{2}{3}, \text{ kun } 2\leq x<5\\ 0, \text{ kun } x\geq 5\end{cases}$

kuvaaja.



b) Lasketaan todennäköisyydet.

$$P(x \le 1) = P(0 \le x \le 1) = \int_0^1 \frac{1}{5} x \mathrm{d}x = \frac{1}{10} = 0,1$$

$$P(1 < x \le 3) = \int_1^2 \frac{1}{5} x \mathrm{d}x + \int_2^3 \left(-\frac{2}{15} x + \frac{2}{3} \right) \mathrm{d}x = 0,6333... \approx 0,63$$

$$P(x > 3) = P(3 < x \le 5) = \int_3^5 \left(-\frac{2}{15} x + \frac{2}{3} \right) \mathrm{d}x = 0,2666... \approx 0,27$$

Vastaus b) $P(x \le 1) = 0,1$ ja $P(1 < x \le 3) \approx 0,63$ ja $P(x > 3) \approx 0,27$

287

a) Satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on muotoa

$$f(x)=\begin{cases} p, & \text{kun } 0\le x\le 8 \\ 0, & \text{muulloin.}\end{cases}$$

Määritetään vakio p niin, että tiheysfunktion määritelmä ehdot toteutuvat.

1) Pitää olla $f(x)\ge 0$ kaikilla x. Tämä toteutuu kun $p\ge 0$.
2) Funktion f kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-ala tulee olla 1. Tämä alue on suorakulmio, jonka leveys on 8 ja korkeus on p. Ratkaistaan p.

$$8p=1$$
$$p=\frac{1}{8}$$

Tiheysfunktio on

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{8}, & \text{kun } 0\le x\le 8 \\ 0, & \text{muulloin.}\end{cases}$$

b) Muodostetaan kertymäfunktion $F(t)$ lauseke.

Jos $t < 0$, niin rajan t vasemmalla puolella tiheysfunktion f arvo on 0 ja $F(t) = P(X \leq t) = 0$.

Jos $0 \leq t < 8$, niin kohtaan t mennessä kertynyt todennäköisyys saadaan tiheysfunktion määrättynä integraalina kohdasta 0 kohtaan t.

$$F(t) = P(X \leq t) = \int_0^t \frac{1}{8}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}t$$

Koska kaikki todennäköisyys on kertynyt kohtaan $t = 8$ mennessä, on

$F(t) = P(X \leq t) = 1$ kaikilla $t \geq 8$.

Muodostetaan kertymäfunktio ja vaihdetaan muuttujaksi x.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0 \\ \frac{1}{8}x, & \text{kun } 0 \leq x < 8 \\ 1, & \text{kun } x \geq 8 \end{cases}$$

c) Lasketaan todennäköisyydet.

$$P(X < 5) = F(5) = \frac{1}{8} \cdot 5 = 0{,}625$$

$$P(1 \leq X \leq 2) = F(2) - F(1) = \frac{1}{8} \cdot 2 - \frac{1}{8} \cdot 1 = 0{,}125$$

Vastaus a) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{8}, \text{ kun } 0 \le x \le 8\\ 0, \text{ muulloin.}\end{cases}$

b) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{kun } x<0\\ \frac{1}{8}x, & \text{kun } 0 \le x<8\\ 1, & \text{kun } x \ge 8\end{cases}$

c) $P(X<5)=0,625$ ja $P(1 \le X \le 2)=0,125$

288

a) Taulussa jokaisen renkaan leveys on $\frac{20\text{ cm}}{10} = 2\text{ cm}$ ja 10-ympyrän säde on 2 cm. Jotta tikka osuisi 9:ään tai 10:een, sen etäisyys keskipisteestä voi olla korkeintaan 4 cm.

Lasketaan todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(r \leq 4) &= P(0 \leq r \leq 4) \\ &= \int_0^4 \frac{3}{16000}(400 - r^2)\mathrm{d}r \\ &= 0,296 \approx 0,30 \end{aligned}$$

b) Lasketaan todennäköisyys, että viidestä tikasta ainakin kolme osuu 9:ään tai 10:een.

Kyseessä on toistokoe, jossa on 5 toistoa. Osuman todennäköisyys on 0,296. Olkoon satunnaismuuttuja X:”tikka osuu 9:ää tai 10:een”, jolloin $X \sim \text{Bin}(5,\ 0{,}296)$.

$$P(X \geq 3) = P(X = 3 \text{ tai } X = 4 \text{ tai } X = 5)$$
$$= \binom{5}{3} \cdot 0,296^3 \cdot 0,704^2 + \binom{5}{4} \cdot 0,296^4 \cdot 0,704^1 + \binom{5}{5} \cdot 0,296^5 \cdot 0,704^0$$
$$= 0{,}1578... \approx 0{,}16$$

Vastaus a) 0,30 b) 0,16

289

Satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}-\frac{1}{18}x^2, & \text{kun } 0\le x\le 3\\ 0, & \text{muulloin.}\end{cases}$$

a) $P(X<a)=\int_0^a \frac{1}{2}-\frac{1}{18}x^2\,\mathrm{d}x$ kaikilla $0\le a\le 3$.

Tiedetään, että $P(X<a)=0{,}10$.

$$\int_0^a \frac{1}{2}-\frac{1}{18}x^2\,\mathrm{d}x=0{,}10$$

$$a=0{,}2002...\approx 0{,}2$$

b) $P(X>b)=\int_b^3 \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{18}x^2\right)\mathrm{d}x$ kaikilla $0\le b\le 3$.

Tiedetään, että $P(X>b)=0{,}50$.

$$\int_b^3 \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{18}x^2\right)\mathrm{d}x=0{,}50$$

$$b=1{,}041...\approx 1{,}0$$

Vastaus a) $a\approx 0{,}2$ b) $b\approx 1{,}0$

290

a) Määritetään luku $a > 2$ niin, että tiheysfunktion määritelmän ehdot toteutuvat, kun $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, \text{ kun } 1 \le x \le a \\ 0, \text{ muulloin} \end{cases}$.

1) Pitää olla $f(x) \ge 0$ kaikilla x. Välillä $1 \le x \le a$ lausekkeen $\frac{1}{x}$ arvot ovat epänegatiivisia.

2) Funktion kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-alan tulee olla 1. Välin $1 \le x \le a$ ulkopuolella funktion kuvaaja kulkee pitkin x-akselia. Siten funktion kuvaajan ja x-akselin välillä $[1, a]$ rajaaman alueen pinta-alan tulee olla 1.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan a.

$$\int_1^a \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 1$$
$$a = \mathrm{e}$$

b) Lasketaan todennäköisyys $P(X > 2)$.

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= P(2 < X < \mathrm{e}) \\ &= \int_2^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= 1 - \ln 2 \approx 0{,}307 \end{aligned}$$

Vastaus a) $a = \mathrm{e}$ b) $1 - \ln 2 \approx 0{,}307$

291

Määritetään todennäköisyydet, kun $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin x,\text{ kun }0\le x\le \pi\\ 0,\text{ muulloin}\end{cases}$.

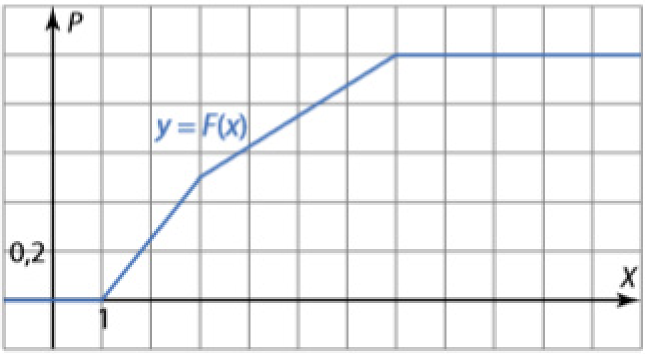
$$\begin{aligned}P(X<2)&=P(0\le X<2)\\ &=\int_0^2 \frac{1}{2}\sin x\,\mathrm{d}x\\ &=0,7080...\approx 0,71\end{aligned}$$

$$P(\frac{\pi}{3}\le X\le \frac{4\pi}{3})=P(\frac{\pi}{3}\le X\le \pi)=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}\sin x\,\mathrm{d}x=0,75$$

Vastaus $P(X<2)\approx 0,71$ ja $P(\frac{\pi}{3}\le X\le \frac{4\pi}{3})=0,75$

292

a) Piirretään funktion $F(x)=\begin{cases}0, \text{ kun } x<1\\ \frac{1}{4}x-\frac{1}{4}, \text{ kun } 1\leq x<3\\ \frac{1}{8}x+\frac{1}{8}, \text{ kun } 3\leq x<7\\ 1, \text{ kun } x\geq 7\end{cases}$ kuvaaja.



b) Lasketaan todennäköisyydet.

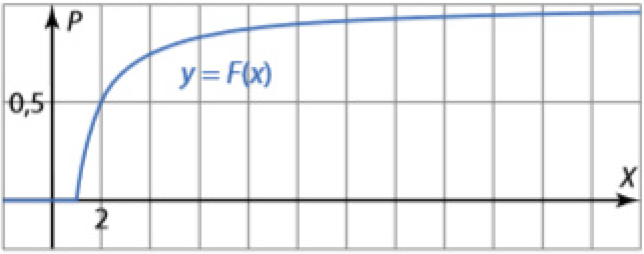
$$
\begin{aligned}
P(1,5 \le X \le 5) &= F(5) - F(1,5) \\
&= \frac{1}{8} \cdot 5 + \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{4} \cdot 1,5 - \frac{1}{4} \right) \\
&= \frac{5}{8} = 0,625
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(4 < X < 10) &= P(4 < X < 7) \\
&= F(7) - F(4) \\
&= 1 - (\frac{1}{8} \cdot 4 + \frac{1}{8}) \\
&= \frac{3}{8} = 0,375
\end{aligned}
$$

Vastaus b) $P(1,5 \le X \le 5) = 0,625$ ja $P(4 < X < 10) = 0,375$

293

a) Piirretään funktion $F(x)=\begin{cases}0,\ \text{kun }\ x\le 1\\ 1-\dfrac{1}{x},\ \text{kun }\ x>1\end{cases}$ kuvaaja.



b) Lasketaan todennäköisyydet.

$$\begin{aligned}P(X\le 1,5)&=F(1,5)\\&=1-\frac{1}{1,5}\\&=0,3333...\approx 0,33\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(2\le X\le 4)&=F(4)-F(2)\\&=1-\frac{1}{4}-(1-\frac{1}{2})\\&=0,25\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(X>2)&=1-P(X\le 2)\\&=1-(1-\frac{1}{2})\\&=0,5\end{aligned}$$

Vastaus b) $P(X \leq 1,5) \approx 0,33$, $P(2 \leq X \leq 4) = 0,25$ ja $P(X > 2) = 0,5$

294

a) Määritetään luku k niin, että tiheysfunktion määritelmän ehdot toteutuvat, kun $f(x)=\begin{cases} kx, \text{ kun } 1 \le x \le 5 \\ 0, \text{ muulloin} \end{cases}$.

1) Pitää olla $f(x) \ge 0$ kaikilla x. Funktion arvot ovat epänegatiivisia, kun $k \ge 0$.

2) Funktion kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-alan tulee olla 1. Välin $1 \le x \le 5$ ulkopuolella funktion kuvaaja kulkee pitkin x-akselia. Siten funktion kuvaajan ja x-akselin välillä $[1, 5]$ rajaaman alueen pinta-alan tulee olla 1.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan k.

$$\int_1^5 kx \,\mathrm{d}x = 1$$

$$k = \frac{1}{12}$$

b) Muodostetaan kertymäfunktion $F(t)$ lauseke.

Jos $t < 1$, niin rajan t vasemmalla puolella tiheysfunktion f arvo on 0 ja $F(t) = P(X \leq t) = 0$.

Jos $1 \leq t < 5$, niin kohtaan t mennessä kertynyt todennäköisyys saadaan tiheysfunktion määrättynä integraalina kohdasta 1 kohtaan t.

$$F(t) = P(X \leq t) = \int_1^t \frac{1}{12} \mathrm{x} \mathrm{d}x = \frac{1}{24}t^2 - \frac{1}{24}$$

Koska kaikki todennäköisyys on kertynyt kohtaan $t = 5$ mennessä, on

$F(t) = P(X \leq t) = 1$ kaikilla $t \geq 5$.

Muodostetaan kertymäfunktio ja vaihdetaan muuttujaksi x.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 1 \\ \frac{1}{24}x^2 - \frac{1}{24}, & \text{kun } 1 \leq x < 5 \\ 1, & \text{kun } x \geq 5 \end{cases}$$

Vastaus a) $k = \frac{1}{12}$

b) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 5 \\ \frac{1}{24}x^2 - \frac{1}{24}, & \text{kun } 1 \leq x < 5 \\ 1, & \text{kun } x \geq 5 \end{cases}$

295

Koska tiheysfunktion $f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x, & \text{kun } 0\le x\le 1\\ 0, & \text{muulloin}\end{cases}$ arvot eroavat nollasta vain välillä $0\le x\le 1$, voidaan odotusarvon ja keskihajonnan määritelmissä esiintyvät integraalit rajoittaa tälle välille.

Lasketaan odotusarvo ja keskihajonta.

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi-2}{\pi} = 0,3633\ldots \approx 0,36
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D(X) &= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)f(x)\mathrm{d}x} \\
&= \sqrt{\int_0^1 (x-\frac{\pi-2}{\pi})^2\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x\mathrm{d}x} \\
&= \frac{2}{\pi}\sqrt{\pi-3} = 0,2395\ldots. \approx 0,24
\end{aligned}
$$

Vastaus $E(X)=\frac{\pi-2}{\pi}\approx 0,36$ ja $\frac{2}{\pi}\sqrt{\pi-3}\approx 0,24$

296

Arvotaan satunnainen reaaliluku väliltä [0, 5]. Olkoon satunnaismuuttuja X: ”arvottu luku”.

Satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on muotoa

$$f(x)=\begin{cases} p, \text{ kun } 0\le x\le 5 \\ 0, \text{ muulloin.}\end{cases}$$

Määritetään vakio p niin, että tiheysfunktion määritelmä ehdot toteutuvat.

1) Pitää olla $f(x)\ge 0$ kaikilla x. Tämä toteutuu kun $p\ge 0$.
2) Funktion f kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-ala tulee olla 1. Tämä alue on suorakulmio, jonka leveys on 5 ja korkeus on p. Ratkaistaan p.

$$\begin{aligned} 5p &= 1 \\ p &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Tiheysfunktio on

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{5}, \text{ kun } 0\le x\le 5 \\ 0, \text{ muulloin.}\end{cases}$$

Koska tiheysfunktion arvot eroavat nollasta välillä $0\le x\le 5$, voidaan odotusarvon ja keskihajonnan määritelmissä esiintyvät integraalit rajoittaa tälle välille.

Lasketaan odotusarvo ja keskihajonta.

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{5} x \cdot \frac{1}{5}\mathrm{d}x \\
&= 2,5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D(X) &= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) f(x)\mathrm{d}x} \\
&= \sqrt{\int_{0}^{5} (x-2,5)^2 \cdot \frac{1}{5}\mathrm{d}x} \\
&= 1,4433... \approx 1,4
\end{aligned}
$$

Vastaus $E(X) = 2,5$ ja $D(X) \approx 1,4$

297

Tiheysfunktio $f(x)=F'(x)$ kaikissa niissä kohdissa, joissa

kertymäfunktio $F(x)=\begin{cases}0, \text{ kun } x<0\\ \frac{5}{6}x-\frac{1}{6}x^2, \text{ kun } 0\le x<2\\ 1, \text{ kun } x\ge 2\end{cases}$ on derivoituva.

Derivoidaan kertymäfunktio.

kun $x<0$:
$f(x)=D(0)=0$

kun $0<x<2$:

$$\begin{aligned}f(x)&=D(\frac{5}{6}x-\frac{1}{6}x^2)\\&=\frac{5}{6}-\frac{2}{6}x\\&=\frac{5}{6}-\frac{1}{3}x\end{aligned}$$

kun $x>2$:

$f(x)=D(1)=0$

Rajakohdissa $x=0$ ja $x=2$ tiheysfunktion arvot voidaan valita vapaasti, koska muutokset yksittäisissä kohdissa eivät vaikuta tiheysfunktion kuvaajan rajaamiin pinta-aloihin ja todennäköisyyksiin.

Määritellään

$$f(x)=\begin{cases}\frac{5}{6}-\frac{1}{3}x, \text{ kun } 0\le x\le 2\\ 0, \text{ muulloin}\end{cases}$$

Lasketaan odotusarvo. Koska tiheysfunktion arvot eroavat nollasta välillä $0\le x\le 2$, voidaan odotusarvon määritelmissä esiintyvät integraalit rajoittaa tälle välille.

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x\\ &=\int_0^2 x\cdot(\frac{5}{6}-\frac{1}{3}x)\mathrm{d}x\\ &=\frac{7}{9}\end{aligned}$$

Vastaus $f(x)=\begin{cases}\frac{5}{6}-\frac{1}{3}x, \text{ kun } 0\le x\le 2\\ 0, \text{ muulloin}\end{cases}$, $E(X)=\frac{7}{9}$

298

Nuppineula putoaa ympyränmuotoiselle karvamatolle, jonka halkaisija on 2,4 metriä eli säde on 1,2 m.

Olkoon satunnaismuuttuja X: ”nupin etäisyys maton keskipisteestä”.

a) Muodostetaan kertymäfunktio $F(x) = P(X \leq x)$.

Kun $x < 0$ $F(x) = 0$ ja kun $x \geq 1,2$ $F(x) = 1$.

Kun $0 \leq x < 1,2$, niin kertymäfunktion arvo $F(x)$ on x säteisen ympyrän pinta-alan suhde koko ympyrän pinta-alaan.

$$F(x) = \frac{\pi \cdot x^2}{\pi \cdot 1,2^2} = \frac{x^2}{1,44}$$

Kertymäfunktioksi saadaan

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ kun } x < 0 \\ \dfrac{x^2}{1,44}, \text{ kun } 0 \leq x < 1,2 \\ 1, \text{ kun } x \geq 1,2 \end{cases}$$

b) Tiheysfunktio on $f(x)=F'(x)$ kaikissa niissä kohdissa, joissa F on derivoituva.

Derivoidaan kertymäfunktio.

Kun $x<0$ tai $x>1,2$ $\quad f(x)=D(0)=D(1)=0$

Kun $0<x<1,2$

$$f(x)=D(\frac{x^2}{1,44})=\frac{x}{0,72}=\frac{25x}{18}$$

Arvot rajakohdissa $x=0$ ja $x=1,2$ voidaan valita vapaasti. Määritellään

$$f(x)=\begin{cases}\frac{25x}{18}, \text{ kun } 0\le x<1,2\\ 0, \text{ muulloin}\end{cases}$$

c) Koska tiheysfunktion arvot eroavat nollasta välillä $0 \le x \le 1,2$, voidaan odotusarvon ja keskihajonnan määritelmissä esiintyvät integraalit rajoittaa tälle välille.

Lasketaan odotusarvo ja keskihajonta.

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{1,2} x \cdot \frac{25x}{18}\mathrm{d}x \\
&= 0,8\,(\mathrm{m})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D(X) &= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) f(x)\mathrm{d}x} \\
&= \sqrt{\int_{0}^{1,2} (x-0,8)^2 \cdot \frac{25x}{18}\mathrm{d}x} \\
&= 0,28284... \approx 0,28\,(\mathrm{m})
\end{aligned}
$$

Vastaus a) $F(x) = \begin{cases} 0, \text{ kun } x < 0 \\ \dfrac{x^2}{1,44}, \text{ kun } 0 \le x < 1,2 \\ 1, \text{ kun } x \ge 1,2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{25x}{18}, \text{ kun } 0 \le x < 1,2 \\ 0, \text{ muulloin} \end{cases}$

c) $E(X) = 0,8\,\mathrm{m}$ ja $D(X) \approx 0,28\,\mathrm{m}$

299

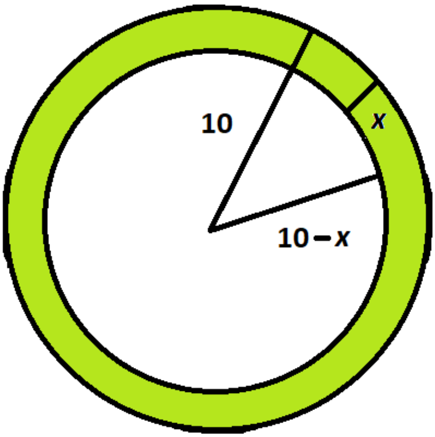
Ympyrän muotoiseen maaliin, jonka säde on 10 cm heitetään umpimähkään tikkaa.

Olkoon satunnaismuuttuja X: ”tauluun osuneen tikan etäisyys reunasta”.

Muodostetaan kertymäfunktio $F(x) = P(X \leq x)$.

Kun $x < 0$ $F(x) = 0$ ja kun $x \geq 10$ $F(x) = 1$.

Kun $0 \leq x < 10$, on kertymäfunktion $F(x)$ arvo renkaan pinta-alan suhde koko ympyrän pinta-alaan. Renkaan ulkosäde on 10 ja sisäsäde on $10 - x$. Renkaan pinta-ala saadaan vähentämällä koko ympyrän pinta-alasta $10 - x$ säteisen ympyrän pinta-ala.



$$\frac{\pi \cdot 10^2 - \pi(10-x)^2}{\pi \cdot 10^2} = \frac{100-(100-20x+x^2)}{100} = \frac{20x}{100} - \frac{x^2}{100} = \frac{1}{5}x - \frac{1}{100}x^2$$

Kertymäfunktioksi saadaan

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ kun } x<0\\ \frac{1}{5}x-\frac{1}{100}x^2, \text{ kun } 0\le x<10\\ 1, \text{ kun } x\ge 10\end{cases}$$

Tiheysfunktio on $f(x)=F'(x)$ kaikissa niissä kohdissa, joissa F on derivoituva.

Derivoidaan kertymäfunktio.

Kun $x<0$ tai $x>10$ $f(x)=D(0)=D(1)=0$

Kun $0<x<10$

$$f(x)=D(\frac{1}{5}x-\frac{1}{100}x^2)=\frac{1}{5}-\frac{2}{100}x=\frac{1}{5}-\frac{1}{50}x$$

Arvoilla rajakohdissa $x = 0$ ja $x = 10$ ei ole merkitystä. Määritellään

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}-\frac{1}{50}x, \text{ kun } 0\le x<10\\ 0, \text{ muulloin}\end{cases}$$

Koska tiheysfunktion arvot eroavat nollasta välillä $0\le x<10$, voidaan odotusarvon ja keskihajonnan määritelmissä esiintyvät integraalit rajoittaa tälle välille.

Lasketaan odotusarvo ja keskihajonta.

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{10} x \cdot (\frac{1}{5} - \frac{1}{50}x)\mathrm{d}x \\
&= 3,333... \approx 3,3\,(\mathrm{cm})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D(X) &= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) f(x)\mathrm{d}x} \\
&= \sqrt{\int_{0}^{10} (x-3,333...)^2 \cdot (\frac{1}{5} - \frac{1}{50}x)\mathrm{d}x} \\
&= 2,3570... \approx 2,4\,(\mathrm{cm})
\end{aligned}
$$

Vastaus

$$
F(x) = \begin{cases} 0, \text{ kun } x < 0 \\ \frac{1}{5}x - \frac{1}{100}x^2, \text{ kun } 0 \le x < 10 \\ 1, \text{ kun } x \ge 10 \end{cases}
$$

$$
f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} - \frac{1}{50}x, \text{ kun } 0 \le x < 10 \\ 0, \text{ muulloin} \end{cases}
$$

$E(X) \approx 3,3\,\mathrm{cm}$ ja $D(X) \approx 2,4\,\mathrm{cm}$

300

Olkoon satunnaismuuttujan X tiheysfunktio

$$f(x)=\begin{cases} ax+b, \text{ kun } 0\le x\le 3 \\ 0, \text{ muualla.}\end{cases}$$

a) Määritetään vakiot a ja b niin, että tiheysfunktion määritelmän ehdot toteutuvat ja $E(X)=1$.

1) Pitää olla $f(x)\ge 0$ kaikilla x.

2) Funktion kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-alan tulee olla 1. Välin $0\le x\le 3$ ulkopuolella funktion kuvaaja kulkee pitkin x-akselia. Siten funktion kuvaajan ja x-akselin välillä $[0, 3]$ rajaaman alueen pinta-alan tulee olla 1.

Muodostetaan yhtälö.

$$\int_0^3 (ax+b)\mathrm{d}x=1$$

Koska tiheysfunktion arvot eroavat nollasta välillä $0\le x\le 3$, voidaan odotusarvon määritelmässä esiintyvä integraali rajoittaa tälle välille.

Määritetään odotusarvo.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x$$
$$= \int_{0}^{3} x \cdot (ax+b)\mathrm{d}x$$

Tiedetään, että $E(X) = 1$, joten saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} \int_{0}^{3} (ax+b)\mathrm{d}x = 1 \\ \int_{0}^{3} x \cdot (ax+b)\mathrm{d}x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -\dfrac{2}{9} \\ b = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Tarkistetaan, että tiheysfunktion ensimmäinen ehto toteutuu.

$$-\frac{2}{9}x + \frac{2}{3} \geq 0$$
$$x \leq 3$$

Välillä $0 \leq x \leq 3$ lausekkeen arvot ovat epänegatiivisia.

b) Lasketaan todennäköisyys, että satunnaismuuttujan arvo on vähintään 1.

$$P(X \geq 1) = P(1 \leq X \leq 3) = \int_1^3 -\frac{2}{9}x + \frac{2}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{9} = 0,4444... \approx 0,444$$

Vastaus $a = -\frac{2}{9}$ ja $b = \frac{2}{3}$, $P(X \geq 1) = \frac{4}{9} \approx 0,444$

301

a) Määritetään muuttujan X mediaani a. Koska kertymäfunktio on kasvava, on $0 < a < 4$.

$$\begin{aligned} P(X \le a) &= \frac{1}{2} \\ F(a) &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}a &= \frac{1}{2} \\ a &= 2 \end{aligned}$$

b) Määritetään muuttujan X mediaani a.

$$P(X \le a) = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^a \frac{3}{2}e^{-x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

$$a = \ln\frac{3}{2}$$

Vastaus a) 2 b) $\ln\frac{3}{2}$

302

a) Jotta funktio olisi tiheysfunktio, sen pitää toteuttaa tiheysfunktion määritelmän ehdot.

1) Pitää olla $f(x) \geq 0$ kaikilla x.

2) Funktion kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-alan tulee olla 1. Välin $15,50 \leq x \leq 25,50$ ulkopuolella funktion kuvaaja kulkee pitkin x-akselia. Siten funktion kuvaajan ja x-akselin välillä [15,50; 25,50] rajaaman alueen pinta-alan tulee olla 1.

Funktion kuvaajan ja x-akselin väliin jää kolmio, jonka kanta on väli [15,50; 25,50] ja korkeus h, missä h on tiheysfunktion maksimiarvo.

Ratkaistaan h.

$$\frac{(25,50-15,50)\cdot h}{2}=1$$

$$h=\frac{1}{5}$$

Muodostetaan suorien yhtälöt.

Välillä [15,50; 20,50] suoran kulmakerroin on

$$k_1 = \frac{\frac{1}{5} - 0}{20,50 - 15,50} = \frac{1}{25}$$

ja suoran yhtälö on

$$\begin{aligned} y - y_0 &= k_1(x - x_0) \\ y - 0 &= \frac{1}{25}(x - 15,50) \\ y &= \frac{1}{25}x - \frac{31}{50}. \end{aligned}$$

Välillä [20,50; 25,50] suoran kulmakerroin on

$$k_2 = \frac{0 - \frac{1}{5}}{25,50 - 20,50} = -\frac{1}{25}$$

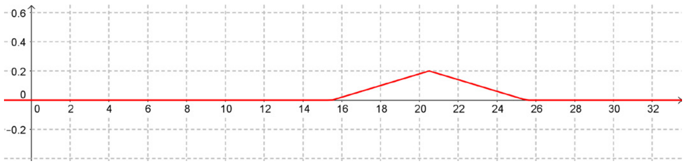
ja suoran yhtälö on

$$\begin{aligned} y - y_0 &= k_2(x - x_0) \\ y - 0 &= -\frac{1}{25}(x - 25,50) \\ y &= -\frac{1}{25}x + \frac{51}{50}. \end{aligned}$$

Muodostetaan tiheysfunktion lauseke.

$$f(x)=\begin{cases} 0,\ \text{kun } x \le 15{,}50 \\ \dfrac{1}{25}x-\dfrac{31}{50},\ \text{kun } 15{,}50 < x \le 20{,}50 \\ -\dfrac{1}{25}x+\dfrac{51}{50},\ \text{kun } 20{,}50 < x \le 25{,}50 \\ 0,\ \text{kun } x > 25{,}50 \end{cases}$$

Funktion f kuvaaja:



b) Lasketaan todennäköisyys, että markkina-arvo on alle 19 €.

$$\begin{aligned} P(x<19) &= \int_{-\infty}^{19} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{15{,}50}^{19} \left(\frac{1}{25}x-\frac{31}{50}\right)\mathrm{d}x \\ &= 0{,}245 \end{aligned}$$

c) Jotta funktio olisi tiheysfunktio, sen pitää toteuttaa tiheysfunktion määritelmän ehdot.

1) Pitää olla $f(x) \geq 0$ kaikilla x.

2) Funktion kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-alan tulee olla 1. Välin $15,50 \leq x \leq 30,50$ ulkopuolella funktion kuvaaja kulkee pitkin x-akselia. Siten funktion kuvaajan ja x-akselin välillä [15,50; 30,50] rajaaman alueen pinta-alan tulee olla 1.

Funktion kuvaajan ja x-akselin väliin jää kolmio, jonka kanta on väli [15,50; 30,50] ja korkeus h_2.

Ratkaistaan h_2.

$$\frac{(30,50-15,50)\cdot h_2}{2}=1$$

$$h_2=\frac{2}{15}$$

Muodostetaan suorien yhtälöt.

Välillä [15,50; 20,50] suoran kulmakerroin on

$$k_3 = \frac{\frac{2}{15} - 0}{20,50 - 15,50} = \frac{2}{75}$$

ja suoran yhtälö on

$$\begin{aligned} y - y_0 &= k_3(x - x_0) \\ y - 0 &= \frac{2}{75}(x - 15,50) \\ y &= \frac{2}{75}x - \frac{31}{75}. \end{aligned}$$

Välillä [20,50; 30,50] suoran kulmakerroin on

$$k_4 = \frac{0 - \frac{2}{15}}{30,50 - 20,50} = -\frac{1}{75}$$

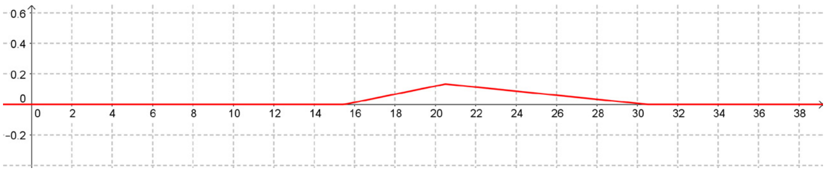
ja suoran yhtälö on

$$\begin{aligned} y - y_0 &= k_2(x - x_0) \\ y - 0 &= -\frac{1}{75}(x - 30,50) \\ y &= -\frac{1}{75}x + \frac{61}{150}. \end{aligned}$$

Muodostetaan tiheysfunktion lauseke.

$$f(x)=\begin{cases} 0,\ \text{kun}\ x\le 15,50 \\ \dfrac{2}{75}x-\dfrac{31}{75},\ \text{kun}\ 15,50<x\le 20,50 \\ -\dfrac{1}{75}x+\dfrac{61}{150},\ \text{kun}\ 20,50<x\le 30,50 \\ 0,\ \text{kun}\ x>30,50 \end{cases}$$

Funktion f kuvaaja:



Koska tiheysfunktion arvot eroavat nollasta välillä $15,50\le x\le 30,50$, voidaan odotusarvon määritelmässä esiintyvä integraali rajoittaa tälle välille.

Lasketaan odotusarvo.

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{15,50}^{30,50} xf(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{15,50}^{20,50} x\left(\frac{2}{75}x-\frac{31}{75}\right)\mathrm{d}x+\int_{20,50}^{30,50} x\left(-\frac{1}{75}x+\frac{61}{150}\right)\mathrm{d}x \\ &= 22,1666\ldots\approx 22,17 \end{aligned}$$

Odotusarvo on noin 22,17 €.

Vastaus a) $f(x)=\begin{cases} 0, \text{ kun } x \le 15,50 \\ \dfrac{1}{25}x-\dfrac{31}{50}, \text{ kun } 15,50 < x \le 20,50 \\ -\dfrac{1}{25}x+\dfrac{51}{50}, \text{ kun } 20,50 < x \le 25,50 \\ 0, \text{ kun } x > 25,50 \end{cases}$

b) 0,245

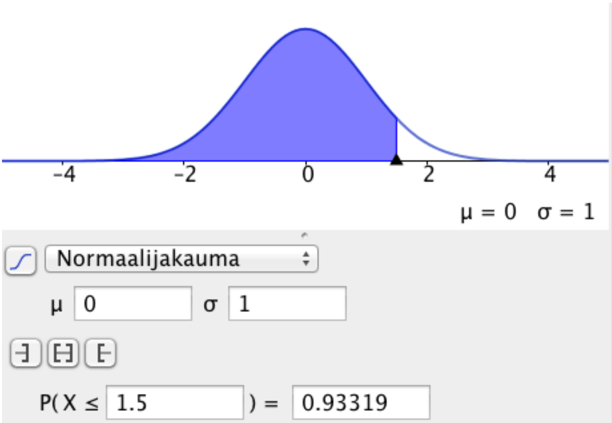
c) 22,17 €

303

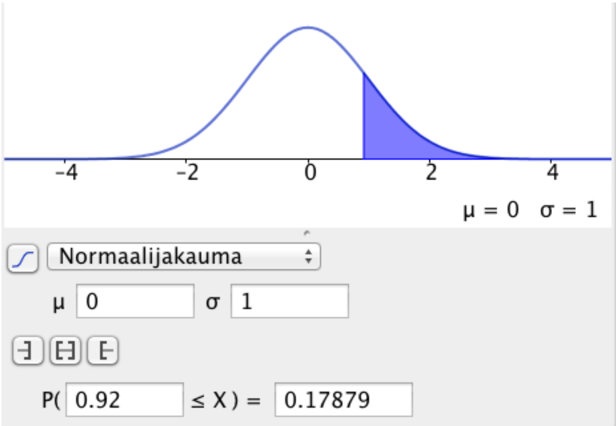
Normaalijakauman odotusarvo $\mu = 0$ ja keskihajonta $\sigma = 1$.

Tutkitaan satunnaismuuttujan Z jakaumaa geometriaohjelman todennäköisyys-sovelluksella.

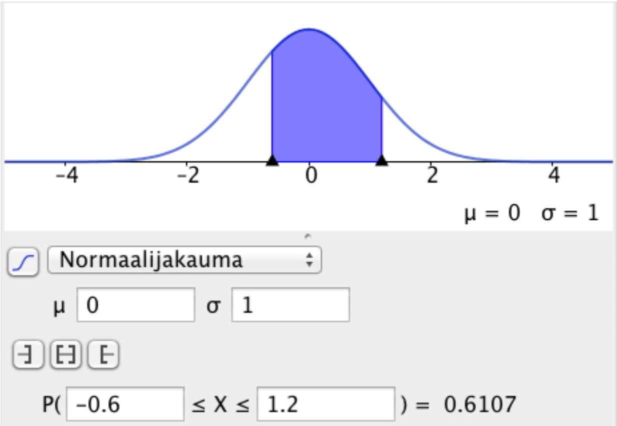
a) $P(Z \leq 1,5) = 0,9331... \approx 93\ \%$



b) $P(Z \geq 0{,}92) = 0{,}1787... \approx 18\ \%$



c) $P(-0,6 \le Z \le 1,2) = 0,6106... \approx 61\ \%$



Vastaus a) 93 % b) 18 % c) 61 %

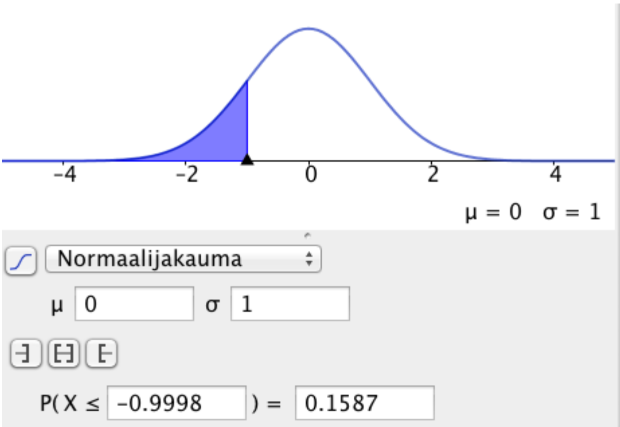
304

Normaalijakauman odotusarvo $\mu = 0$ ja keskihajonta $\sigma = 1$.

Tutkitaan satunnaismuuttujan Z jakaumaa geometriaohjelman todennäköisyys-sovelluksella.

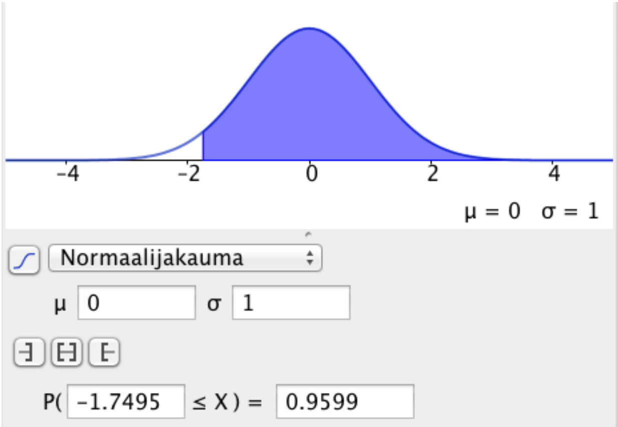
a) $P(Z \leq z) = 0{,}1587$

$$z = -0{,}9998... \approx -1{,}00$$



b) $P(Z \geq z) = 0{,}9599$

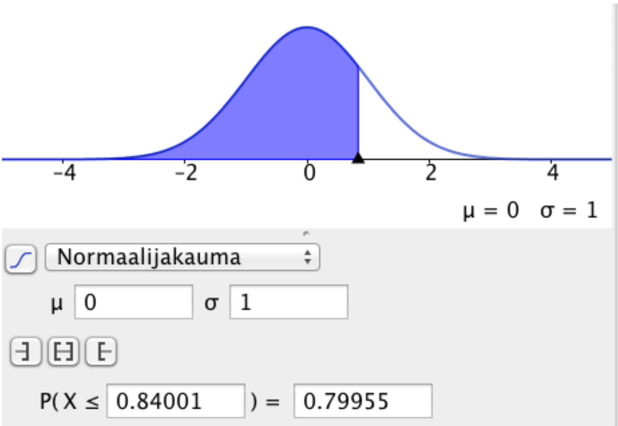
$$z = -1{,}7495... \approx -1{,}75$$



c) $P(-z \leq Z \leq z) = 0,5991$

Symmetrian perusteella

$$P(Z \leq z) = 0,79955$$
$$z \approx 0,84$$



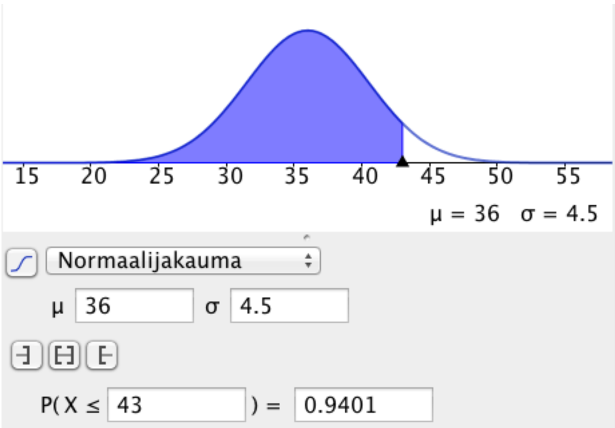
Vastaus a) $z \approx -1,00$ b) $z \approx -1,75$ c) $z \approx 0,84$

305

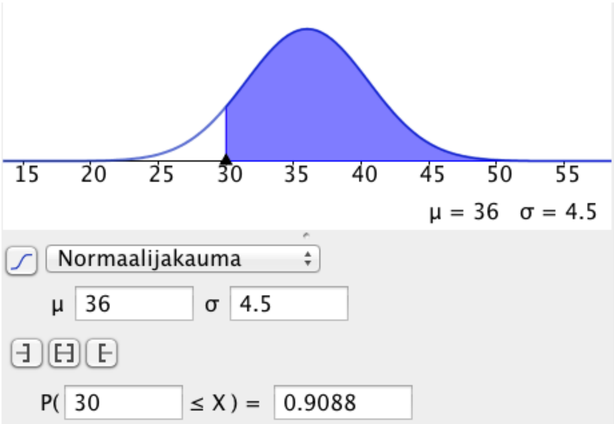
Normaalijakauman odotusarvo $\mu = 36$ ja keskihajonta $\sigma = 4,5$.

Tutkitaan satunnaismuuttujan X jakaumaa laskimella tai geometriaohjelman todennäköisyys-sovelluksella.

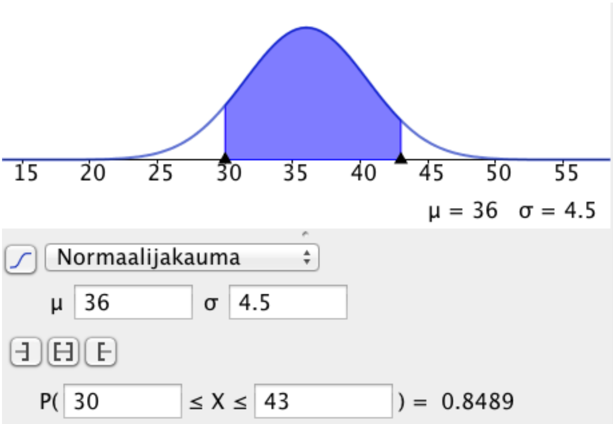
a) $P(X \leq 43) = 0,9400... \approx 0,94$



b) $P(X \geq 30) = 0,9087 \approx 0,91$



c) $P(30 \leq X \leq 43) = 0,8488... \approx 0,85$



Vastaus a) 0,94 b) 0,91 0,85

306

a) Olkoon satunnaismuuttuja X hiustenkuivaajan toiminta-aika. Satunnaismuuttujan X odotusarvo $\mu = 15,2$ kuukautta ja keskihajonta $\sigma = 2,5$ kuukautta.

Määritetään, kuinka monta prosenttia kuivaajista rikkoutuu vuoden aikana.

$P(X \leq 12) = 0,1002... \approx 10$ %

b) Määritetään, kuinka monta prosenttia kuivaajista toimii vioittumatta yli 18 kuukautta.

$P(X \geq 18) = 0,1313... \approx 13$ %

Vastaus a) 10 % b) 13 %

307

a) Olkoon satunnaismuuttuja X karkkipussin paino.
Satunnaismuuttujan X keskiarvo $\overline{x} = 255$ g
ja keskihajonta $\sigma = 15$ g.

Määritetään, millä todennäköisyydellä satunnaisesti valitun pussin paino on yli 250 g.

$$P(X \geq 250) = 0,6305... \approx 0,63$$

b) Määritetään, kuinka monta prosenttia pusseista on painoltaan välillä 240 g– 260 g.

$$P(240 \leq X \leq 260) = 0,4719... \approx 47\ \%$$

Vastaus a) 0,63 b) 47 %

308

a) Olkoon satunnaismuuttuja X 18-vuotiaan pojan pituus. Satunnaismuuttujan X odotusarvo $\mu = 180$ cm ja keskihajonta $\sigma = 7$ cm.

Määritetään, millä todennäköisyydellä satunnaisesti valitun pojan pituus on alle 190 cm.

$P(X \leq 190) = 0,9234... \approx 0,92$

b) Määritetään, millä todennäköisyydellä kaikkien 10 valitun pojan pituus on alle 190 cm.

$$\begin{aligned} & P(\text{kaikki valitut ovat alle 190 cm}) \\ & = 0,9234...^{10} \\ & = 0,4508... \\ & \approx 0,45 \end{aligned}$$

c) Tapahtuman ”ainakin yksi valituista on yli 190 cm” vastatapahtuma on ”kaikki ovat alle 190 cm”.

$$\begin{aligned} & P(\text{valituista ainakin yksi on yli 190 cm}) \\ & = 1 - P(\text{kaikki valitut ovat alle 190 cm}) \\ & = 1 - 0,4508... \\ & = 0,5491... \approx 0,55 \end{aligned}$$

Vastaus a) 0,92 b) 0,45 c) 0,55

309

Olkoon satunnaismuuttuja X soveltuvuuskokeen tulos. Satunnaismuuttujan odotusarvo $\mu = 74$ pistettä ja keskihajonta $\sigma = 8,2$ pistettä.

a) Määritetään, mikä pistemäärä tulee asettaa rajaksi a, jos halutaan, että kokeessa hylätään 75 %.

$$P(X < a) = 0,75$$
$$a = 79,53... \approx 80$$

b) Määritetään, mikä pistemäärä tulee asettaa rajaksi b, jos halutaan, että kokeessa hylätään 20 %.

$$P(X < b) = 0,20$$
$$b = 67,09... \approx 67$$

Vastaus a) 80 pistettä b) 67 pistettä

310

Olkoon satunnaismuuttuja X annoksen suuruus.
Satunnaismuuttujan odotusarvo $\mu = 20,0$ mg
ja keskihajonta $\sigma = 2,4$ mg.

Määritetään annoksen koko a, joka parantaa 95 % kissoista.

$$P(X \leq a) = 0,95$$
$$a = 23,947... \approx 24$$

Vastaus 24 mg

311

Satunnaismuuttuja X noudattaa normaalijakaumaa.

Verrataan satunnaismuuttujan X jakaumaa normitettuun normaalijakaumaan.

Olkoon arvoa $x = 20$ vastaava normitettu arvo z_1. Tulee olla

$$P(X \le 20) = P(Z \le z_1) = 0,20 .$$

Saadaan

$$\begin{aligned} P(Z \le z_1) &= 0,20 \\ z_1 &= -0,84162... \approx -0,8416 . \end{aligned}$$

Muodostetaan normitusyhtälö.

$$\begin{aligned} z &= \frac{x-\mu}{\sigma} \\ -0,8416 &= \frac{20-\mu}{\sigma} \end{aligned}$$

Olkoon arvoa $x = 36$ vastaava normitettu arvo z_2. Tulee olla

$$P(X \le 36) = P(Z \le z_2) = 0,80 .$$

Saadaan

$$\begin{aligned} P(Z \le z_2) &= 0,80 \\ z_2 &= 0,84162... \approx 0,8416 . \end{aligned}$$

Muodostetaan normitusyhtälö.

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$0,8416 = \frac{36-\mu}{\sigma}$$

Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} -0,8416 = \dfrac{20-\mu}{\sigma} \\ 0,8416 = \dfrac{36-\mu}{\sigma} \end{cases}$$

$\mu = 28$ ja $\sigma = 9,5057... \approx 9,5$

Odotusarvo on 28 ja keskihajonta on 9,5.

Vastaus odotusarvo on 28, keskihajonta on 9,5

312

Olkoon satunnaismuuttuja X pussin massa.

Verrataan satunnaismuuttujan X jakaumaa normitettuun normaalijakaumaan.

Olkoon arvoa $x = 400$ g vastaava normitettu arvo z_1. Tulee olla

$P(X \geq 400) = P(Z \geq z_1) = 0,95$.

Saadaan

$$\begin{aligned} P(Z \geq z_1) &= 0,95 \\ z_1 &= -1,64485... \approx -1,6449. \end{aligned}$$

Muodostetaan normitusyhtälö.

$$\begin{aligned} z &= \frac{x - \overline{x}}{\sigma} \\ -1,6449 &= \frac{400 - \overline{x}}{12} \\ \overline{x} &= 419,738.... \approx 420 \end{aligned}$$

Keskimääräinen massa on oltava 420 g.

Vastaus 420 g

313

Olkoon satunnaismuuttuja X: ”vuorokauden keskilämpötila maaliskuussa”.

Satunnaismuuttujan X odotusarvo $\mu = 4,0\ °\text{C}$.

Verrataan satunnaismuuttujan X jakaumaa normitettuun normaalijakaumaan.

$90\ \%$ vuorokautisista keskilämpötiloista on välillä $2\ °\text{C} - 6\ °\text{C}$,
joten $5\ \%$ lämpötiloista on alle $2\ °\text{C}$
ja $5\ \%$ lämpötiloista on yli $6\ °\text{C}$.

Olkoon arvoa $x = 2\ °\text{C}$ vastaava normitettu arvo z. Tulee olla

$P(X \leq 2\ °\text{C}) = P(Z \leq z) = 0,05$.

Saadaan

$$
\begin{aligned}
P(Z \leq z) &= 0,05 \\
z &= -1,64485... \approx -1,6449.
\end{aligned}
$$

Muodostetaan normitusyhtälö.

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{x-\mu}{\sigma} \\
-1,6449 &= \frac{2\ °\text{C} - 4\ °\text{C}}{\sigma} \\
\sigma &= 1,2159...\ °\text{C} \approx 1,2\ °\text{C}
\end{aligned}
$$

Vastaus $1,2\ °\text{C}$

314

Olkoon satunnaismuuttuja Y klaavojen lukumäärä 400:ssa kolikon heitossa.

Koska kolikon heitto on toistokoe, satunnaismuuttuja noudattaa binomijakaumaa.

a) Todennäköisyys saada klaava yhdellä heitolla on $p = \frac{1}{2}$.

Odotusarvo on $\mu = np = 400 \cdot \frac{1}{2} = 200$.

Keskihajonta on $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{400 \cdot \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})} = 10$

b) $Y \sim \mathrm{Bin}(400, \frac{1}{2})$ ja $n = 400$

Satunnaismuuttujan Y todennäköisyyksiä voidaan arvioida satunnaismuuttujan $X \sim \mathrm{N}(200, 10)$ avulla.

$$P(199 \le Y \le 201) = P(198{,}5 \le X \le 201{,}5) = 0{,}1192... \approx 0{,}119$$

c) Lasketaan todennäköisyys käyttäen binomijakaumaa

$Y \sim \mathrm{Bin}(400, \frac{1}{2})$.

$$
\begin{aligned}
&P(199 \leq Y \leq 201) \\
&= \binom{400}{199} 0,5^{199} \cdot 0,5^{201} \\
&\quad + \binom{400}{200} 0,5^{200} \cdot 0,5^{200} \\
&\quad + \binom{400}{201} 0,5^{201} \cdot 0,5^{199} \\
&= 0,1192... \approx 0,119
\end{aligned}
$$

Vastaus a) odotusarvo 200 ja keskihajonta 10
b) 0,119
c) 0,119

315

Olkoon satunnaismuuttuja X lennolle saapuvien matkustajien lukumäärä.

Satunnaismuuttujan odotusarvo

$$\mu = np = 208 \cdot 0,92 = 191,36$$

ja keskihajonta

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{208 \cdot 0,92(1-0,92)} = 3,91264... \approx 3,9126 .$$

Satunnaismuuttujan jakauma $X \sim \mathrm{N}(191,36;\ 3,9126)$.

Lasketaan todennäköisyys, että lennolle saapuu korkeintaan 200 matkustajaa.

$$P(X \leq 200) = 0,986... \approx 0,99$$

Vastaus 0,99

316

Satunnaismuuttuja X noudattaa jakaumaa $X \sim \mathrm{N}(50,\ 10)$.

a) Lasketaan todennäköisyys.

$$P(X \leq 40) = 0{,}1586... \approx 0{,}16$$

b) Lasketaan todennäköisyys.

$$P(40 \leq X \leq 50) = 0{,}3413... \approx 0{,}34$$

c) Lasketaan todennäköisyys.

$$P(X \geq 63) = 0{,}09680... \approx 0{,}097$$

Vastaus a) 0,16 b) 0,34 c) 0,097

317

Satunnaismuuttuja Z noudattaa jakaumaa $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$.

a) Määritetään satunnaismuuttujan arvo a.

$$P(Z \leq a) = 0{,}95$$
$$a = 1{,}6448... \approx 1{,}64$$

b) Määritetään satunnaismuuttujan arvo a.

$$P(Z \geq a) = 0{,}80$$
$$a = -0{,}8416... \approx -0{,}84$$

c) Määritetään satunnaismuuttujan arvo a.

$$P(-a \leq Z \leq a) = 0{,}40$$
$$a = 0{,}5244... \approx 0{,}52$$

Vastaus a) $a = 1{,}64$ b) $a = -0{,}84$ c) $a = 0{,}52$

318

Olkoon satunnaismuuttuja X suomalaisen poikavauvan syntymäpituus.

Satunnaismuuttujan X keskiarvo $\overline{x} = 52$ cm ja keskihajonta $\sigma = 3{,}5$ cm.

a) Määritetään, kuinka monta prosenttia poikavauvoista on syntymäpituudeltaan alle 56 cm.

$P(X \leq 56 \text{ cm}) = 0{,}8734... \approx 87\ \%$

b) Määritetään, kuinka monta prosenttia poikavauvoista on syntymäpituudeltaan yli 48 cm.

$P(X \geq 48 \text{ cm}) = 0{,}8734... \approx 87\ \%$

c) Määritetään, kuinka monta prosenttia poikavauvoista on syntymäpituudeltaan välillä 48 cm– 56 cm.

$P(48 \text{ cm} \leq X \leq 56 \text{ cm}) = 0{,}7469... \approx 75\ \%$

Vastaus a) 87 % b) 87 % c) 75 %

319

Olkoon satunnaismuuttuja X keksipakkauksen massa.

Satunnaismuuttujan keskiarvo $\bar{x} = 204$ g
ja keskihajonta $\sigma = 6$ g .

Lasketaan, kuinka monella prosentilla pakkauksista massa oli alle 200 g.

$P(X \leq 200 \text{ g}) = 0{,}2524... \approx 25\ \%$

Lasketaan, kuinka monella prosentilla pakkauksista massa on välillä 200 g–210 g.

$P(200\ g \leq X \leq 210\ g) = 0{,}5888... \approx 59\ \%$

Vastaus 25 %:lla pakkauksista massa oli alle 200 g
ja 59 %:lla välillä 200 g–210 g

320

Olkoon satunnaismuuttuja X koulumatkan kesto.

Satunnaismuuttujan keskiarvo $\overline{x} = 24$ minuuttia
ja keskihajonta $\sigma = 5$ minuuttia.

Jotta myöhästymisriski olisi noin 10 %,
matkaan on varattava aika x,
jonka alle jää 90 % koulumatkojen kestoista.

$$P(X \leq x) = 0,90$$
$$x = 30,407... \approx 30$$

Selman on lähdettävä kotoa 30 minuuttia ennen koulun alkua.

Vastaus 30 minuuttia

321

Olkoon satunnaismuuttuja X älykkyystestin tulos.

Satunnaismuuttujan odotusarvo $\mu = 100$ ja keskihajonta $\sigma = 15$.

Jos halutaan määritellä, että keskimmäinen 60 % väestöstä on älykkyydeltään ”normaaleja”, sekä alarajan alapuolelle että ylärajan yläpuolelle on jäätävä 20 %.

Määritetään alaraja x_1.

$$P(X \leq x_1) = 0{,}20$$

$$x_1 = 87{,}37... \approx 87$$

Määritetään yläraja x_2.

$$P(X \geq x_2) = 0{,}20$$

$$x_2 = 112{,}62... \approx 113$$

Vastaus alaraja on 87 ja yläraja on 113

322

Olkoon satunnaismuuttuja X kahvin määrä kahvipaketissa. Satunnaismuuttujan keskihajonta $\sigma = 10$ grammaa.

Verrataan satunnaismuuttujan X jakaumaa normitettuun normaalijakaumaan.

Olkoon arvoa $x = 500$ g vastaava normitettu arvo z_1. Tulee olla

$$P(X \leq 400) = P(Z \leq z_1) = 0,02 .$$

Saadaan

$$P(Z \leq z_1) = 0,02$$
$$z_1 = -2,05374... \approx -2,0537 .$$

Muodostetaan normitusyhtälö.

$$z = \frac{x - \overline{x}}{\sigma}$$
$$-2,0537 = \frac{500 - \sigma}{10}$$
$$\overline{x} = 520,537.... \approx 521$$

Kahvin määrän odotusarvo on oltava 521 grammaa.

Vastaus 521 g

323

Olkoon satunnaismuuttuja X led-lampun käyttöikä.

Verrataan satunnaismuuttujan X jakaumaa normitettuun normaalijakaumaan.

Olkoon arvoa $x = 28\ 000$ vastaava normitettu arvo z_1. Tulee olla

$$P(X \le 28\ 000) = P(Z \le z_1) = \frac{400}{1000} = 0,4.$$

Saadaan

$$P(Z \le z_1) = 0,4$$
$$z_1 = -0,25334... \approx -0,2533.$$

Muodostetaan normitusyhtälö.

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$
$$-0,2533 = \frac{28\ 000-\mu}{\sigma}$$

Olkoon arvoa $x = 34\ 000$ vastaava normitettu arvo z_2. Tulee olla

$$P(X \geq 34\ 000) = P(Z \geq z_2) = \frac{50}{1000} = 0{,}05 .$$

Saadaan

$$P(Z \geq z_2) = 0{,}05$$
$$z_2 = 1{,}64485... \approx 1{,}6449$$

Muodostetaan normitusyhtälö.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$
$$1{,}6449 = \frac{34\ 000 - \mu}{\sigma}$$

Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} -0{,}2533 = \dfrac{28\ 000 - \mu}{\sigma} \\ 1{,}6449 = \dfrac{34\ 000 - \mu}{\sigma} \end{cases}$$

$\mu \approx 28\ 800$ ja $\sigma \approx 3160$

Odotusarvo on $28\ 800$ tuntia ja keskihajonta on 3160 tuntia.

Vastaus odotusarvo $28\ 800$ h ja keskihajonta 3160 h

324

Olkoon satunnaismuuttuja X kuutosten lukumäärä 300:ssa nopan heitossa.

Koska nopanheitto on toistokoe, satunnaismuuttuja noudattaa binomijakaumaa.

Todennäköisyys saada kuutonen yhdellä heitolla on $p = \frac{1}{6}$.

Odotusarvo on $\mu = np = 300 \cdot \frac{1}{6} = 50$.

Keskihajonta on $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{300 \cdot \frac{1}{6}(1-\frac{1}{6})} = \frac{5\sqrt{15}}{3}$

a) $X \sim \text{Bin}(300, \frac{1}{6})$ ja $n = 300$.

Satunnaismuuttujan X todennäköisyyksiä voidaan arvioida satunnaismuuttujan $Y \sim \text{N}(50, \frac{5\sqrt{15}}{3})$ avulla.

$$P(50 \le X \le 60) = P(49{,}5 \le X \le 60{,}5) = 0{,}4789... \approx 0{,}479$$

b) Lasketaan todennäköisyys.

$$P(60 \text{ kuutosta}) = P(59{,}5 \le X \le 60{,}5) = 0{,}01864... \approx 0{,}019$$

Vastaus a) 0,479 b) 0,019

325

Olkoon satunnaismuuttuja Y maahanmuuttoon myönteisesti suhtautuvien määrä 200:sta henkilöstä.

Henkilöiden valinta on toistokoe, satunnaismuuttuja noudattaa binomijakaumaa.

Todennäköisyys, että henkilö on maahanmuuttomyönteinen, on $p = 0{,}59$.

Odotusarvo on

$$\mu = np = 200 \cdot 0{,}59 = 118.$$

Keskihajonta on

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{200 \cdot 0{,}59(1-0{,}59)} = 6{,}95557... \approx 6{,}9556.$$

$Y \sim \mathrm{Bin}(200;\ 0{,}59)$ ja $n = 200$.

Satunnaismuuttujan Y todennäköisyyksiä voidaan arvioida satunnaismuuttujan $X \sim \mathrm{N}(118,\ 6{,}9556)$ avulla.

Lasketaan todennäköisyys, että 200 satunnaisesti valitun henkilön joukossa on maahanmuuton vastustajia enemmistö eli maahanmuuttomyönteisiä on korkeintaan 99.

$$P(X \leq 99) = P(X \leq 99{,}5) = 0{,}003910... \approx 0{,}0039$$

Vastaus 0,0039

326

Olkoon satunnaismuuttuja X_1 automatkan kesto.
Satunnaismuuttujan X_1 odotusarvo $\mu_1 = 17$ minuuttia ja keskihajonta $\sigma_1 = 5$ minuuttia.

Olkoon satunnaismuuttuja X_2 metromatkan kesto.
Satunnaismuuttujan X_2 odotusarvo $\mu_2 = 13$ minuuttia ja keskihajonta $\sigma_2 = 2$ minuuttia.

Olkoon satunnaismuuttuja $X = X_1 + X_2$ työmatkan pituus.
Tällöin satunnaismuuttujan X odotusarvo

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 = 17\,\text{min} + 13\,\text{min} = 30\,\text{min}$$

ja keskihajonta

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}\,.$$

a) Lasketaan todennäköisyys, että työmatkaan kuluu alle 25 minuuttia.

$$P(X \leq 25\,\text{min}) = 0{,}17658... \approx 0{,}177$$

b) Lasketaan todennäköisyys, että työmatkaan kuluu yli 40 minuuttia.

$$P(X \geq 40\,\text{min}) = 0{,}03165... \approx 0{,}032$$

Vastaus a) 0,177 b) 0,032

327

Olkoon satunnaismuuttuja X henkilön saapumisaika pysäköintialueelle.

Satunnaismuuttujan keskiarvo on klo 8.50 ja keskihajonta 5 min.

$\mu = 8\frac{50}{60} = \frac{530}{60}$ ja $\sigma = \frac{5}{60}$

Lasketaan todennäköisyys tapahtumalle

A: ”henkilö saapuu työpaikalle klo 9.00 jälkeen”.

Tapahtuman A vastatapahtuma on

$\overline{A}$: "henkilö saapuu työpaikalle viimeistään klo 9.00".

Jos henkilö löytää paikan pysäköintialueelta, hänen on saavuttava viimeistään klo 8.55, jotta hän ehtii työpaikalle viimeistään klo 9.00.

Klo 8.55 on murtolukuna $8\frac{55}{60} = \frac{535}{60}$.

Jos henkilö ei löydä paikkaa pysäköintialueelta, hänen on saavuttava pysäköintialueelle viimeistään klo 8.45, jotta hän ehtii työpaikalle viimeistään klo 9.00.

Klo 8.45 on murtolukuna $8\frac{45}{60} = \frac{525}{60}$.

$P(\text{henkilö saapuu työpaikalle klo 9 jälkeen})$

$= 1 - P(\text{henkilö saapuu työpaikalle viimeistään klo 9})$

$= 1 - (P(\text{löytää paikan}) \cdot P(\text{saapuu viimeistään 8.55})$
$\quad + P(\text{ei löydä paikkaa}) \cdot P(\text{saapuu viimeistään 8.45}))$

$$= 1 - (0,65 \cdot P(X \leq \frac{535}{60}) + (1 - 0,65) \cdot P(X \leq \frac{525}{60}))$$

$= 0,3975... \approx 0,40$

Vastaus 0,40