MAA17 VÄLIKOE 1 2018 RATKAISUT

OSIO A

1. a) Sievennä lauseke $x - (2x^2 - (3x - 4x^2))$.

   b) Osoita, että luvut $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ja $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ovat toistensa käänteislukuja.

   c) Osoita, että $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$, kun $a > 0$ ja $b > 0$.

   RATKAISU: a)

$$\begin{aligned} & x - (2x^2 - (3x - 4x^2)) \\ =& x - (2x^2 - 3x + 4x^2) \\ =& x - (6x^2 - 3x) \\ =& x - 6x^2 + 3x \\ =& 4x - 6x^2. \end{aligned}$$

HUOM. Yhtäsuuruusmerkkien puuttumisesta meni piste.

b) TAPA 1): Käänteislukujen tulo on 1:

$$\frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}}{3 \cdot 2} = \frac{6}{6} = 1.$$

TAPA 2): Luvun a käänteisluku on on $\frac{1}{a}$:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{6}}{3} &= \frac{2}{\sqrt{6}} \qquad \text{(kerrotaan ristiin)} \\ \sqrt{6} \cdot \sqrt{6} &= 3 \cdot 2 \\ 6 &= 6, \end{aligned}$$

joten luvun ovat toistensa käänteislukuja.

c) Epäyhtälön molemmat puolet ovat positiivisia, joten voidaan korottaa toiseen potenssiin:

$$\begin{aligned} \sqrt{a+b} &< \sqrt{a} + \sqrt{b} \qquad \Big|()^2 \\ a + b &< a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \\ 0 &< 2\sqrt{a}\sqrt{b}. \end{aligned}$$

Viimeninen yhtälö on tosi, koska $a > 0$ ja $b > 0$, ja eo. epäyhtälöt ovat keskenään yhtäpitäviä, joten myös ensimmäinen on tosi. Siis on todistettu, että $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$, kun $a > 0$ ja $b > 0$.

2. a) Ratkaise yhtälö

$$\frac{x+1}{2} - 2 \cdot \frac{x+1}{3} = \frac{x+2}{4}$$

b) Jaa polynomi $2x^2 - 17x + 21$ tekijöihin.

RATKAISU: a)

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{2} - 2 \cdot \frac{x+1}{3} &= \frac{x+2}{4} \qquad \Big| \cdot 12 \\
6(x+1) - 8(x+1) &= 3(x+2) \\
6x + 6 - 8x - 8 &= 3x + 6 \\
-2x - 2 &= 3x + 6 \\
-5x &= 8 \\
x &= -\frac{8}{5}.
\end{aligned}$$

b) Lasketaan polynomin nollakohdat:

$$\begin{aligned}
2x^2 - 17x + 21 &= 0 \\
x &= \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 21}}{2 \cdot 2} \\
&= \frac{17 \pm \sqrt{289 - 168}}{4} \\
&= \frac{17 \pm \sqrt{121}}{4} \\
&= \frac{17 \pm 11}{4} = \begin{cases} 7 \\ \frac{3}{2}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Siis

$$2x^2 - 17x + 21 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x-7) = (2x-3)(x-7).$$

HUOM: Myös perustelu $2x^2-17x+21 = (2x-3)(x-7)$, koska $(2x-3)(x-7) = 2x^2-14x-3x+21 = 2x^2 - 17x + 21$, kelpaa.

OSIO B

3. Asuinrakennuksesta saadut vuokrat ovat 12% pienemmät kuin ylläpitokustannukset. Kuinka monta prosenttia vuokria olisi korotettava, jotta ne tulisivat 10% suuremmiksi kuin ylläpitokustannukset, jotka samanaikaisesti kohoavat 4%?

RATKAISU: Olkoot ylläpitokustannukset $100a$, $a > 0$, jolloin vuokrat ovat $88a$. Olkoon vaadittu vuokrankorotus p prosenttia. Tällöin saadaan ehto

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{p}{100}\right) 88a &= 1{,}10 \cdot 1{,}04 \cdot 100a \\
88a + 0{,}88pa &= 114{,}4a \qquad \Big| : a > 0 \\
88 + 0{,}88p &= 114{,}4 \qquad \Big| - 88 \\
0{,}88p &= 26{,}4 \qquad \Big| : 0{,}88 \\
p &= 30
\end{aligned}$$

Siis vuokria on korotettava 30%.

4. Säiliö sisältää 2,3 kg ilmaa, ja pumppu poistaa jokaisella vedolla 5% säiliössä olevasta ilmasta.

   a) Muodosta lauseke säiliössä olevan ilman määrälle x:n vedon jälkeen. (1p.)

   b) Muodosta epäyhtälö tilanteesta, kun x:n vedon jälkeen säiliössä on vähemmän kuin 0,2 kg ilmaa (1p.)

   c) Muodosta logaritmin avulla laskulauseke vetojen määrälle x. (2p.)

   d) Kuinka monen vedon jälkeen säiliössä on vähemmän kuin 0,2 kg ilmaa? (2p.)

   RATKAISU: a) Alussa ilmaa on 2,3 kg, yhden vedon jälkeen $0{,}95 \cdot 2{,}3\,\text{kg}$, kahden vedon $0{,}95^2 \cdot 2{,}3\,\text{kg}$ ja siis x:n vedon jälkeen $0{,}95^x \cdot 2{,}3\,\text{kg}$.

   b) Ilman yksikköjä saadaan epäyhtälö

$$0{,}95^x \cdot 2{,}3 < 0{,}2.$$

   c) Epäyhtälöstä, johon päädyttiin b)-kohdassa saadaan

$$0{,}95^x < \frac{0{,}2}{2{,}3}.$$

   Ottamalla tästä puolittain kymmenkantainen logaritmi lg (vastaavasti toimii luonnollinen logaritmi ln) saadaan

$$\begin{aligned} \lg\left(0{,}95^x\right) &< \lg\left(\frac{0{,}2}{2{,}3}\right) \\ x \lg 0{,}95 &< \lg 0{,}2 - \lg 2{,}3 \qquad \Big| : \lg 0,95 < 0 \\ x &> \frac{\lg 0{,}2 - \lg 2{,}3}{\lg 0,95}. \end{aligned}$$

   d) Edellisestä kohdasta saadaan, että $x > 47{,}62$. Koska vetojen lukumäärä on kokonaisluku, säiliössä on vähemmän kuin 0,2 kg ilmaa 48 vedon jälkeen.

   VASTAUS: a) $0{,}95^x \cdot 2{,}3\,\text{kg}$, b) $0{,}95^x \cdot 2{,}3 < 0{,}2$ c) $x > \dfrac{\lg 0{,}2 - \lg 2{,}3}{\lg 0,95}$ d) 48 vedon jälkeen.

5. Tuoreissa omenissa on vettä 80% ja sokeria 4%. Kuinka monta prosenttia sokeria on samoissa omenissa, kun ne on kuivattu siten, että kosteusprosentti on 20?

   RATKAISU: Okoon tuoreita omenia a kg ja niistä saatuja kuivattuja b kg. Taulukoidaan omenoiden sisältämät ainekset:

	massa	vesi	kuiva-aines	sokeri
Tuoreet omenat	a	$0{,}8a$	$0{,}2a$	$0{,}04a$
Kuivatut omenat	b	$0{,}2b$	$0{,}8b$	?

   Nyt kuiva-aineen määrä säilyy kuivatuksessa eli $0{,}2a = 0{,}8b$, mistä

$$a = \frac{0{,}8b}{0{,}2} = 4b.$$

   Siis kuivatuissa omenoissa on sokeria $0{,}04a = 0{,}04 \cdot 4b = 0{,}16b$.

   VASTAUS: 16%.

6. Suure a suoraan verrannollinen suureen b neliöön ja suure b on kääntäen verrannollinen suureen c kuutiojuureen.

   a) Miten suure a on verrannollinen suureeseen c?

   b) Miten a muuttuu, kun c pienenee 15%?

   RATKAISU: a) Nyt $a = k_1 b^2$ ja $b = \dfrac{k_2}{\sqrt[3]{c}}$, missä k_1 ja k_2 ovat verrannollisuuskertoimia. Siis

$$a = k_1 b^2 = k_1 \cdot \left(\frac{k_2}{\sqrt[3]{c}}\right)^2 == k_1 k_2^2 \left(c^{-\frac{1}{3}}\right)^2 = k_1 k_2^2 c^{-\frac{2}{3}}.$$

   Merkitään $k_3 = k_1 k_2^2$ (uusi verrannollisuuskerroin), jolloin saadaan

$$a = k_3 c^{-\frac{2}{3}} = \frac{k_3}{c^{\frac{2}{3}}}$$

   eli a on suoraan verrannollinen suureen c potenssiin $-\frac{2}{3}$ tai kääntäen verrannollinen suureen c potenssiin $\frac{2}{3}$.

   b) Olkoon a_1 alkuperäinen suureen a arvo ja c_1 alkuperäinen suureen c arvo. Olkoon a_2 suureen a muuttunut arvoarvo, kun suure c_1 pienenee 15%. Tällöin

$$a_2 = k_3(0{,}85c_1)^{-\frac{2}{3}} = k_3 \cdot 0{,}85^{-\frac{2}{3}} c_1^{-\frac{2}{3}} \approx 1{,}114\,43 k_3 c_1^{-\frac{2}{3}} = 1{,}114\,43 a_1.$$

   Siis suure a kasvaa n. 11,4%.

   VASTAUS: a) a on suoraan verrannollinen suureen c potenssiin $-\frac{2}{3}$ tai kääntäen verrannollinen suureen c potenssiin $\frac{2}{3}$, b) 11,4%.