MAA17 VÄLIKOE 2 2018 RATKAISUT

OSIO A

1. Ratkaise yhtälö tai epäyhtälö

   a) $x\sqrt{x+1} = \sqrt{2x}$

   b) $\dfrac{2x+1}{x-1} \geq 3$

   RATKAISU: a) Määrittelyehdot: $x + 1 \geq 0$ ja $2x \geq 0$ eli yhteensä $x \geq 0$.

   Neliöönkorotusehto: vasemman puolen on oltava suurempi tai yhtäsuuri kuin 0 eli $x \geq 0$.

   Siis ehto $x \geq 0$ kattaa kaikki yllämainitut ehdot.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x+1} &= \sqrt{2x} \quad \Big| ()^2 \\
2(x+1) &= 2x \\
x^3 + x^2 - 2x &= 0 \\
x(x^2 + x - 2) &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{lll}
x = 0 & \text{tai} & x^2 + x - 2 = 0 \\
x = 0 & \text{tai} & x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} \\
x = 0 & \text{tai} & x = \dfrac{-1 \pm 3}{2} \\
x = 0 \quad \text{tai} & x = 1 \quad \text{tai} & x = -2.
\end{array}
$$

Määrittely- ja neliöönkorotusehtojen takia $x = -2$ ei kelpaa ratkaisuksi.

b) Määrittelyehto on $x - 1 \neq 0$ eli $x \neq 1$. Muokataan epäyhtälöä niin, että oikealle puolelle jää 0:

$$
\begin{aligned}
\frac{2x+1}{x-1} &\geq 3 \quad \Big| -3 \\
\frac{2x+1}{x-1} - 3 &\geq 0 \\
\frac{2x+1-3(x-1)}{x-1} &\geq 0 \\
\frac{2x+1-3x+3}{x-1} &\geq 0 \\
\frac{-x+4}{x-1} &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Tehdään merkkikaavio: Lausekkeen $-x+4$ kuvaaja on laskeva suora eli lauseke on positiivinen nollakohdan $x = 4$ vasemmalla puolen ja negatiivinen oikealla puolen. Vastaavasti lausekkeen $x - 1$ kuvaaja on nouseva suora eli lauseke on negatiivinen nollakohdan $x = 1$ vasemmalla puolen ja positiivinen oikealla puolen.

$-x+4$	$+$	$+$	$-$
$x-1$	$-$	$+$	$+$
Osamäärä	$-$	$+$	$-$

-1 $\qquad$ 4

Merkkikaaviosta nähdään, että epäyhtälö toteutuu, kun $1 < x \leq 4$.

VASTAUS: a) $x = 0$ tai $x = 1$. b) $1 < x \leq 4$.

2. Ratkaise yhtälö

a) $\tan n = \sqrt{3}$

b) $\cos 2x + \cos 3x = 0$.

RATKAISU: a) Määrittelyehto on $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$. Taulukkokirjasta saadaan saadaan peruskulma $\frac{\pi}{3}$ ja siis koko ratkaisu on

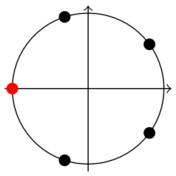
$$\tan n = \sqrt{3}x \qquad = \frac{\pi}{3} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

b)

$$\begin{aligned}
\cos 2x + \cos 3x &= 0\\
\cos 2x &= -\cos 3x\\
\cos 2x &= \cos(\pi - 3x) \qquad (MAOL : \cos x = -\cos(\pi - x))
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lcl}
2x = \pi - 3x + n2\pi & \text{tai} & x = -(\pi - 3x) + n2\pi\\
5x = \pi + n2\pi & \text{tai} & x = -\pi + 3x + n2\pi\\
x = \frac{\pi}{5} + n\frac{2\pi}{5} & \text{tai} & -x = -\pi + n2\pi\\
x = \frac{\pi}{5} + n\frac{2\pi}{5} & \text{tai} & x = \pi - n2\pi
\end{array}$$

Ratkaisut voidaan yhdistää yksikköympyrän avulla



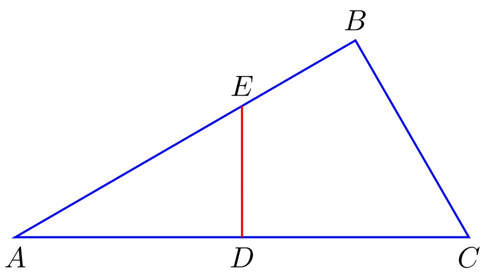
Huomataan, että arvolla $n = 2$ vasemmanpuoleisessa ratkaisussa saadaan ratkaisu π, joten oikeanpuoleiset ratkaisut sisältyvät vasemmanpuoleiseen.

VASTAUS: a) $x = \frac{\pi}{3} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$. b) $x = \frac{\pi}{5} + n\frac{2\pi}{5}, \quad n \in \mathbb{Z}$.

OSIO B

3. Suorakulmaisen kolmion toinen terävä kulma on 30 astetta. Kolmion hypotenuusan keskipisteeseen piirretään kuvion mukaisesti kohtisuora jana, jonka toinen päätepiste sijaitsee kolmion kateetilla. Laske niiden kahden osan pituuksien suhde, joihin kohtisuora jakaa kateetin.

RATKAISU: Piirretään kuva, johon nimetään pisteet:



Merkitään pituutta $AC = 2c$. Tällöin $AD = c$. Edelleen

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{2c},$$

mistä $AB = c\sqrt{3}$.

Yhdenmuotoisista kolmioista saadaan

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB},$$

mistä

$$AE = \frac{AC \cdot AD}{AB} = \frac{2c \cdot c}{c\sqrt{3}} = \frac{2c}{\sqrt{3}}.$$

Edelleen

$$EB = AB - AE = c\sqrt{3} - \frac{2c}{\sqrt{3}} = \frac{3c - 2c}{\sqrt{3}} = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

Siten kysytty suhde on

$$\frac{AE}{EB} = \frac{2c/\sqrt{3}}{c/\sqrt{3}} = 2.$$

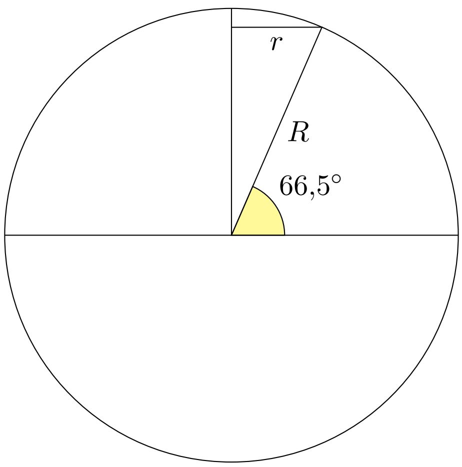
VASTAUS: Kohtisuora jakaa kateetin suhteessa 2:1.

4. Maapallon säde on 6371 km, ja sen pohjoisen napapiirin leveysaste on 66,5. Pohjoiselta napapiiriltä valitaan pisteet A ja B, joiden pituusasteiden erotus on 90 astetta.

   a) Määritä pisteiden Aja B välisen viivasuoran tunnelin pituus. b) Määritä pisteiden A ja B välisen lyhyemmän napapiirin kaaren pituus.

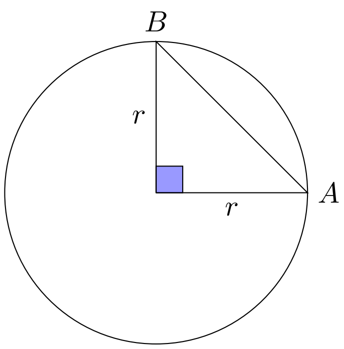
   RATKAISU: Olkoon maapallon säde $R = 6271$ (km) ja pohjoisen napapiirin säde r.

   Piirretään poikkilaikkauskuva maapallosta:



   Kuvasta nähdään, että $r = R \sin(90^\circ - 66{,}5^\circ) \approx 2540$.

   Piirretään kuva napapiiristä pohjaoisnavan yläpuolellta katsottuna



Nyt

$$AB^2 = r^2 + r^2 = 2r^2 \approx 12\,907\,000,$$

mistä $AB \approx 3593$.

b) Kaaren AB pituus on

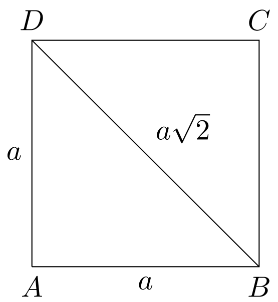
$$\frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi r \approx 3991.$$

VASTAUS: a) 3593 km   b) 3991 km

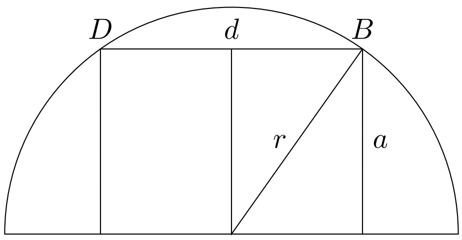
5. Puolipallon sisällä on kuutio siten, että sen yksi sivutahko on puolipallon pohjatasolla ja vastakkaisen sivutahkon kärkipisteet ovat pallon pinnalla. Kuinka monta prosenttia kuution tilavuus on puolipallon tilavuudesta?

RATKAISU: Tarkastellaan tilannetta aluksi ylhäältä käsin, jolloin havaitaan, että kuution tahkon halkaisija d on

$$d = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}.$$



Piirretään poikkileikkauskuva pisteiden B, D ja puolipallon keskipisteen kautta:



Pythagoraan lauseen avulla saadaan yhtälö

$$r^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2}d\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{1}{2}a^2 = \frac{3a}{2},$$

mistä

$$a = r\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Tilavuuksien suhde on siis

$$\frac{a^3}{2\pi r^3/3} = \frac{3\sqrt{\frac{2}{3}}^3 r^3}{2\pi r^3} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\pi} = 0{,}259\,89\cdots \approx 0{,}26.$$

VASTAUS: Kuution tilavuus on 26% puolipallon tilavuudesta.